MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 15, 1, 1965

ELEMENTÁRNÍ PROSTOROVÉ URČENÍ OSKULAČNÍCH KRUŽNIC KUŽELOSEČEK I

ALOIS URBAN, Praha

1. ÚVOD

Pro sestrojení oskulační kružnice kuželosečky je známá celá řada konstrukcí, které jsou odvozeny nejrůznějšími metodami. Nejznámější z nich se opírají o analytický aparát (Bydžovský, [1], str. 214—217), o Steinerovu—Pelzovu parabolu (Kadeřávek—Klíma—Kounovský, [4], I., str. 50—53), o Weyrovu větu (Hlavatý, [3], str. 276—278) a o homotetii (Kadeřávek—Klíma—Kounovský, [4], I., str. 80—81), tedy vesměs o věty rovinné geometrie. Jsou však také známy konstrukce, které vycházejí z prostorové geometrie a které např. užívají řezů kuželové plochy nebo Meusnierovy věty (Kadeřávek—Klíma—Kounovský, [4], II., str. 565). Do této skupiny konstrukcí, lépe řečeno důkazů známých konstrukcí oskulačních kružnic kuželoseček, je možno zařadit i jiné metody. Jedna z nich se opírá o věty týkající se zvyšování styku křivek promítáním, druhá o průniky speciálních kvadratických ploch.

2. OSKULAČNÍ KRUŽNICE KUŽELOSEČEK

Nejprve užijeme vět o styku průmětů dvou křivek, které uvedeme bez důkazu (např. [5]).

Nechť křivky k_1, k_2 mají ve společném bodě M styk řádu právě $s - 1$ $(s > 1)$.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby středové průměty k_1' a k_2' křivek k_1, k_2 měly v průmětu M' bodu M styk řádu s, jest, aby střed promítání ležel v hlavní rovině a neležel na společné tečně křivek k_1, k_2 v bodě M.

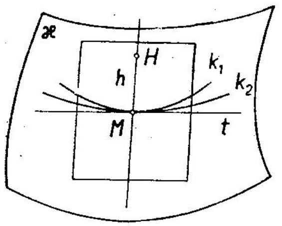
Nutná a postačující podmínka pro to, aby křivky k_1', k_2' měly v M' styk řádu $s + 1$, jest (za předpokladu, že hlavní rovina není oskulační rovinou křivek k_1, k_2), aby střed promítání byl bodem hlavní přímky a byl různý od bodu M.

Nutná a postačující podmínka pro to, aby křivky k_1', k_2' měly v M' styk řádu $s + 2$, jest (opět za předpokladu, že hlavní rovina není oskulační rovinou křivek k_1, k_2), aby střed promítání byl hlavním bodem.

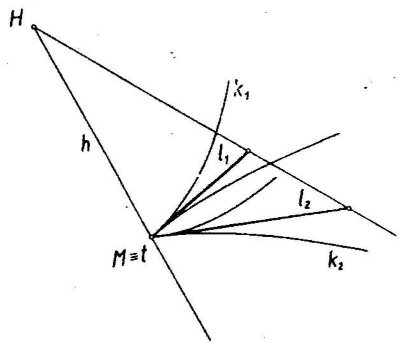
Geometrická konstrukce hlavní roviny a hlavní přímky byla např. uvedena Čechem [2]. Je-li $\varkappa$ libovolná plocha, na níž leží křivky k_1, k_2, pak hlavní rovina je tečná rovina plochy v bodě M (obr. 1) a hlavní přímka je přímka konjugovaná ke společné tečně křivek v bodě M.

Dá se dokázat, že ke konstrukci hlavního bodu je možno s výhodou použít netriviální rozvinutelné plochy určené křivkami k_1, k_2. Dotykový bod její hrany vratu s hlavní přímkou, která je přímkou této rozvinutelné plochy, je hlavní bod (pro případ protínajících se křivek důkaz je proveden v [5]; důkaz v tomto případě by probíhal obdobně).

Uvedenou konstrukci hlavních elementů je možno v eukleidovském prostoru pro případ $s = 2$ a za předpokladu, že oskulační roviny křivek k_1, k_2 v bodě M jsou různé, značně zjednodušit.



Obr. 1.

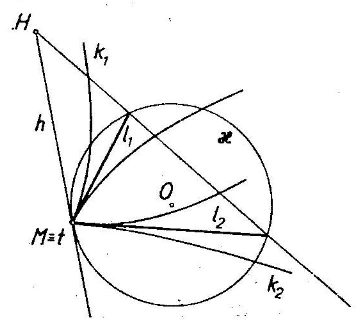


Obr. 2.

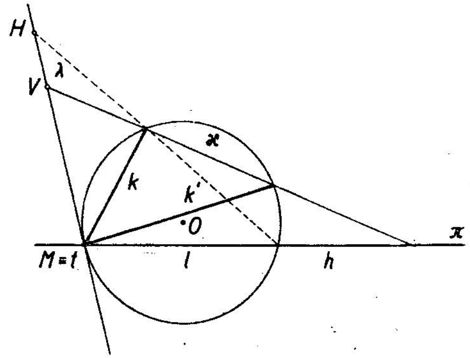
Konstrukce 2.1. Nechť l_1, l_2 jsou oskulační kružnice křivek k_1, k_2 v bodě M (v obr. 2 je znázorněn průmět z bodu společné tečny t křivek k_1, k_2 v M). Podle předpokladu leží l_1, l_2 v různých rovinách; určují proto jedinou kuželovou plochu. Její tečná rovina procházející společným bodem M křivek k_1, k_2 je hlavní rovina, povrchová přímka procházející bodem M je hlavní přímka a vrchol H je hlavní bod. Hlavní přímka je zřejmě kolmá na tečnu t křivek k_1, k_2 ve společném bodě.

Konstrukce 2.2. Nechť $\varkappa$ je kulová plocha, která má v bodě M tříbodový styk jak s křivkou k_1, tak také s křivkou k_2; snadno se uváží, že taková plocha je jediná (obr. 3). Oskulační roviny křivek k_1, k_2 v M protínají $\varkappa$ v kružnicích l_1, l_2, které jsou oskulačními kružnicemi křivek k_1, k_2 v bodě M; je jich proto možno užít ke konstrukci hlavních elementů dvojice křivek k_1, k_2 v bodě M podle konstrukce 2.1.

Užijeme-li nalezených výsledků na nejjednodušší případ, kdy za křivky k_1, k_2 volíme dotýkající se kružnice k, l ležící v různých rovinách a promítneme-li kromě toho obě kružnice na rovinu rovnoběžně s rovinou jedné z nich, pak dostáváme (obr. 4):



Obr. 3.



Obr. 4.

Věta. *Průmětem dvojice dotýkajících se kružnic, jejichž roviny jsou různé, na rovinu rovnoběžnou s rovinou jedné z nich je kružnice dotýkající se kuželosečky v bodě, který je průmětem dotykového bodu dané dvojice kružnic.*

Nutná a postačující podmínka pro to, aby v průmětu kružnice oskulovala kuželosečku, jest, aby střed promítání ležel v tečné rovině kulové plochy, na níž leží daná dvojice kružnic, sestrojené v bodě dotyku daných kružnic (a aby byl různý od bodu dotyku).

Nutná a postačující podmínka pro to, aby v průmětu kružnice hyperoskulovala kuželosečku, jest, aby střed promítání ležel na přímce tečné roviny procházející dotykovým bodem obou daných kružnic a kolmé ke společné tečně (a aby byl různý od bodu dotyku).

Nutná a postačující podmínka pro to, aby v průmětu kružnice splývala s kuželosečkou, jest, aby střed promítání byl vrcholem kuželové plochy, na níž leží obě dané kružnice.

Jiný elementární důkaz je možno provést aplikací známých vět o průniku kuželové a kulové plochy (obr. 4).

Promítací kuželová (válcová) plocha λ kružnice k je proťata rovinou kružnice l v kuželosečce h. Kulová plocha je proťata touž rovinou v kružnici l. Společné body kružnice l a kuželosečky h jsou tedy na průnikové křivce kulové plochy $\varkappa$ a kuželové plochy λ.

Průniková křivka obou ploch je složena, neboť podle předpokladu obsahuje kružnici k; druhá část je ovšem také kružnice. Vzhledem k tomu, že obě plochy se dotýkají v bodě M, průniková křivka má v tomto bodě dvojnásobný bod, a tedy rovina kružnice k', která je druhou částí průniku, prochází tímto bodem. Pokud střed promítání V neleží v rovině procházející bodem M kolmo ke společné tečně daných kružnic, rovina kružnice k' není kolmá k této rovině, a tedy protíná rovinu kuželosečky v přímce, jež je různá od společné tečny obou kružnic, tj. od tečny kuželosečky h v bodě M. Kružnice k' tedy protíná kuželosečku h jednak v bodě M, jednak v dalším bodě $M' \neq M$. Společné body kružnice l a h jsou tedy M (v němž se dotýkají) a M' (v němž se nedotýkají). Tedy l je oskulační kružnicí kuželosečky h v bodě M.

Jestliže střed promítání leží v rovině jdoucí bodem M kolmo ke společné tečně daných kružnic, pak rovina kružnice k' je k ní kolmá. Společné body kuželosečky h a kružnice l leží opět na průnikové křivce k, k' obou ploch. Buď rovina kružnice k' je různá od roviny kružnice l, pak h a l mají společný jen bod M, tj. l je hyperoskulační kružnicí kuželosečky h v bodě M. Je-li rovina k' totožná s rovinou kuželosečky h, pak $k' \equiv h \equiv l$. Je to ve speciálním případě, kdy střed promítání je vrcholem H kužele určeného kružnicemi k, l. Tím je podán druhý důkaz předchozí věty.

3. UŽITÍ ELIPSY KE KONSTRUKCI OSKULAČNÍCH KRUŽNIC

Tvrzení věty je možno rovněž lehko dokázat elementárními metodami početními přímo, aniž bychom užili předchozích vět. Důkazy se však pak musí provádět zvlášť pro jednotlivé typy kuželoseček (případ hyperoskulačních kružnic kuželoseček je např. uveden v [6] a [7]).

Užijeme-li rovnoběžného promítání, pak zřejmě můžeme odvodit jen věty týkající se oskulačních kružnic elipsy.

Nechť je dána kulová plocha $\varkappa$ a na ní dvě dotýkající se kružnice k, l (obr. 5). Promítněme obě kružnice ve směru přímky s, která leží v tečné rovině kulové plochy ve společném bodě M obou kružnic, do roviny rovnoběžné s rovinou kružnice l (směr s neleží ve dvojsměru roviny kružnice l). Směr promítání a kružnice k určují kruhovou válcovou plochu, jejíž řez průmětnou je elipsa (resp. kružnice) o sdružených průměrech MN, PQ.

Z podobných trojúhelníků $\Delta M_2S_2K \sim \Delta M_2O_2S_2'$ plyne

(1) $$M_2S_2 : M_2K = M_2O_2 : M_2S_2'.$$

Podobně z podobných trojúhelníků $\Delta M_2KO_2' \sim \Delta M_2O_2'O_2$ najdeme

(2) $$M_2O_2' : M_2K = M_2O_2 : M_2O_2'.$$

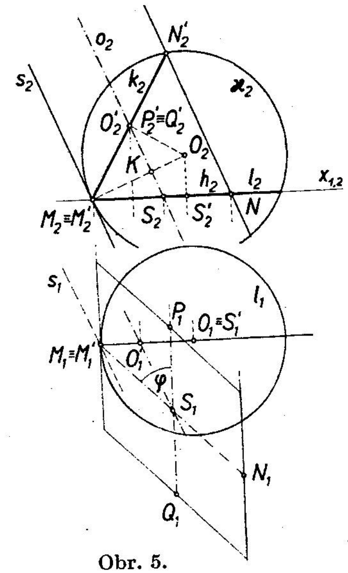
Z (1) a (2) dostáváme

(3) $$(M_2O_2')^2 = M_2S_2' : M_2S_2,$$

a tedy, vzhledem k tomu, že $M_2S_2 = M_1S_1 \sin\varphi$ $(0 < \varphi \leqq \frac{1}{2}\pi)$,

(4) $$M_1S_1' = M_2S_2' = \frac{(M_2O_2')^2}{M_1S_1 \sin\varphi} = \frac{(SP)^2}{MS \,.\, \sin\varphi},$$

což je známý vzorec pro poloměr oskulační kružnice elipsy v jejím bodě M, je-li elipsa určená sdruženými průměry MN, PQ (a jejíž střed je S).



Obr. 5.

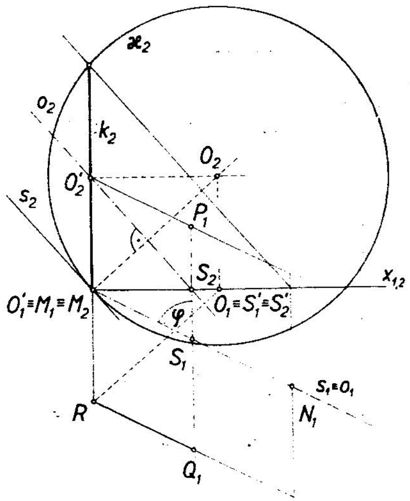
Nalezený výsledek je možno formulovat takto: Oskulační kružnice rovnoběžného průmětu kružnice do její roviny je kružnice, ve které tečnou rovinu dané kružnice protíná kulová plocha, která prochází danou kružnicí a dotýká se roviny určené směrem promítání a průsečnicí roviny dané kružnice s danou tečnou rovinou.

Protože každá elipsa je, jak známo, rovnoběžným průmětem nějaké kružnice, můžeme nalezeného výsledku užít ke konstrukci oskulační kružnice elipsy.

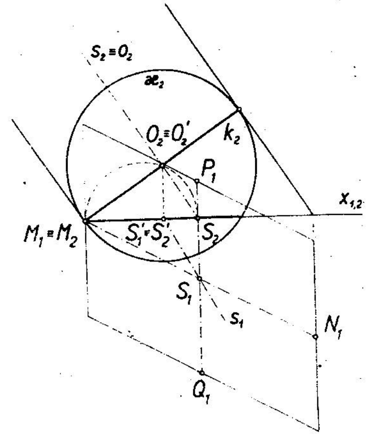
Konstrukce 3.1 (obr. 5.) Nechť elipsa je dána sdruženými průměry MN, PQ. Oskulační kružnici dané elipsy v krajním bodě M jednoho z daných průměrů sestrojíme takto: Rovinu elipsy zvolíme za prvou průmětnu, rovinu k ní kolmou a rovnoběžnou s normálou elipsy v bodě M zvolíme za druhou průmětnu. Daná elipsa je prvým průmětem kružnice k, která se dotýká roviny dané elipsy v M, je kolmá k druhé průmětně a má poloměr $r = PS = QS$. Střed O' libovolné kružnice vyhovující uvedeným podmínkám (pokud ovšem její rovina je různá od roviny dané elipsy) a střed S dané elipsy určují směr promítání s. Kulová plocha $\varkappa$ vyhovující podmínkám dokázané věty protíná rovinu dané elipsy v hledané oskulační kružnici (l o středu S').

Konstrukce 3.2 (obr. 6). Provedeme-li předchozí konstrukci speciálně pro kružnici k, jejíž rovina je kolmá k rovině dané elipsy, pak v podstatě dostáváme známou konstrukci středu S' oskulační kružnice v bodě M elipsy dané sdruženými průměry MN, PQ.

Poznámka. Přímky, které jsou potřebné k vlastnímu sestrojení středu oskulační kružnice, jsou $O_2'S_2$, M_1O_2, O_2O_1. Snažíme-li se co nejvýhodněji užít daných prvků, pak užijeme toho, že $M_1R \parallel O_2S_2'$ a $M_1R = O_2S_2'$. Kolmice z R na $O_2'S_2$ určuje na M_1S_1 hledaný střed S_1'.



Obr. 6.



Obr. 7.

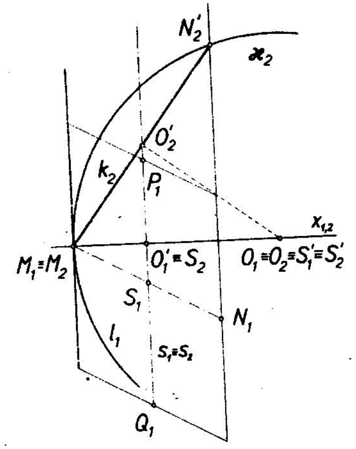
Konstrukce 3.3 (obr. 7). Ze základní prostorově odvozené konstrukce 3.1 můžeme za předpokladu $SP \leqq SM \sin \varphi$ snadno odvodit novou zajímavou konstrukci středu S oskulační kružnice v bodě M elipsy určené sdruženými průměry MN, PQ. Pomocnou kružnici k zvolíme tak, aby bylo $s_2 \perp k_2$. V tomto případě střed O pomocné kulové plochy splývá se středem O' kružnice k, takže pravoúhlý průmět bodu O do roviny dané elipsy je hledaný střed S' oskulační kružnice.

Samotnou konstrukci pak provedeme takto: Na kružnici opsané nad průměrem M_2S_2 určíme bod O_2' tak, aby $M_2O_2' = S_1P_1$, což podle předpokladu je možné. Pata S_1' kolmice spuštěné z $O_2 \equiv O_2'$ na M_2S_2 je hledaný střed.

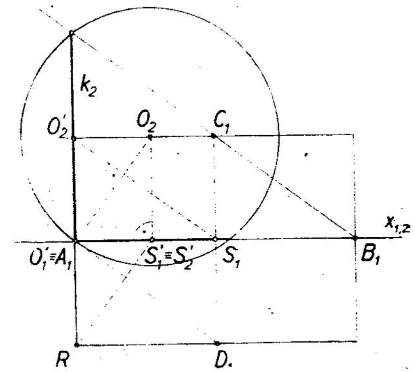
Konstrukce 3.4 (obr. 8). Je-li $SP \geqq SM \sin \varphi$, pak s výhodou můžeme užít promítání, jehož směr je kolmý na základnici $x_{1,2}$. Pro střed O' kružnice k platí $O_1' \equiv S_2$, $O_2'M_1 = S_1P_1$. Pomocná kulová plocha má střed O na základnici, a tedy střed S' oskulační kružnice dané elipsy pro bod M je $S' \equiv O$. Konstrukce je velmi snadná. Poloměrem S_1P_1 přetneme z M_1 průměr sdružený s M_1S_1; tím najdeme O_2'. Kolmice v O_2' k M_1O_2' určí na normále elipsy v M_1 střed S' oskulační kružnice.

Pro poloměr hyperoskulační kružnice ve vrcholu elipsy vyplývají specialisací konstrukcí 3.1 — 3.4 známé i méně obvyklé konstrukce.

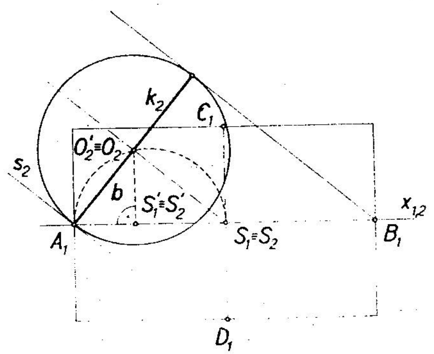
Konstrukce 3.5 (obr. 9). Užijeme-li konstrukce 3.2 pro případ $\varphi = R$, případně užijeme-li upravené konstrukce podle dříve uvedené poznámky,



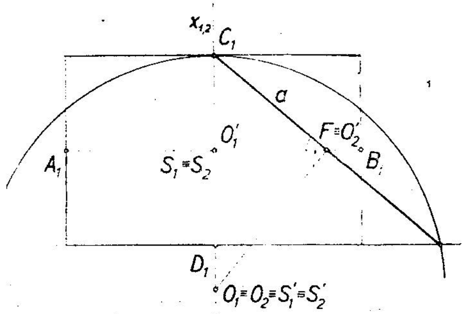
Obr. 8.



Obr. 9.



Obr. 10.



Obr. 11.

dostáváme velmi známou konstrukci středu hyperoskulační kružnice ve vrcholu elipsy.

Konstrukce 3.6 (obr. 10). Specializací konstrukce 3.3 pro případ $\varphi = R$ najdeme střed hyperoskulační kružnice v hlavním vrcholu elipsy. Místo obecných sdružených průměrů MN, PQ jsou dány osy AB, CD. Uvedené konstrukce můžeme užít, neboť příslušný předpoklad je splněn (jest totiž $a > b > 0$).

Konstrukce 3.7 (obr. 11). Střed hyperoskulační kružnice elipsy o osách AB, CD ve vedlejším vrcholu C můžeme sestrojit specializovanou konstrukcí 3.4, neboť příslušný předpoklad je splněn ($b < a$). Poznamenejme, že ke skutečné konstrukci stačí v ohnisku elipsy sestrojit kolmici na spojnici tohoto ohniska s tím vedlejším vrcholem elipsy, pro který hledáme střed hyperoskulační kružnice. Průsečík sestrojené kolmice s vedlejší osou je hledaný střed.

LITERATURA

[1] Bydžovský B., *Úvod do analytické geometrie*, Praha 1923.
[2] Čech E., *Propriétés projectives du contact I*, Spisy přír. fak. Mas. univ. Brno *91* (1928), 1—51.
[3] Hlavatý V., *Projektivní geometrie I*, Praha 1944.
[4] Kadeřávek F., Klíma J., Kounovský J., *Deskriptivní geometrie I*, Praha 1929; *II*, Praha 1932.
[5] Urban A., *Řešení styku křivek promítáním*, Matematicko-fyzikálny časopis *7* (1957), 207—234.
[6] Urban A., *Hyperoskulační kružnice elipsy*, Rozhledy matematicko-fysikální *39* (1960/61), 254—261, 306—311.
[7] Urban A., *Prostorová konstrukce hyperoskulačních kružnic kuželoseček*, Rozhledy matematicko-fysikální *40* (1961/62), 65—71, 110—114.

Došlo 8. 7. 1963.

Katedra deskriptivní geometrie
strojní fakulty
Českého vysokého učení technického,
Praha

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОПРИКАСАЮЩИХСЯ ОКРУЖНОСТЕЙ КОНИЧЕСКИХ СЕЧЕНИЙ I

Алоис Урбан

Резюме

В работе приведены элементарные доказательства конструкций соприкасающихся окружностей конических сечений, которые исходят из теорем о повышении касания кривых проектированием и из теории о пересечении специальных поверхностей второго порядка.