O MNOHOSTENOCH BEZ OPÍSANEJ GUĽOVEJ PLOCHY

ERNEST JUCOVIČ, Prešov

Schlegelov obrazec je taký stredový priemet konvexného mnohostena s vrcholmi $A_1, A_2, \ldots A_v$ na jeho stenu $A_{a_1}A_{a_2} \ldots A_{a_n}$, $a_i \leqq v$, že obrazy všetkých vrcholov A_{b_j}, $b_j \neq a_i$, sú vnútorné body mnohouholníka $A_{a_1} \ldots A_{a_n}$. Schlegelov obrazec, resp. konvexný mnohosten je *autokonjugovaný*, ak existuje vzájomne jednoznačné priradenie jeho vrcholov k stenám (oblastiam), ktoré zachováva incidenciu. Pod *typom* Schlegelovho obrazca, resp. konvexného mnohostena si myslíme triedu navzájom izomorfných (v kombinatorickom zmysle) Schlegelových obrazcov, resp. konvexných mnohostenov. (Pozri [2].)

Vo svojej práci [1] sa B. Grünbaum zaoberá týmito typmi Schlegelových obrazcov a konvexných mnohostenov:

A. Žiadny Schlegelov obrazec, resp. konvexný mnohosten daného typu nie je taký, aby všetkým jeho stenám bolo možné opísať kružnicu. — O týchto typoch povieme stručnejšie, že *sú bez opísaných kružníc.*

B. Žiadnemu konvexnému mnohostenu daného typu nie je možné opísať guľovú plochu. — O týchto typoch konvexných mnohostenov povieme stručnejšie, že *sú bez opísanej guľovej plochy.*

V [1] sú uvedené konštrukcie pre celé série typov Schlegelových obrazcov s vlastnosťou A. a konvexných mnohostenov s vlastnosťami A. i B. V našich poznámkach sa zaoberáme otázkou najmenšieho počtu stien Schlegelovho obrazca bez opísaných kružníc a konvexného mnohostena bez opísanej guľovej plochy.

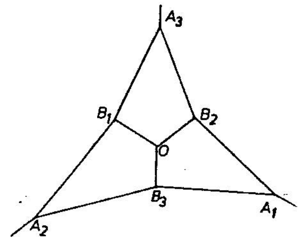
Veta 1. *O minimálnom počte s_0 stien typu Schlegelovho obrazca bez opísaných kružníc platí $s_0 = 7$.*

Veta 2. *O minimálnom počte s_0 stien typu konvexného mnohostena bez opísanej guľovej plochy platí $s_0 = 7$.*

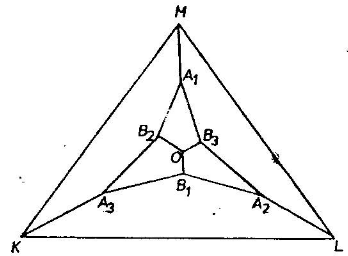
Nahraďme vrchol A_3 Schlegelovho obrazca príslušného k štvorstenu $KLMA_3$ konfiguráciou na obr. 1, v ktorej vrcholy A_i, B_i sú tretieho stupňa, $i = 1, 2, 3$. Dostaneme Schlegelov obrazec G^1 so stenami KLM, $KLA_2B_1A_3$, $LA_2B_3A_1M$, $A_2B_1OB_3$, $OB_1A_3B_2$, $A_3B_2A_1MK$, $A_1B_3OB_2$, o ktorom dokážeme, že je bez opísaných kružníc. Pokiaľ ide o podstavnú stenu, sú tieto tri možnosti: podstavou je a) trojuholník KML, b) jeden zo štvoruholníkov, napr. $OB_3A_2B_1$, c) jeden z päťuholníkov, napr. $KLA_2B_1A_3$.

a) Obr. 2. V tomto prípade je G^1 bez opísaných kružníc na základe nasledujúceho tvrdenia Grünbauma [1]: Ak Schlegelov obrazec obsahuje konfiguráciu na obr. 1, pričom vrcholy tretieho stupňa O, A_i, B_i, $i = 1, 2, 3$, neincidujú s podstavou, potom je bez opísaných kružníc.

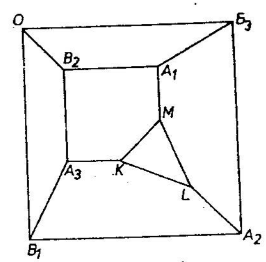
b) Použijeme túto Miquelovu vetu (pozri Coolidge [3]): Ak štyri kružnice k_1, k_2, k_3, k_4 sú umiestnené v rovine tak, že kružnica k_i s kružnicou k_{i+1}, $i = 1, 2, 3$, a tiež kružnice k_1 a k_4 sa pretínajú, pričom existuje kružnica obsahujúca vždy jeden priesečník každej z týchto dvojíc kružníc, potom zvyšné priesečníky daných dvojíc kružníc ležia na kružnici alebo priamke.



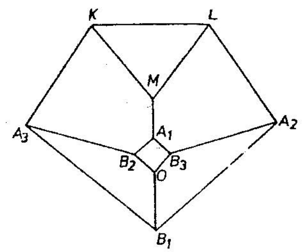
Obr. 1.



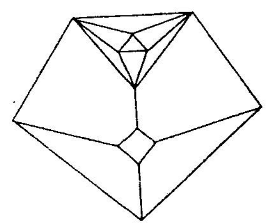
Obr. 2.



Obr. 3.



Obr. 4.


Obr. 5.

Pozri obr. 3. Nech existujú kružnice opísané stenám $B_1A_2LKA_3$, $A_2B_3A_1ML$, $A_1B_3OB_2$, $B_2OB_1A_3$, $B_1A_2B_3O$. Podľa Miquelovej vety existuje potom kružnica, prechádzajúca bodmi $B_2A_3LA_1$. (Vzhľadom na konštrukciu Schlegelovho obrazca neležia tieto body na priamke.) Táto bodmi M, K neprechádza, lebo v opačnom prípade by splynuli všetky kružnice opísané stenám daného Schlegelovho obrazca, — čo nie je možné. — Teda G^1 v tomto prípade je bez opísaných kružníc.

Tabuľka 1

ABC, ABE, *CAE, BCD,* *CDE, BDE*	$A\,[0;\,-1;\,0]$, $\quad B\,[-1;\,0;\,0]$, $C\,[1;\,0;\,0]$, $\quad D\,[0;\,1;\,1]$, $E\left[0;\ \frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
ABFC, *CFDE,* *FDB, BDE,* *ABE, ACE*	$A\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2};\ 0\right]$, $B\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2};\ 0\right]$, $C\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ 0\right]$ $D\left[\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $E\left[-\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$, $F\left[\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ 0\right]$
ABEKF, *BCDHE,* *ABC,* *AFDC,* *FDHK,* *HKE*	$A\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2};\ 0\right]$, $\quad B\,[0;\,1;\,0]$, $E\,[1;\,0;\,0]$, $C\left[\frac{4\sqrt{3}-3}{13};\ \frac{9+\sqrt{3}}{13};\ \frac{1+3\sqrt{3}}{13}\right]$, $\quad D\,[0;\,0;\,1]$, $F\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2};\ 0\right]$, $H\left[\frac{9-\sqrt{3}}{13};\ \frac{1-3\sqrt{3}}{13};\ \frac{3+4\sqrt{3}}{13}\right]$, $K\left[\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0\right]$
ACFG, *AGBE,* *BGFD,* *CFDE,* *AEC, BDE*	$A\left[-\frac{5+\sqrt{46}}{36+5\sqrt{46}};\ \frac{35+5\sqrt{46}}{36+5\sqrt{46}};\ 0\right]$, $\quad B\left[\frac{1}{2};\ -\frac{1}{3};\ \frac{\sqrt{23}}{6}\right]$, $C\,[0;\,1;\,0]$, $\quad D\left[\frac{46}{47};\ \frac{1}{47};\ \frac{23\sqrt{23}}{47}\right]$, $F\,[1;\,0;\,0]$, $E\left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $G\,[0;\,-1;\,0]$
ABKFC, *ABE,* *BEDK,* *DKF,* *FDEC,* *ECA*	$C\,[0;\,1;\,0]$, $F\,[1;\,0;\,0]$, $K\left[\frac{1}{2};\ -\frac{\sqrt{3}}{2};\ 0\right]$, $E\left[\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, $B\left[-\frac{1}{2};\ \frac{-\sqrt{3}}{2};\ 0\right]$, $A\left[-\frac{\sqrt{3}}{2};\ -\frac{1}{2};\ 0\right]$, $D\left[\frac{11+6\sqrt{3}}{26};\ \frac{15-6\sqrt{3}}{26};\ \frac{9+5\sqrt{3}}{7\sqrt{6}+11\sqrt{2}}\right]$

c) Pozri obr. 4. Úsudok je analogický k úsudku ad b). Tým máme dokázané, že G^1 je bez opísaných kružníc.

B. Grünbaum ukázal, že ku G^1 prislúchajúci konvexný mnohosten G_0^1 je tiež bez opísaných kružníc. To ale znamená, že G_0^1 je bez opísanej guľovej plochy. Z druhej strany dajú sa zostrojiť konvexné mnohosteny všetkých typov so 4, 5, 6 stenami také, že je možné im opísať guľovú plochu. — Pomocou stereografickej projekcie je potom možné k týmto konvexným mnohostenom zostrojiť také Schlegelove obrazce, že všetkým ich stenám je možné opísať kružnice. V tabuľke 1 sú tieto konvexné mnohosteny zostrojené. V prvom stĺpci sú označené steny, v druhom súradnice vrcholov príslušných konvexných mnohostenov. Celkom triviálne sú tieto konštrukcie pre mnohosteny typov ihlana a hranola; neuvádzame ich.

Tým sú vety 1 a 2 dokázané.

Dôsledok. *O minimálnom počte s_0 stien autokonjugovaného Schlegelovho obrazca bez opísaných kružníc a autokonjugovaného konvexného mnohostena bez opísanej guľovej plochy platí $s_0 \leqq 13$.*

Nahradenie vrchola A_3 konfiguráciou na obr. 1 je možné vykonať aj postupným niekoľkonásobným štiepením stien daného štvorstena. Ak k týmto štiepeniam stien vykonáme konjugované štiepenia vrcholov, dostaneme autokonjugovaný Schlegelov obrazec G^2 na obr. 5 (O uvedenej konštrukcii autokonjugovaných mnohostenov pozri [2].) G^2 je bez opísaných kružníc, lebo v opačnom prípade by ani G^1 nebol bez opísaných kružníc. — Ku G^2 prislúchajúci konvexný mnohosten G_0^2 je bez opísanej guľovej plochy, lebo z existencie takej guľovej plochy by vyplynula existencia guľovej plochy opísanej konvexnému mnohostenu G_0^1, a ďalej spor s Grünbaumovým tvrdením, že G_0^1 je bez opísaných kružníc.

Vynárajú sa problémy: Ak G je typ Schlegelovho obrazca, resp. konvexného mnohostena, potom rôzne Schlegelove obrazce, resp. konvexné mnohosteny typu G majú rôzne počty stien, ktorým nie je možné opísať kružnicu; označme $f(G)$ najmenší počet takých stien. Čomu sa rovná $f(n) = \max f(G)$, ak G prebieha všetky Schlegelove obrazce, resp. konvexné mnohosteny s n a) stenami, b) vrcholmi?

LITERATÚRA

[1] Grünbaum B., *On Steinitz's Theorem about non-inscribable Polyhedra*, Indag. Math. *25* (1963), 452—455.
[2] Jucovič E., *Самосопряженные К-полиэдры*, Matematicko-fyzikálny časopis *12* (1962), 1—22.
[3] Coolidge J. L., *A treatise on the circle and the sphere*, Oxford 1916.

Došlo 9. 1. 1964.

Katedra matematiky
Pedagogickej fakulty
Univerzity P. J. Šafárika,
Prešov

ON NON-INSCRIBABLE POLYHEDRA

Ernest Jucovič

Summary

The smallest number of faces of a convex polyhedron in E^3 which a) has no realization with circumcircles, b) is of a non-inscribable type, is 7.