MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 15, 2, 1965

SPEZIELLE DOPPELVERHÄLTNISSCHAREN AUF REGELFLÄCHEN

JOSEF VALA, Brno

In der vorliegenden Arbeit werden die Eigenschaften der schichtbildenden, quadratischen und isogonalen Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen behandelt.

a) Betrachten wir eine Regelfläche Φ im projektiven dreidimensionalen Raum. Die Fläche Φ sei keine Torse. Ihre Gleichung kann man in der Form

$$x = y(u) + vz(u) \tag{1}$$

angeben. Die Differentialgleichungen der Leitlinien C_y, C_z der Fläche Φ haben die Gestalt

$$\begin{aligned} y'' &= \alpha_{11}y + \alpha_{12}z + \beta_{11}y' + \beta_{12}z', \\ z'' &= \alpha_{21}y + \alpha_{22}z + \beta_{21}y' + \beta_{22}z'. \end{aligned} \tag{1a}$$

(Die Striche bedeuten Ableitungen nach u.)

Wir betrachten auf der Fläche Φ eine Linienschar R, die durch eine Riccatische Differentialgleichung

$$v' = \frac{dv}{du} = B(u, v) = -\alpha(u) - 2\beta(u)v - \gamma(u)v^2 \tag{2}$$

bestimmt ist. Solche Linienschar nennt man *Doppelverhältnisschar* oder *R*-Schar.

Zu den Doppelverhältnisscharen R auf der Fläche Φ gehört auch die *parametrische Doppelverhältnisschar*

$$v' = 0 \ (\alpha(u) = \beta(u) = \gamma(u) = 0) \tag{2a}$$

und die *Schar von Asymptotenlinien* der Fläche Φ

$$v' = -\tfrac{1}{2}\beta_{12} - \tfrac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11})v + \tfrac{1}{2}\beta_{21}v^2 \tag{2b}$$

(Barner [1], S. 57).

Die Tangenten an die Linien der R-Schar in den Punkten der Erzeugenden p der Fläche Φ bilden eine Geradenschar Γ_1 der Quadrik Ψ.

Längs jeder Erzeugenden $p(u = u_0)$ der Fläche Φ betrachten wir ein Koordinatensystem mit den Eckpunkten $y(u_0)$, $z(u_0)$, $y'(u_0)$, $z'(u_0)$. Die Koordinaten beliebigen Punktes X bezeichnen wir x_1, x_2, x_3, x_4, es ist also

$$X = x_1y + x_2z + x_3y' + x_4z'.$$

Die Gleichung der Fläche Ψ in diesem lokalen Koordinatensystem lautet dann

$$x_2x_3 - x_1x_4 + \alpha x_3^2 + 2\beta x_3x_4 + \gamma x_4^2 = 0 \tag{3}$$

(Mayer [5], S. 5).

In den Abschnitten **a)**, **b)** setzen wir voraus, daß die behandelte R-Schar (2) nicht aus den Asymptotenlinien besteht.

Die Flächen Ψ, die zur R-Schar (2) gehören, bilden eine Quadrikschar Ψ_u. Diese einparametrische Schar von Berührquadriken der Fläche Φ hüllt außer der Regelfläche Φ noch die von den Raumkurven k dritter Ordnung gebildete Fläche Ω ein. Die Schmiegebenen an die Kurven der R-Schar längs einer beliebigen Erzeugenden p der Fläche Φ bilden eine Torse H. Betrachten wir weiter die Quadrik Ψ, die zur behandelten R-Schar gehört und längs der Erzeugenden p die Fläche Φ berührt. Die Torse H berührt diese Quadrik längs der Kurve k ([5], S. 6.).

Bezeichnen wir

$$\begin{aligned} \varphi &= -v^2\alpha_{21} + v(\alpha_{22} - \alpha_{11}) + \alpha_{12}, \\ \psi &= -v^2\beta_{21} + v(\beta_{22} - \beta_{11}) + \beta_{12}, \qquad \bar{B} = \frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B}{\partial v}B, \end{aligned} \tag{4}$$

so gilt für die Schmiegeben an die Kurven der R-Schar längs der Erzeugenden p der Fläche Φ eine Gleichung der Gestalt

$$\begin{aligned} &-v(\psi + 2B)x_1 + (\psi + 2B)x_2 + [-B(\beta_{12} + v\beta_{22}) - 2B^2 - \\ &- v(-\varphi - \bar{B})]x_3 + [B(\beta_{11} + v\beta_{21}) - \varphi - \bar{B}]x_4 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

v ist der Parameter in der Gleichung (5).

Wenn wir alle Lagen der Geraden p auf der Fläche Φ betrachten, dann können wir annehmen, daß (5) die Gleichung aller Schmiegebenen an die Kurven der gegebenen R-Schar ist.

Die Schmiegebenen an die Kurven der R-Schar in allen Punkten der Erzeugenden p ($u = u_0$) der Fläche Φ hüllen dann die schon erwähnte Fläche H ein. Auf dieser Fläche kann man leicht die Kurve k finden. Ihre Gleichungen lauten dann (der Parameter ist v):

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi + B' + 2(B + \psi)(\beta + \gamma v) - B(\beta_{11} + v\beta_{21}), \\ x_2 &= v(\varphi + B') - 2(B + \psi)(\alpha + \beta v) - B(\beta_{12} + v\beta_{22}), \\ x_3 &= \psi + 2B, \\ x_4 &= v(\psi + 2B). \end{aligned} \tag{6}$$

Wenn wir alle Lagen der Geraden p betrachten, dann ist (6) die Gleichung der Fläche Ω (die Parameter sind u und v).

Wenn die parametrische R-Schar (2a) aus den Asymptotenlinien der Fläche Φ besteht und die Gleichung (1) so normiert ist, daß

$$(y, z, y', z') = konst., \qquad \text{d. h. } \beta_{11} + \beta_{22} = 0 \tag{7}$$

gilt, dann ist $\beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{22} = 0$ und die Gleichungen (6) haben eine einfache Form

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi + B' + 2B(\beta + \gamma v), \\ x_2 &= v(\varphi + B') - 2B(\alpha + \beta v), \\ x_3 &= 2B, \\ x_4 &= 2Bv. \end{aligned} \tag{6a}$$

b) Setzen wir im folgenden voraus, daß die parametrischen Linien $v = konst.$ Asymptotenlinien sind, es soll weiter die Relation (7) gelten. Der Parameter u in der Gleichung (1) sei der Cartanische Parameter. Für die Koeffizienten der Differentialgleichungen (1a) gilt dann

$$\beta_{11} = \beta_{12} = \beta_{21} = \beta_{22} = 0 \qquad \text{und} \qquad \alpha_{11} + \alpha_{22} = 0$$

([1], S. 55, 58).

Die R-Schar nennt man *isogonal* zur gegebenen R-Schar (2) (die Koeffizienten in der Gleichung (2) sind gegebene Funktionen von u), wenn das Doppelverhältnis der Schmiegtangenten, der Erzeugenden und der Tangenten an die Linien der beiden R-Scharen in jedem Punkte A der Fläche Φ konstant ist.

Wir werden weiter alle möglichen R-Scharen betrachten, die isogonal zur gegebenen R-Schar sind.

Satz 1. *Die charakteristischen Kurven k dritter Ordnung, die zu den diesen Scharen entsprechenden Ψ_u — Quadrikscharen längs der Erzeugenden p der Fläche Φ gehören, bilden die Fläche K vierter Ordnung. Die Gerade p ist eine Doppelgerade dieser Fläche. Die Tangentenebenen der Fläche Φ in den Punkten der Geraden p schneiden die Fläche K in der Geraden p und in den Kegelschnitten. Jeder solche Kegelschnitt geht durch den entsprechenden Berührpunkt der Fläche Φ.*

Beweis. Die Differentialgleichung aller R-Scharen, die isogonal zu der gegebenen R-Schar sind, kann man in der Form

$$\frac{dv}{du} = \lambda B$$

annehmen. λ ist eine beliebige Konstante. Dies folgt daraus, daß die parametrischen Linien der Fläche Φ nach der Voraussetzung Asymptotenlinien sind.

Die parametrische Gleichung der Fläche K bekommen wir ohne Schwierigkeiten, wenn wir die Größen α, β, γ in den Gleichungen (6a) durch die Größen $\lambda\alpha$, $\lambda\beta$, $\lambda\gamma$ ersetzen.

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi + \lambda B' + 2\lambda^2 B(\beta + \gamma v), \\ x_2 &= v\varphi + \lambda v B' - 2\lambda^2 B(\alpha + \beta v), \\ x_3 &= 2\lambda B, \\ x_4 &= 2v\lambda B. \end{aligned} \tag{8}$$

Aus den Gleichungen (8) ergibt sich sofort

$$x_4/x_3 = v; \qquad -vx_1/x_3 + x_2/x_3 = \lambda B.$$

Wir berechnen v und λ aus diesen Gleichungen und setzen in die Gleichung

$$\frac{x_1}{x_3} = \frac{\varphi + \lambda B' + 2\lambda^2 B(\beta + \gamma v)}{2\lambda B}$$

ein. Dann bekommen wir

$$\begin{aligned} &-2x_4x_1^2(\beta x_4 + \alpha x_3) + 2x_1x_2(-\gamma x_4^2 + \alpha x_3^2) + 2x_2^2x_3(\beta x_3 + \gamma x_4) = \\ &= [-\alpha_{21}x_4^2 + x_3x_4(\alpha_{22} - \alpha_{11}) + x_3^2\alpha_{12}]\,[\alpha x_3^2 + 2\beta x_3x_4 + \gamma x_4^2] + \\ &\quad + [\alpha' x_3^2 + 2\beta' x_3x_4 + \gamma' x_4^2]\,(-x_1x_4 + x_2x_3). \end{aligned} \tag{9}$$

Dies ist die Gleichung der Fläche K.

Längs der Geraden p der Fläche Φ wählen wir ein neues lokales Koordinatensystem, dessen Eckpunkte die Punkte $(1, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 1, v)$, $(0, 0, 0, 1)$ sind. Die Koordinaten beliebigen Punktes in diesem Koordinatensystem bezeichnen wir $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, $\bar{x}_4$. Die Transformationsgleichungen haben die Form

$$x_1 = \bar{x}_1, \quad x_2 = \bar{x}_2, \quad x_3 = \bar{x}_3, \quad x_4 = v\bar{x}_3 + \bar{x}_4.$$

Diese Relationen setzen wir in die Gleichung (9) ein. Wir finden leicht die Gleichung der Kurve, in der die Fläche K durch die Tangentenebene $\bar{x}_4 = 0$ der Fläche Φ im Punkte $y(u_0) + vz(u_0)$ durchgeschnitten ist. Die Kurve besteht aus der zweimal gerechneten Geraden p und aus dem Kegelschnitt

$$-2v\bar{x}_1^2(\beta v + \alpha) + 2\bar{x}_1\bar{x}_2(-\gamma v^2 + \alpha) + 2\bar{x}_2^2(\beta + \gamma v) =$$
$$= \bar{x}_3^2[-\alpha_{21}v^2 + v(\alpha_{22} - \alpha_{11}) + \alpha_{12}] \cdot [\alpha + 2\beta v + \gamma v^2] +$$
$$+ \bar{x}_3[\alpha' + 2\beta' v + \gamma' v^2](-v\bar{x}_1 + \bar{x}_2). \tag{9a}$$

Die Gleichung $\varphi = 0$ ist (unter Voraussetzung, daß die Parameterlinien der Fläche Φ Asymptotenlinien sind) die Gleichung der Fleknodalkurven der Fläche Φ (siehe [1], S. 58).

Wenn wir den Parameter v in der Gleichung (9a) so wählen, daß $\varphi(v) = 0$, dann zerfällt die Gleichung (9a) in

$$-v\bar{x}_1 + \bar{x}_2 = 0 \quad \text{und} \quad 2\bar{x}_1(\beta v + \alpha) + 2\bar{x}_2(\gamma v + \beta) - \bar{x}_3(\alpha' + 2\beta' v + \gamma' v^2) = 0.$$

Daraus ergibt sich: *Die fleknodalen Tangentenebenen der Fläche Φ schneiden die Fläche K immer in zwei Geraden: eine von ihnen ist die Schmiegtangente der Fläche Φ, im zugehörigen Fleknodalpunkte, die andere geht im allgemeinen nicht durch diesen Punkt.*

c) Im weiteren setzen wir voraus, daß nicht alle Parameterlinien der Fläche Φ Asymptotenlinien sind. Ferner betrachten wir eine R-Schar, die durch die Differentialgleichung (2) gegeben ist und auf der Fläche Φ liegt. Der geometrische Ort aller Punkte, in welchen die Linien der R-Schar (2) die Linien der R-Schar von Asymptotenlinien berühren, besteht aus zwei Linien, den sogenannten *Grundlinien* der R-Schar (2). Wir setzen im weiteren voraus, daß diese Linien nicht zusammenfallen.

Satz 2. *Alle R-Scharen auf der Fläche Φ mit den Grundlinien in den Linien C_y, C_z haben die Gleichung*

$$\frac{dv}{du} = \tfrac{1}{2}\beta_{21}v^2 - 2\beta(u)v - \tfrac{1}{2}\beta_{12}, \tag{10}$$

β ist eine beliebige Funktion des Parameters u.

Beweis. Die Linien der R-Schar mit der Differentialgleichung (2) berühren die Asymptotenlinien der Fläche Φ längs der Kurven

$$-\tfrac{1}{2}\beta_{12} - \tfrac{1}{2}(\beta_{22} - \beta_{11})v + \tfrac{1}{2}\beta_{21}v^2 + \alpha + 2\beta v + \gamma v^2 = 0.$$

Falls diese Linien von den Linien C_y, C_z bestehen, dann ist notwendig

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\beta_{12}, \qquad \gamma = -\tfrac{1}{2}\beta_{21}.$$

Im weiteren werden wir voraussetzen, daß die Differentialgleichung der behandelten R-Scharen in der Form (10) gegeben ist. Diese R-Scharen nennen wir $R(y, z)$-Scharen.

Der Umstand, daß wir voraussetzen, daß die Grundlinien der R-Scharen in den Linien C_y, C_z liegen, beeinträchtigt nicht die Allgemeinheit der Lösungen der angeführten Probleme.

Wenn die nicht zusammenfallenden Grundlinien der R-Schar in den Linien

$$\bar{y}(u) = \lambda_{11}(u)y(u) + \lambda_{12}(u)z(u), \qquad \bar{z}(u) = \lambda_{21}(u)y(u) + \lambda_{22}(u)z(u)$$

liegen, dann kann man bei der Untersuchung aus der Gleichungen

$$\bar{x} = \bar{y}(u) + v\bar{z}(u)$$

der Fläche Φ ausgehen.

Die Charakteristiken k der Flächen Ψ, die zur gegebenen R-Schar gehören, können immer entweder in drei Geraden oder in einen Kegelschnitt und in eine Gerade zerfallen. Im ersteren Fall nennen wir die betrachtete R-Schar *schichbildend*, im letzteren *quadratisch*.

Im schichtbildenden Falle besteht die Kurve k, die zur Geraden p der Fläche Φ gehört, aus zwei Schmiegtangenten der Fläche Φ in den Punkten, in welchen die Grundlinien der behandelten R-Schar die Gerade p durchschneiden, ein weiterer Teil der Kurve k bildet dann die Erzeugende der Fläche Ψ. Diese Gerade gehört nicht der Geradenschar Γ_1 der Fläche Ψ an.

Im quadratischen Fall besteht die Kurve k aus einer Schmiegtangente der Fläche Φ und aus einem Kegelschnitt, der diese Schmiegtangente schneidet. Weiter schneidet dieser Kegelschnitt auch die Erzeugende p der Fläche Φ. Die Schnittpunkte der eingeführten Schmiegtangente und des Kegelschnittes mit der Geraden p gehören zu den Grundlinien der R-Schar ([5], S. 5).

Satz 3. *Die Linien C_y, C_z sind allgemein Grundlinien von zwei quadratischen R-Scharen. Die Differentialgleichung dieser Scharen ist (10) mit*

$$\beta\beta_{12} = -\alpha_{12} + \tfrac{1}{2}\beta'_{12} - \tfrac{1}{2}\beta_{11}\beta_{12} \tag{11a}$$

oder

$$\beta\beta_{21} = \alpha_{21} - \tfrac{1}{2}\beta'_{21} + \tfrac{1}{2}\beta_{21}\beta_{22}. \tag{11b}$$

Beweis. Aus den Gleichungen (6), (10) und (2) finden wir leicht die Gleichungen der kubischen Kurven k, die zur $R(y, z)$-Schar gehören.

$$\begin{aligned}
x_1 &= v^2[-\alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\beta'_{21} + 3\beta\beta_{21} - \beta_{21}(\beta_{22} - \beta_{11}) - \tfrac{1}{2}\beta_{21}\beta_{11}] +\\
&\quad + v[\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\beta' - 4\beta^2 + 2\beta\beta_{22}] +\\
&\quad + [\alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\beta'_{12} + \beta\beta_{12} + \tfrac{1}{2}\beta_{12}\beta_{11}],\\
x_2 &= v^3[-\alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\beta'_{21} + \beta\beta_{21} - \tfrac{1}{2}\beta_{21}\beta_{22}] +\\
&\quad + v^2[\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\beta' + 4\beta^2 + 2\beta\beta_{11}] +\\
&\quad + v[\alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\beta'_{12} + 3\beta\beta_{12} - \beta_{12}(\beta_{22} - \beta_{11}) + \tfrac{1}{2}\beta_{12}\beta_{22}],\\
x_3 &= v[\beta_{22} - \beta_{11} - 4\beta],\\
x_4 &= v^2[\beta_{22} - \beta_{11} - 4\beta].
\end{aligned} \tag{12}$$

Wir bestimmen nun den Wert Δ der Determinante aus den Koeffizienten bei v^k $(k = 0, 1, 2, 3)$ in den Gleichungen (12).

$$\Delta = (\beta_{22} - \beta_{11} - 4\beta)^2(\alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\beta'_{12} + \beta\beta_{12} + \tfrac{1}{2}\beta_{12}\beta_{11})(-\alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\beta'_{21} + \beta\beta_{21} - \tfrac{1}{2}\beta_{21}\beta_{22}).$$

Δ ist gleich Null, die kubische Kurve zerfällt, wenn mindestens eine der folgenden drei Relationen

$$\begin{aligned} &(13a) \qquad & \alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\beta'_{12} + \beta\beta_{12} + \tfrac{1}{2}\beta_{12}\beta_{11} &= 0,\\ &(13b) & -\alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\beta'_{21} + \beta\beta_{21} - \tfrac{1}{2}\beta_{21}\beta_{22} &= 0,\\ &(13c) & \beta_{22} - \beta_{11} - 4\beta &= 0 \end{aligned}$$

gilt. Aus der Gleichung (13a) bekommen wir dann (11a), aus der Gleichung (13b) die Relation (11b). Betrachten wir nun die Gleichung (13c). Bei ihrer Gültigkeit besteht die $R(y, z)$-Schar aus den Asymptotenlinien der Fläche Φ. Wir nennen diese $R(y, z)$-Schar *asymptotisch*.

Satz 4. *Unter Voraussetzung, daß keine der Linien C_y, C_z Asymptotenlinie ist und beide nicht Fleknodallinien sind, dann und nur dann sind die Linien C_y, C_z Grundlinien von einer schichtbildenden $R(y, z)$-Schar, falls sie nach Terracini konjugiert sind.*

Beweis. Wenn die $R(y, z)$-Schar auf der Fläche Φ schichtbildend ist, dann bilden die Schmiegebenen ihrer Linien längs jeder Erzeugenden der Fläche Φ ein Ebenenbüschel (außer zwei weiteren Ebenenbüscheln mit den Büschelachsen in den Schmiegtangenten in den zugehörigen Punkten der Grundlinien).

Die Ebenenkoordinaten $\xi_i (i = 1, 2, 3, 4)$ von Schmiegebenen an die Linien der $R(y, z)$-Schar längs der Erzeugenden p der Fläche Φ finden wir durch Berechnung der Koeffizienten in der Gleichung (5). Die Größe B ersetzen wir nach (10).

$$(14) \qquad \begin{aligned} \xi_1 &= -v^2(\beta_{22} - \beta_{11} - 4\beta),\\ \xi_2 &= v(\beta_{22} - \beta_{11} - 4\beta),\\ \xi_3 &= v^3(-\alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\beta'_{21} + \beta\beta_{21} - \tfrac{1}{2}\beta_{21}\beta_{22}) +\\ &\quad + v^2(\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\beta' - 4\beta^2 + 2\beta\beta_{22}) +\\ &\quad + v(\alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\beta'_{12} - \beta\beta_{12} + \tfrac{1}{2}\beta_{12}\beta_{22}),\\ \xi_4 &= v^2(\alpha_{21} - \tfrac{1}{2}\beta'_{21} + \beta\beta_{21} + \tfrac{1}{2}\beta_{21}\beta_{11}) +\\ &\quad + v(-\alpha_{22} + \alpha_{11} + 2\beta' - 4\beta^2 - 2\beta\beta_{11}) +\\ &\quad + (-\alpha_{12} + \tfrac{1}{2}\beta'_{12} - \beta\beta_{12} - \tfrac{1}{2}\beta_{12}\beta_{11}). \end{aligned}$$

Wenn die behandelte $R(y, z)$-Schar schichtbildend ist, dann gilt

$$\xi_i = \lambda \frac{\partial \xi_i}{\partial v} + \eta \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial v^2}, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Wenn $\beta_{22} - \beta_{11} = 4\beta$ gilt, dann ist die $R(y, z)$-Schar asymptotisch, diesen Fall schließen wir aus.

Aus den Gleichungen (14) bekommen wir

$$(15) \qquad \begin{aligned} \lambda = v, \qquad \eta &= -\tfrac{1}{2}v^2,\\ -\alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\beta'_{21} + \beta\beta_{21} - \tfrac{1}{2}\beta_{21}\beta_{22} &= 0,\\ -\alpha_{12} + \tfrac{1}{2}\beta'_{12} - \beta\beta_{12} - \tfrac{1}{2}\beta_{12}\beta_{11} &= 0. \end{aligned}$$

Man kann wieder besonders erwägen, daß die zwei letzten Gleichungen (15) die gemeinsame Lösung

$$\beta = \tfrac{1}{4}(\beta_{22} - \beta_{11})$$

besitzen, das heißt, daß

$$(15a) \qquad \begin{aligned} \alpha_{12} - \tfrac{1}{2}\beta'_{12} + \tfrac{1}{4}(\beta_{22} + \beta_{11})\beta_{12} &= 0,\\ -\alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\beta'_{21} - \tfrac{1}{4}(\beta_{22} + \beta_{11})\beta_{21} &= 0 \end{aligned}$$

gilt.

Die Fleknodalkurven der Fläche Φ haben die Gleichung

$$[\alpha_{12} + (\alpha_{22} - \alpha_{11})v - \alpha_{21}v^2] - \tfrac{1}{2}[\beta'_{12} + (\beta'_{22} - \beta'_{11})v - \beta'_{21}v^2] + \\ + \tfrac{1}{4}[\beta_{12} + (\beta_{22} - \beta_{11})v - \beta_{21}v^2](\beta_{11} + \beta_{22}) = 0.$$

Man sieht dann leicht, daß bei Gültigkeit der Bedingungen (15a) die Linien C_y, C_z Fleknodallinien der Fläche Φ sind.

Setzen wir weiter $\beta_{12}\beta_{21} \neq 0$ voraus. Dann kann man die zwei letzten Gleichungen (15) in der Form

$$(16) \qquad (1/\beta_{12})[-\alpha_{12} + \tfrac{1}{2}\beta'_{12} - \tfrac{1}{2}\beta_{11}\beta_{12}] = (1/\beta_{21})[\alpha_{21} - \tfrac{1}{2}\beta'_{21} + \tfrac{1}{2}\beta_{21}\beta_{22}]$$

schreiben. Die Gleichung (16) ist nach Terracini [6] die Bedingung der Konjugierheit der Linien C_y, C_z. Den Umstand, daß zwei Grundlinien der schichtbildenden R-Schar nach Terracini konjugiert sind, bewies Klapka ([4], S. 176).

Aus Satz 3 und aus dem Beweis des Satzes 4 ist also klar, daß wenn die Linien C_y, C_z nach Terracini konjugiert sind und keine von ihnen Asymptotenlinie ist und beide nicht Fleknodalkurven auf der Fläche Φ sind, dann fallen beide quadratischen $R(y, z)$-Scharen, die durch die Relation (10) mit (11a) oder (11b) bestimmt sind, in eine schichtbildende $R(y, z)$-Schar zusammen.

Wenn die Linie C_y eine Fleknodallinie auf der Fläche Φ ist, dann gilt für β in der Gleichung (11a)

$$\beta = \tfrac{1}{4}(\beta_{22} - \beta_{11});$$

die Gleichung (10) mit β nach (11a) ist nicht die Gleichung der quadratischen $R(y, z)$-Schar, sondern die Gleichung der asymptotischen $R(y, z)$-Schar. Wenn wir umgekehrt aus der Gleichung (11a)

$$\beta = \tfrac{1}{4}(\beta_{22} - \beta_{11})$$

bekommen, dann ist die Linie C_y die Fleknodallinie der Fläche Φ.

Ähnlich, wenn die Linie C_z die Fleknodallinie der Fläche Φ ist, dann bekommen wir aus der Gleichung (11b) die Relation (13c) und die Gleichung (10) mit β nach (11b) ist die Gleichung der asymptotischen $R(y, z)$-Schar. Wenn umgekehrt aus der Gleichung (11b) die Relation (13c) folgt, dann ist C_z die Fleknodallinie der Fläche Φ. Wenn beide Linien C_y, C_z Fleknodallinien der Fläche Φ sind, dann existiert allgemein weder quadratische noch schichtbildende $R(y, z)$-Schar auf der Fläche Φ.

Setzen wir im folgenden $\beta_{12} = 0$, $\beta_{21} \neq 0$ voraus. Dann ist die Linie C_y nach (1a) eine Asymptotenlinie der Fläche Φ und nach (10) gehört C_y zu den $R(y, z)$-Scharen. Die Relationen (13a), (13b) lauten dann

$$\alpha_{12} = 0, \qquad -\alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\beta'_{21} + \beta\beta_{21} - \tfrac{1}{2}\beta_{21}\beta_{22} = 0.$$

Unter Voraussetzung $\alpha_{12} \neq 0$ existiert also nur eine $R(y, z)$-Schar, die quadratisch ist, soweit C_z keine Fleknodalkurve der Fläche Φ ist. Wen überdies C_z eine Fleknodalkurve auf der Fläche Φ ist, dann existiert keine quadratische $R(y, z)$-Schar. Wenn $\beta_{12} = \alpha_{12} = 0$, $\beta_{21} \neq 0$ gilt, dann ist C_y nach (1a) eine Gerade. Die $R(y, z)$-Scharen sind alle quadratisch mit Ausnahme der asymptotischen $R(y, z)$-Schar und der $R(y, z)$-Schar, bei der β die Lösung der Gleichung (13b) ist. Diese $R(y, z)$-Schar ist dann schichtbildend, wenn C_z keine Fleknodallinie der Fläche Φ ist. Wenn noch C_z eine Fleknodallinie der Fläche Φ ist, dann ist diese $R(y, z)$-Schar asymptotisch.

Für den Fall $\beta_{21} = 0$, $\beta_{12} \neq 0$ sind diese Betrachtungen analog.

Wenn $\beta_{12} = 0$ und gleichzeitig $\beta_{21} = 0$ ist, dann sind die Linien C_y, C_z nach (1a) Asymptotenlinien der Fläche Φ und beide gehören zu den $R(y, z)$-Scharen. Nach (11a), (11b) existiert dann allgemein weder quadratische noch schichtbildende $R(y, z)$-Schar.

Wenn aber $\beta_{12} = \beta_{21} = 0$ und gleichzeitig $\alpha_{12} = 0$, $\alpha_{21} \neq 0$ gilt, dann ist C_y eine Gerade und nach (13a) sind alle $R(y, z)$-Scharen quadratisch, nur eine von ihnen ist asymptotisch. Es existiert dann keine schichtbildende $R(y, z)$-Schar.

Der Fall $\beta_{12} = \beta_{21} = \alpha_{21} = 0$, $\alpha_{12} \neq 0$ kann man ähnlich behandelt werden. Die $R(y, z)$-Scharen enthalten dann die Gerade C_z.

Wenn $\beta_{12} = \beta_{21} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$ gilt, dann sind C_y und C_z geradlinig und gehören zu den $R(y, z)$-Scharen, nach (15) sind dann alle $R(y, z)$-Scharen schichtbildend, nur eine von ihnen ist asymptotisch.

d) Betrachten wir die Fläche Φ die durch Gleichung (1) gegeben ist. Die Differentialgleichungen der Leitlinien C_y, C_z seien (1a), die Linien C_y, C_z seien weder Asymptotenlinien noch Fleknodallinien der Fläche Φ. Dann gilt $\beta_{12}\beta_{21} \neq 0$. Weiter sei

$$\beta_{11} + \beta_{22} = 0.$$

Wenn diese Forderung, d. h. die Bedingung

$$(y, z, y', z') = konst.$$

nicht erfüllt ist, so erreichen wir ihre Gültigkeit durch entsprechende Normierung der Gleichung (1).

Ändern wir nun die parametrische R-Schar auf der Fläche Φ. Die neue parametrische R-Schar soll wieder die Linien C_y, C_z enthalten Die Gleichung der Fläche Φ ist dann

(17) $$\bar{x} = \bar{y} + \bar{v}\bar{z}, \qquad \bar{y} = \varrho(u)y, \qquad \bar{z} = \sigma(u)z.$$

Die Koeffizienten der Differentialgleichungen der Leitlinien $C_{\bar{y}}$, $C_{\bar{z}}$ bezeichnen wir durch $\bar{\beta}_{ik}$, $\bar{\alpha}_{ik}(i, k = 1, 2)$. Wenn wir die Gültigkeit der Relation

$$\bar{\beta}_{11} + \bar{\beta}_{22} = 0$$

verlangen, dann gilt nach (17)

(18) $$\sigma = k/\varrho, \qquad k = konst.$$

Gehen wir auf eine neue Parameterverteilung der Fläche Φ mittels der Gleichung $u^* = u^*(u)$ über und koppeln wir mit dieser Parametertransformation eine solche Umnormung, daß

(19) $$\beta^*_{11} + \beta^*_{22} = 0, \qquad \beta^*_{12} = 1, \qquad \beta^*_{21} = 1$$

gilt (die zugehörigen Koeffizienten der Differentialgleichungen der Leitlinien bezeichnen wir β^*_{ik}, α^*_{ik}, $i, k = 1, 2$), so bekommen wir leicht ([1], S. 53)

(20) $$\beta^*_{12} = \lambda^{-1}\bar{\beta}_{12}, \qquad \beta^*_{21} = \lambda^{-1}\bar{\beta}_{21}, \qquad \lambda(u) = \frac{du^*}{du}$$

und der zugehörige Homogenitätsfaktor ist $\lambda^{\frac{1}{2}}$. Aus den Gleichungen (20), (19) sieht man, wenn man die Relationen (17) und (18) benützt, daß die Bedingungen (19) nur dann erfüllt sind, wenn

(21) $$\varrho = k^{\frac{1}{2}}(\beta_{21}/\beta_{12})^{\frac{1}{4}}, \qquad \sigma = k^{\frac{1}{2}}(\beta_{21}/\beta_{12})^{-\frac{1}{4}}, \quad u^* = \int(\beta_{21}\beta_{12})^{\frac{1}{2}}du$$

gilt. Durch die Wahl von ϱ, σ nach (21) findet man eine besondere parametrische R-Schar, welche die Linien C_y, C_z enthält. Wir werden diese parametrische R-Schar als parametrische R-Schar von Terracini bezeichnen. A. Terracini benützt diese R-Schar bei der Untersuchung der Eingenschaften der Regelflächen.

Wir werden im weiteren voraussetzen, daß die parametrischen Linien der Fläche Φ eine parametrische R-Schar von Terracini bilden. Nach (19) gilt dann

(22) $$\beta_{11} + \beta_{22} = 0, \qquad \beta_{12} = \beta_{21} = 1.$$

Die Bedingungen (11a), (11b) haben dann die Form

$$\beta = -\alpha_{12} + \tfrac{1}{2}\beta_{22}, \tag{23a}$$
$$\beta = \alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\beta_{22} \tag{23b}$$

und die Differentialgleichungen der quadratischen $R(y, z)$-Scharen sind dann

$$v' = \tfrac{1}{2}v^2 - 2(-\alpha_{12} + \tfrac{1}{2}\beta_{22})v - \tfrac{1}{2}, \tag{24a}$$
$$v' = \tfrac{1}{2}v^2 - 2(\alpha_{21} + \tfrac{1}{2}\beta_{22})v - \tfrac{1}{2}. \tag{24b}$$

Die Bedingung der Konjugierheit von Linien C_y, C_z lautet unter Voraussetzung (22)

$$\alpha_{12} + \alpha_{21} = 0. \tag{25}$$

Im weiteren werden wir voraussetzen, daß die Linien C_y, C_z nicht konjugiert nach Terracini sind, die Relation (25) gilt also nicht.

Aus den Gleichungen (22), (24), (12) finden wir leicht die Gleichungen der Kegelschnitte, die zu den Charakteristiken der zur quadratischen $R(y, z)$-Scharen gehörenden Flächen Ψ gehören.

(26a)

$$\begin{aligned}
x_1 &= v[-\alpha_{21} - 3\alpha_{12}] + [\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} - 4\alpha_{12}^2 + 2\alpha_{12}\beta_{22}],\\
x_2 &= v^2[-\alpha_{21} - \alpha_{12}] + v[\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} + 4\alpha_{12}^2 - 2\alpha_{12}\beta_{22}] - 2\alpha_{12},\\
x_3 &= 4\alpha_{12},\\
x_4 &= 4v\alpha_{12},
\end{aligned}$$

(26b)

$$\begin{aligned}
x_1 &= v^2[2\alpha_{21}] + v[\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} - 4\alpha_{21}^2 - 2\alpha_{21}\beta_{22}] + [\alpha_{12} + \alpha_{21}],\\
x_2 &= v^2[\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} + 4\alpha_{21}^2 + 2\alpha_{21}\beta_{22}] + v[\alpha_{12} + 3\alpha_{21}],\\
x_3 &= -4v\alpha_{21},\\
x_4 &= -4v^2\alpha_{21}.
\end{aligned}$$

Durch die Gleichungen (26a), (26b) sind zwei einparametrische Scharen von Kegelschnitten $k_1(u)$, $k_2(u)$, d. h. zwei Kegelschnittflächen, bestimmt. Die Parameter der beiden Flächen in den Gleichungen (26a), (26b) sind u, v.

Wenn wir in die Gleichungen (26a), (26b) für u einen bestimmten Wert u_0 einsetzen, dann finden wir auf diesen Flächen zwei Kegelschnitte $k_1(u_0)$, $k_2(u_0)$. Diese Kegelschnitte liegen auf den Berührquadriken Ψ, die zu den quadratischen $R(y, z)$-Scharen gehören und die Fläche Φ längs der Geraden p $(u = u_0)$ berühren. Die Kurve $k_1(u_0)$ geht durch den Punkt $z(u_0)$, die Kurve $k_2(u_0)$ durch den Punkt $y(u_0)$.

Weiter werden wir die Lokaleigenschaften der quadratischen R-Scharen längs der Geraden p $(u = u_0)$ der Fläche Φ betrachten. Soweit wir nichts anderes voraussetzen werden, dann wird der Parameter u einen konstanten Wert besitzen.

Durch einen beliebigen Punkt A der Geraden p konstruiren wir die Tangenten der Linien der beiden quadratischen $R(y, z)$-Scharen, die durch diesen Punkt durchgehen. Die Verbindungsgerade der Durchschnitte dieser Geraden mit den zugehörigen Kurven $k_1(u_0)$, $k_2(u_0)$ bezeichnen wir als Gerade m. Wenn wir alle Lagen des Punktes A auf der Geraden p betrachten, dann bilden alle Geraden m eine Regelfläche Q.

Satz 5. *Die Fläche Q ist allgemein von vierter Ordnung neunter Art nach Sturm.*

Beweis. Die Geraden m sind die Verbindungslinien der Punkte von zwei projektiven Reihen auf zwei Kegelschnitten $k_1(u_0)$, $k_2(u_0)$. Die Fläche Q ist also allgemein von vierter Ordnung. Jede von ihren Erzeugenden geht durch zwei Punkte, die Koordinaten dieser Punkte genügen den Gleichungen (26a), (26b) für die gleichen Werte des Parameters v. Die Geraden m liegen in den Tangentenebenen der Fläche Φ längs der Geraden p, sie schneiden also die Gerade p in den Punkten $y + s(v)z$.

Wir finden nun die Abhängigkeit zwischen den Parametern s, v. Nach (26a), (26b) gilt

$$\begin{aligned}
y + sz = {}& \lambda_1\{y[v(-\alpha_{21} - 3\alpha_{12}) + (\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} - 4\alpha_{12}^2 + 2\alpha_{12}\beta_{22})] +\\
&+ z[v^2(-\alpha_{21} - \alpha_{12}) + v(\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} + 4\alpha_{12}^2 - 2\alpha_{12}\beta_{22}) + (-2\alpha_{12})] +\\
&+ y'[4\alpha_{12}] + z'[4v\alpha_{12}]\} +\\
&+ \lambda_2\{y[v^2(2\alpha_{21}) + v(\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} - 4\alpha_{21}^2 - 2\alpha_{21}\beta_{22}) + (\alpha_{12} + \alpha_{21})] +\\
&+ z[v^2(\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} + 4\alpha_{21}^2 + 2\alpha_{21}\beta_{22}) + v(\alpha_{12} + 3\alpha_{21})] +\\
&+ y'[-4v\alpha_{21}] + z'[-4v^2\alpha_{21}]\}.
\end{aligned}$$

Durch Vergleich der Koeffizienten bei y, z, y', z' in dieser Gleichung und durch Ausschließen von λ_1, λ_2 aus den gefundenen Gleichungen, bekommen wir folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}
& s\{v^2[\alpha_{21}(-\alpha_{21} - \alpha_{12})] +\\
&+ v[(\alpha_{21} + \alpha_{12})(\alpha_{22} - \alpha_{11} - \beta'_{22}) + 2\alpha'_{12}\alpha_{21} - 2\alpha_{12}\alpha'_{21} -\\
&- 4\alpha_{12}\alpha_{21}(\alpha_{12} + \alpha_{21})] + \alpha_{12}(\alpha_{21} + \alpha_{12})\} =\\
&= v^3[\alpha_{21}(-\alpha_{21} - \alpha_{12}) +\\
&+ v^2[(\alpha_{21} + \alpha_{12})(\alpha_{22} - \alpha_{11} - \beta'_{22}) + 2\alpha'_{12}\alpha_{21} - 2\alpha_{12}\alpha'_{21} +\\
&+ 4\alpha_{12}\alpha_{21}(\alpha_{12} + \alpha_{21})] + v[\alpha_{12}(\alpha_{21} + \alpha_{12})].
\end{aligned} \tag{27}$$

Durch jeden Punkt der Geraden p der Fläche Φ gehen allgemein drei Geraden m der Fläche Q. Diese Geraden liegen in den Tangentenebenen der Fläche Φ längs der Geraden p. Die behandelten drei Geraden gehen durch drei verschiedene Punkte des regulären Kegelschnittes $k_1(u_0)$ und können nicht in einer Ebene liegen. Die Gerade p ist also eine dreifache Gerade der Fläche Q und die Fläche Q ist von neunter Art nach Sturm (Kadeřávek—Klíma—Kounovský [3], S. 740).

e) Im weiteren werden wir wieder voraussetzen, daß der Parameter u in den Gleichungen (26a), (26b) alle möglichen Werte annimmt. Aus den Gleichungen (26a), (26b) bekommen wir leicht die Gleichungen der Ebenen in denen die Kegelschnitte $k_1(u)$, $k_2(u)$ liegen. Es genügt, wenn wir in die allgemeine Gleichung der Ebene nach (26a) und (26b) einsetzen und die Koeffizienten in den gefundenen Gleichungen so bestimmen, daß sie von dem Parameter v nicht abhängen. Wir bekommen dann:

$$(28a)\quad -4\alpha_{12}x_1 + x_3[\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} - 4\alpha^2_{12} + 2\alpha_{12}\beta_{22}] + x_4[-\alpha_{21} - 3\alpha_{12}] = 0,$$

$$(28b)\quad 4\alpha_{21}x_2 + x_3[\alpha_{12} + 3\alpha_{21}] + x_4[\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} + 4\alpha^2_{21} + 2\alpha_{21}\beta_{22}] = 0.$$

(28a) und (28b) sind Gleichungen der Ebenen der Kegelschnitte, die zu den quadratischen $R(y, z)$-Scharen und allen Geraden p der Fläche Φ gehören. Bezeichnen wir weiter durch $n(y, z)$ die Schnittgerade der Ebenen der Kegelschnitte, die immer zu dem gleichen Werte des Parameters u gehören. Wenn wir alle Werte des Parameters u betrachten, dann bilden die Geraden $n(y, z)$ eine Regelfläche.

Die Plückerischen Koordinaten der Geraden $n(y, z)$ sind

$$(29)\quad \begin{aligned} p^{34} &= p_{12} = -16\alpha_{12}\alpha_{21}, \\ -p^{24} &= p_{13} = -4\alpha_{12}(\alpha_{12} + 3\alpha_{21}), \\ p^{23} &= p_{14} = -4\alpha_{12}(\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} + 4\alpha^2_{21} + 2\alpha_{21}\beta_{22}), \\ p^{14} &= p_{23} = -4\alpha_{21}(\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} - 4\alpha^2_{12} + 2\alpha_{12}\beta_{22}), \\ p^{31} &= p_{24} = -4\alpha_{21}(-\alpha_{21} - 3\alpha_{12}), \\ p^{12} &= p_{34} = (\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} - 4\alpha^2_{12} + 2\alpha_{12}\beta_{22}) \,. \\ &\quad \cdot (\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} + 4\alpha^2_{21} + 2\alpha_{21}\beta_{22}) - \\ &\quad - (\alpha_{12} + 3\alpha_{21}) \,.\, (-\alpha_{21} - 3\alpha_{12}). \end{aligned}$$

(Bezeichnung nach Hlavatý [2], S. 4, 8.)

Auf der Fläche Φ betrachten wir eine R-Schar mit der folgenden Eigenschaft: Jede der zur R-Schar gehörigen Quadriken Ψ geht durch die Gerade p der Fläche Φ und durch die Gerade $n(y, z)$ die zum gleichen Wert des Parameters u wie die Gerade p gehört. Eine solche R-Schar bezeichnen wir als $R(n, y, z)$-Schar.

Die Plückerischen Koordinaten der Tangenten an die Linien der R-Schar auf der Fläche Φ sind

$$(30)\quad q^{12} = v', \quad q^{13} = 1, \quad q^{14} = v, \quad q^{23} = v, \quad q^{24} = v^2, \quad q^{34} = 0.$$

wobei v' eine quadratische Form in v ist.

Aus den Gleichungen (29) und (30) geht die Bedingung hervor, daß die Tangenten beim festen Wert des Parameter u die zugehörigen Geraden $n(y, z)$ stets durchschneiden.

$$(31)\quad \begin{aligned} &-4\alpha_{12}\alpha_{21}v' - \alpha_{21}(-\alpha_{21} - 3\alpha_{12})v^2 + v[-\alpha_{21}(\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} - \\ &-4\alpha^2_{12} + 2\alpha_{12}\beta_{22}) - \alpha_{12}(\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} + 4\alpha^2_{21} + 2\alpha_{21}\beta_{22})] - \\ &-\alpha_{12}(\alpha_{12} + 3\alpha_{21}) = 0. \end{aligned}$$

Wenn wir betrachten, daß u sich ändert, dann ist (31) die Gleichung der $R(n, y, z)$-Schar.

Die Gleichungen der Schmiegebenen der quadratischen $R(y, z)$-Scharen auf der Fläche Φ bekommen wir leicht aus der Gleichung (14), wo wir β nach (23a) und (23b) einsetzen; unter Benützung der Relationen (22) folgt:

(32a)

$$\begin{aligned} &x_1[-4\alpha_{12}v] + x_2[4\alpha_{12}] + \\ &+x_3[v^2(-\alpha_{12} - \alpha_{21}) + v(\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} - 4\alpha^2_{12} + 2\alpha_{12}\beta_{22}) + 2\alpha_{12}] + \\ &+ x_4[v(-\alpha_{12} + \alpha_{21}) + (-\alpha_{22} + \alpha_{11} - 2\alpha'_{12} + \beta'_{22} - 4\alpha^2_{12} + 2\alpha_{12}\beta_{22})] = 0, \end{aligned}$$

(32b)

$$\begin{aligned} &x_1[4\alpha_{21}v^2] + x_2[-4\alpha_{21}v] + \\ &+x_3[v^2(\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} - 4\alpha^2_{21} - 2\alpha_{21}\beta_{22}) + v(\alpha_{12} - \alpha_{21})] + \\ &+ x_4[v^2(2\alpha_{21}) + v(-\alpha_{22} + \alpha_{11} + 2\alpha'_{21} + \beta'_{22} - 4\alpha^2_{21} - \\ &- 2\alpha_{21}\beta_{22}) + (-\alpha_{12} - \alpha_{21})] = 0. \end{aligned}$$

Diese Ebenen längs der Geraden p der Fläche Φ hüllen zwei Kegel mit den Spitzen V_1, V_2

$$(33a)\quad (-\alpha_{12} + \alpha_{21})y + (\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} + 4\alpha^2_{12} - 2\alpha_{12}\beta_{22})z + 4\alpha_{12}z',$$

$$(33b)\quad (\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} - 4\alpha^2_{21} - 2\alpha_{21}\beta_{22})y + (-\alpha_{12} + \alpha_{21})z - 4\alpha_{21}y'$$

ein.

Die Verbindungsgerade dieser Spitzen bezeichnen wir $\bar{n}(y, z)$. Wenn wir alle Lagen der Geraden p auf der Fläche Φ betrachten, dann bilden die Spitzen V_1, V_2 dieser Kegel zwei Linien und ihre Verbindungsgeraden bilden dann eine Regelfläche.

Auf der Fläche Φ betrachten wir eine R-Schar mit der folgenden Eigenschaft: Jede der zur R-Schar zugehörige Quadrik Ψ geht durch die Gerade p der Fläche Φ und durch die Gerade $\bar{n}(y, z)$, die zum gleichen Werte des Parameters u wie die Gerade p gehört. Solche R-Schar bezeichnen wir als $R(\bar{n}, y, z)$-Schar.

Die Plückerischen Koordinaten der Linien $\bar{n}(y, z)$ sind dann:

$$(34)\quad \begin{aligned} p^{12} &= (-\alpha_{12} + \alpha_{21})^2 - (\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} + 4\alpha^2_{12} - 2\alpha_{12}\beta_{22}) \,. \\ &\quad . (\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} - 4\alpha^2_{21} - 2\alpha_{21}\beta_{22}), \\ p^{13} &= -4\alpha_{21}(-\alpha_{12} + \alpha_{21}), \\ p^{14} &= -4\alpha_{12}(\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} - 4\alpha^2_{21} - 2\alpha_{21}\beta_{22}), \\ p^{23} &= -4\alpha_{21}(\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} + 4\alpha^2_{12} - 2\alpha_{12}\beta_{22}), \\ p^{24} &= -4\alpha_{12}(-\alpha_{12} + \alpha_{21}), \\ p^{34} &= 16\alpha_{12}\alpha_{21}. \end{aligned}$$

Aus den Relationen (30) und (34) bekommen wir leicht die Bedingung, daß die Tangenten an die Linien der R-Schar für einen festen Wert des Parameters u die zugehörige Gerade $\bar{n}(y, z)$ stets schneiden.

$$(35)\quad 4\alpha_{12}\alpha_{21}v' + \alpha_{21}(-\alpha_{12} + \alpha_{21})v^2 + v[-\alpha_{12}(\alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22} - 4\alpha^2_{21} - 2\alpha_{21}\beta_{22}) - \alpha_{21}(\alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22} + 4\alpha^2_{12} - 2\alpha_{12}\beta_{22})] + \alpha_{12}(-\alpha_{12} + \alpha_{21}) = 0.$$

Wenn wir betrachten daß u sich ändert, dann ist (35) die Gleichung der $R(\bar{n}, y, z)$-Schar.

Die quadratische $R(y, z)$-Schar mit β nach (24a) bezeichnen wir mit $R_1(y, z)$. Ähnlich bezeichnen wir die quadratische $R(y, z)$-Schar mit β nach (24b) mit $R_2(y, z)$.

Satz 6. *Die Berührpunkte der Linien der $R(n, y, z)$-Schar und der $R_1(y, z)$-Schar liegen allgemein auf zwei Linien, die mit dem geometrischen Ort der Berührpunkte der Linien der $R(\bar{n}, y, z)$-Schar und $R_2(y, z)$-Schar zusammenfallen. Ähnlich liegen die Berührpunkte der Linien der $R(n, y, z)$-und $R_2(y, z)$-Scharen allgemein auf zwei Linien, diese Linien fallen mit dem geometrischen Ort der Berührpunkte der Linien der $R(\bar{n}, y, z)$-und $R_1(y, z)$-Scharen zusammen. Beide angeführten Paare gehören einer Involution, die durch die Linien C_y, C_z und durch die Fleknodalkurven der Fläche Φ bestimmt ist.*

Beweis. Aus den Gleichungen (31) und (24a) bekommen wir leicht die Gleichung der Linien, in deren Punkten die Linien der $R(n, y, z)$-Schar die Linien der $R_1(y, z)$-Schar berühren.

$$(36)\quad v^2\alpha_{21}(\alpha_{12} + \alpha_{21}) + v(-A_{12}\alpha_{21} - A_{21}\alpha_{12} - 4\alpha^2_{12}\alpha_{21} - 4\alpha_{12}\alpha^2_{21}) + \alpha_{12}(-\alpha_{12} - \alpha_{21}) = 0.$$

In der Gleichung (36) wird folgende Bezeichnung benützt:

$$(37)\quad \begin{aligned} A_{12} &= \alpha_{22} - \alpha_{11} + 2\alpha'_{12} - \beta'_{22}, \\ A_{21} &= \alpha_{22} - \alpha_{11} - 2\alpha'_{21} - \beta'_{22}. \end{aligned}$$

Ähnlich bekommen wir aus (31) und (24b) die Gleichung der Linien, in deren Punkten die Linien der $R(n, y, z)$-Schar die Linien der $R_2(y, z)$-Schar berühren.

$$(38)\quad v^2\alpha_{21}(\alpha_{12} + \alpha_{21}) + v(-A_{12}\alpha_{21} - A_{21}\alpha_{12} + 4\alpha^2_{12}\alpha_{21} + 4\alpha_{12}\alpha^2_{21}) + \alpha_{12}(-\alpha_{12} - \alpha_{21}) = 0.$$

Der geometrische Ort der Berührpunkte der Linien der $R(\bar{n}, y, z)$- und $R_1(y, z)$-Scharen genügt nach (35) und (24a) folgender Gleichung

$$(39)\quad v^2\alpha_{21}(-\alpha_{12} - \alpha_{21}) + v(A_{12}\alpha_{21} + A_{21}\alpha_{12} - 4\alpha^2_{12}\alpha_{21} - 4\alpha_{12}\alpha^2_{21}) + \alpha_{12}(\alpha_{12} + \alpha_{21}) = 0.$$

Ähnlich hat der geometrische Ort der Berührpunkte der Linien der $R(\bar{n}, y, z)$- und der $R_2(y, z)$-Scharen nach (35) und (24b) folgende Gleichung

$$(40)\quad v^2\alpha_{21}(-\alpha_{12} - \alpha_{21}) + v(A_{12}\alpha_{21} + A_{21}\alpha_{12} + 4\alpha^2_{12}\alpha_{21} + 4\alpha_{12}\alpha^2_{21}) + \alpha_{12}(\alpha_{12} + \alpha_{21}) = 0.$$

Die Paare von Linien (36), (40) sind gleich, analog sind gleich die Paare (38) und (39).

Die quadratische Form

$$-\alpha_{21}v^2 + [\alpha_{22} - \alpha_{11} - \beta'_{22}]v + \alpha_{12} = 0$$

ist die Fleknodalform der Fläche Φ (unter Voraussetzung von (22)); weiter können wir die Gleichung $2v = 0$ als Gleichung der Paare von Linien C_y, C_z betrachten ([5], S. 11).

Die Gleichung (40) kann man in der Form

$$\{v^2(-\alpha_{21}) + v(\alpha_{22} - \alpha_{11} - \beta'_{22}) + \alpha_{12}\}(\alpha_{12} + \alpha_{21}) + 2v\{\alpha_{21}\alpha'_{12} - \alpha_{12}\alpha'_{21} + 2\alpha_{12}\alpha_{21}(\alpha_{12} + \alpha_{21})\} = 0$$

schreiben, ähnlich kann die Gleichung (39) wieder in der Form

$$\{v^2(-\alpha_{21}) + v(\alpha_{22} - \alpha_{11} - \beta'_{22}) + \alpha_{12}\}(\alpha_{12} + \alpha_{21}) + 2v\{\alpha_{21}\alpha'_{12} - \alpha_{12}\alpha'_{21} - 2\alpha_{12}\alpha_{21}(\alpha_{12} + \alpha_{21})\} = 0$$

geschrieben werden.

Betrachten wir eine beliebige Erzeugende p ($u = u_0$) der Fläche Φ. Zu dieser Erzeugenden und zu den Leitlinien C_y, C_z gehören zwei Kegelschnitte $k_1(u_0)$, $k_2(u_0)$ in den Ebenen ε_1, ε_2. Die Schmiegebenen der Linien der $R_1(y, z)$-Schar längs der Erzeugenden p hüllen einen Kegel mit der Spitze $V_1(u_0)$ (33a) ein, seine Grundlinie ist $k_1(u_0)$. Die Schmiegebenen der Linien der $R_2(y, z)$-Schar längs der Geraden p hüllen ebenfalls einen Kegel ein, seine Spitze ist der Punkt $V_2(u_0)$ (33b). Die Kurve $k_1(u_0)$ schneidet die Schnittgerade der Ebenen ε_1, ε_2 in den Punkten M, $\bar{M}$, durch diese Punkte gehen dann die gemeinsamen Tangenten die Linien der $R_1(y, z)$-Schar und $R(n, y, z)$-Schar in den Punkten N, $\bar{N}$ der Geraden p.

Nach Satz 6 gehen aber durch diese Punkte die gemeinsamen Tangenten an die Linien der $R_2(y, z)$-Schar und der $R(\bar{n}, y, z)$-Schar, diese Tangenten müssen in den zugehörigen Schmiegebenen der Linien der $R_2(y, z)$-Schar liegen, diese Ebenen enthalten die Verbindungsgerade von $V_1(u_0)$ und $V_2(u_0)$.

LITERATUR

[1] Barner M., *Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen*, Math. Zeitschr. *62* (1955), 50—93.

[2] Hlavatý V., *Přímková diferenciální geometrie*, Praha 1941.

[3] Kadeřávek F., Klíma J., Kounovský J., *Deskriptivní geometrie II*, Praha 1954.

[4] Klapka J., *Über Paare von konjugierten Kurven einer Regelfläche*, Publ. Fac. Sc. Brno *393* (1958), 161—188.

[5] Mayer O., *Études sur les surfaces réglées*, Bul. fac. şt. Cernăuti *2* (1928), 1—33.

[6] Terracini A., *Direttrici congiunte di una rigata*, Rendiconti Sem. Mat. Torino *9* (1949—1950), 325—342.

Eingegangen am 12. 3. 1964.

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie stavební fakulty Vysokého učení technického, Brno

СПЕЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ РИККАТИ

Иосеф Вала

Резюме

Система Риккати (R-система) линий на линейчатой неразвертывающейся иоверхности Φ

$$x = y(u) + vz(u)$$

является системой

$$v' + \alpha(u) + 2\beta(u)v + \gamma(u)v^2 = 0,$$

где $\alpha(u)$, $\beta(u)$, $\gamma(u)$ заданные функции от переменного u. Линии R-системы касаются линий асимптотической системы в точках главных линий заданной системы R.

Исследуются свойства этих R-систем, которые имеют главные линии в линиях C_y, C_z. Эти системы называют системами $R(y, z)$. Если линии C_y, C_z не асимптотические и не флекнодальные, то существуют вообще две квадратичные системы $R(y, z)$. Аксиальные системы $R(y, z)$ существуют только в том случае, если C_y, C_z являются сопряженными по Террачини (Terracini). Кроме того исследуются локальные свойства квадратичных систем $R(y, z)$ вдоль образующей p поверхности Φ. Далее исследуются свойства изогональных систем R на поверхности Φ.