MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 15, 1, 1965

# ОБ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗ ТЕОРИИ СРАВНЕНИЙ

АЛЕКСАНДЕР РОСА (ALEXANDER ROSA), ШТЕФАН ЗНАМ (ŠTEFAN ZNÁM),
Братислава

Профессору Йозефу Кауцкому к 70-летию со дня рождения

С задачами, решаемыми в этой работе, мы встретились на семинаре по теории графов при решении проблематики т. наз. циклических разложений полных графов с $m = 2n + 1$ вершинами на окружности с $n$ ребрами.

Пусть задано натуральное число $n$. Обозначим $m = 2n + 1$.

Будем говорить, что множество $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset \{1, 2, \dots, 2n\}$, $N \leqq n$, является множеством типа (*), если выполняется

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \equiv 0 \pmod{m}, \tag{1}$$

$$x_i + x_j \not\equiv 0 \pmod{m} \quad \text{для всех} \quad i, j = 1, \dots, N\,. \tag{2}$$

Пустое множество будем считать множеством типа (*).

I. Обозначим $i' = m - i$. Очевидно, имеют место следующие утверждения:

(а) Если $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ — множество типа (*), то и $X' = \{x'_1, \dots, x'_N\}$ — множество типа (*);

(б) Если $X$, $Y$ — множества типа (*), $X \subset Y$, то и $Y - X$ является множеством типа (*);

(в) Если $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ — множество типа (*), то в $X$ содержится одно и только одно из чисел $i$, $i'$ $(1 \leqq i \leqq 2n)$.

**Лемма.** *Если* $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ — *множества типа* (*), *то и* $C = A \cap B$ — *множество типа* (*)

Доказательство. Если $C = \emptyset$ (очевидно, тогда $B = A'$), то утверждение леммы выполнено. Пусть теперь $C = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$, $p \leqq n$.

Обозначим $A - C = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}\}$, $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Согласно (в) имеем $B - C = \{a'_{i_1}, a'_{i_2}, \dots, a'_{i_k}\}$.

Так как по условию леммы $A$, $B$ — множества типа (*), то получим

$$\sum_{i=1}^{p} c_i + \sum_{\nu=1}^{k} a_{i_\nu} \equiv 0 \pmod m, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{p} c_i + \sum_{\nu=1}^{k} a'_{i_\nu} \equiv 0 \pmod m. \tag{4}$$

После сложения (3) и (4) получим

$$2\sum_{i=1}^{p} c_i + \sum_{\nu=1}^{k} (a_{i_\nu} + a'_{i_\nu}) \equiv 0 \pmod m,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{p} c_i \equiv 0 \pmod m,$$

что и требовалось доказать.

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — множество типа (*). Обозначим через $p_3^{(A)}, p_4^{(A)}, \ldots, p_{n-3}^{(A)}$ число всех отличных друг от друга подмножеств типа (*) множества $A$ соответственно с тремя, четырьмя, …, $(n-3)$-мя элементами.

Образуем сумму

$$\sum_{i=3}^{n-3} p_i^{(A)} = p_3^{(A)} + p_4^{(A)} + \ldots + p_{n-4}^{(A)} + p_{n-3}^{(A)} = k(A)\,.$$

Из (а) следует, что $k(A) = k(A')$.

**Теорема.** *Пусть* $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ — *множества типа* (*). *Тогда имеет место*: $k(A) = k(B)$.

Доказательство. Обозначим $C = A \cap B$. Если $C = \emptyset$, то $B = A'$ и утверждение теоремы выполнено. Пусть $C = \{c_1, \ldots, c_p\}$ $p < n$. Обозначим

$$A - C = D = \{d_1, \ldots, d_r\},$$

и согласно (в) будет

$$B - C = D' = \{d'_1, \ldots, d'_r\}.$$

В новом обозначении будем иметь

$$A = \{c_1, \ldots, c_p, d_1, \ldots, d_r\},$$
$$B = \{c_1, \ldots, c_p, d'_1, \ldots, d'_r\}.$$

Покажем теперь, что каждому подмножеству типа (*) множества $A$ соответствует (хотя бы) одно подмножество типа (*) множества $B$, причем двум разным таким подмножествам множества $A$ соответствуют две разные такие подмножества множества $B$. Так как множества $A, B$ можно поменять местами, то тем самым наша теорема будет доказана.



Подмножества типа (*) множества $A$ могут быть одного из четырех следующих видов:

I. $X_A = \{c_{i_1}, \ldots, c_{i_s}\}$, $1 \leqq s \leqq p$; $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\} \subset \{1,2, \ldots, p\}$;
II. $X_A = \{d_{i_1}, \ldots, d_{i_t}\}$, $1 \leqq t \leqq r$; $\{i_1, i_2, \ldots, i_t\} \subset \{1,2, \ldots, r\}$;
III. $X_A = \{c_{i_1}, \ldots, c_{i_s}, d_1, \ldots, d_r\}$, $1 \leqq s < p$; $\{i_1, \ldots, i_s\} \subset \{1,2, \ldots, p\}$;
IV. $X_A = \{c_{i_1}, \ldots, c_{i_s}, d_{j_1}, \ldots, d_{j_t}\}$, $1 \leqq s \leqq p$, $1 \leqq t < r$;
$\{i_1, i_2, \ldots, i_s\} \subset \{1,2, \ldots, p\}$,
$\{j_1, j_2, \ldots, j_t\} \subset \{1,2, \ldots, r\}$.

Соответствующие подмножества множества $B$ будут иметь в отдельных случаях следующий вид:

I. $X_B = \{c_{i_1}, \ldots, c_{i_s}\}$;
II. $X_B = \{d'_{i_1}, \ldots, d'_{i_t}\}$;
III. $X_B = \{c_{i_1}, \ldots, c_{i_s}, d'_1, \ldots, d'_r\}$;
IV. $X_B = \{c_{i_1}, \ldots, c_{i_s}, d'_{j_{t+1}}, \ldots, d'_{j_r}\}$,

$$\{j_{t+1}, \ldots, j_r\} = \{1,2, \ldots, r\} - \{j_1, j_2, \ldots, j_t\},$$

т.е. двум разным подмножествам типа (*) множества $A$ в самом деле соответствуют два разных подмножества множества $B$. Из (а) вытекает, что в случаях I., II., III. множество $X_B$ — типа (*). Покажем, что и в случае IV. множество $X_B$ — типа (*).

Очевидно, имеет место (ввиду (б) и ввиду леммы):

$$\sum_{i=1}^{r} d'_i \equiv 0 \pmod m. \tag{5}$$

Поскольку $X_A = \{c_{i_1}, \ldots, c_{i_s}, d_{j_1}, \ldots, d_{j_t}\}$ — типа (*), то

$$\sum_{\nu=1}^{s} c_{i_\nu} + \sum_{\nu=1}^{t} d_{j_\nu} \equiv 0 \pmod m. \tag{6}$$

После сложения (5) и (6) получим

$$\sum_{\nu=1}^{s} c_{i_\nu} + \sum_{\nu=1}^{t} (d_{j_\nu} + d'_{j_\nu}) + \sum_{\nu=t+1}^{r} d'_{j_\nu} \equiv 0 \pmod m, \tag{7}$$

где

$$\{j_{t+1}, \ldots, j_r\} = \{1,2, \ldots, r\} - \{j_1, j_2, \ldots, j_t\}.$$

Из (7) следует

$$\sum_{\nu=1}^{s} c_{i_\nu} + \sum_{\nu=t+1}^{r} d'_{j_\nu} \equiv 0 \pmod m,$$

т.е. $X_B = \{c_{i_1}, \ldots, c_{i_s}, d'_{j_{t+1}}, \ldots, d'_{j_r}\}$ — типа (*), ч. и т.д.

Доказанная теорема показывает, что сумма $\sum_{i=3}^{n=3} p_i^{(4)} = k(n)$ зависит только от $n$ и не зависит от выбранного множества $A$.

Примечание 1. Если отказаться от условия (2), т.е. если не требовать, чтобы выполнялось

$$x_i + x_j \not\equiv 0 \pmod m,$$

то ни лемма, ни утверждение, аналогичное теореме, не будут справедливыми.

Выведем теперь двумя путями формулы для определения числа $Q(n)$ разных множеств типа (*) с $n$ элементами.

II. Обозначим через $p_r(s)$ количество разбиений числа $r$ на отличные друг от друга числа, не превосходящие $s$. Каждое из этих разбиений отнесем к одному из двух классов. В первый класс включим разбиения, не содержащие число $s$; их количество равно, очевидно, $p_r(s-1)$. Во второй класс включим разбиения, содержащие число $s$; их количество равно количеству разбиений числа $r-s$ на отличные друг от друга числа, не превосходящие $s-1$. Следовательно, для $p_r(s)$ получаем следующее рекуррентное соотношение:

$$p_r(s) = p_r(s-1) + p_{r-s}(s-1),$$

$$\text{где } p_0(s) \underset{\text{def}}{=} 1, \qquad p_r(s) \underset{\text{def}}{=} 0 \qquad \text{для } r < 0.$$

Легко выводятся формулы, облегчающие вычисление $p_r(s)$:

$$p_r(s) = p_r(r) \quad \text{для} \quad s > r,$$

(8) $$p_{\frac{1}{2}s(s+1)-r}(s) = p_r(s).$$

С помощью этих соотношений построена таблица 1.
Производящая функция для $p_r(s)$ (см. [1]) будет

$$(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^s) = \sum_{r=0}^{\frac{1}{2}s(s+1)} p_r(s)x^r.$$

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ — типа (*). Сумму всех $a_i$, не превосходящих $n$, обозначим через $a$. Для $a_i > n$ мы можем писать $a_i = m - b_i$, где $b_i \leqq n$. Сумму всех $b_i$ обозначим через $b$. Так как $A$ — типа (*), то получаем соотношения:

$$a \equiv b \pmod m,$$

$$a + b = \tfrac{1}{2} n(n+1).$$

Значит,



(9) $$2a \equiv \tfrac{1}{2} n(n+1) \pmod m.$$

При этом $a$ должно удовлетворять условию

(10) $$0 < a \leqq \tfrac{1}{2} n(n+1).$$

Таблица 1

| $p_r(s)$ $r$ \ $s$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 4 | | | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 5 | | | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 6 | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 7 | | | | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 8 | | | | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 9 | | | | 1 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 10 | | | | 1 | 3 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| 11 | | | | | 2 | 5 | 7 | 9 | 10 | 11 | 12 | 12 | 12 | 12 | 12 |
| 12 | | | | | 2 | 5 | 8 | 10 | 12 | 13 | 14 | 15 | 15 | 15 | 15 |
| 13 | | | | | 1 | 4 | 8 | 11 | 13 | 15 | 16 | 17 | 18 | 18 | 18 |
| 14 | | | | | 1 | 4 | 8 | 12 | 15 | 17 | 19 | 20 | 21 | 22 | 22 |
| 15 | | | | | 1 | 4 | 8 | 13 | 17 | 20 | 22 | 24 | 25 | 26 | 27 |
| 16 | | | | | | 3 | 8 | 13 | 18 | 22 | 25 | 27 | 29 | 30 | 31 |
| 17 | | | | | | 2 | 7 | 13 | 19 | 24 | 28 | 31 | 33 | 35 | 36 |
| 18 | | | | | | 2 | 7 | 14 | 21 | 27 | 32 | 36 | 39 | 41 | 43 |
| 19 | | | | | | 1 | 6 | 13 | 21 | 29 | 35 | 40 | 44 | 47 | 49 |
| 20 | | | | | | 1 | 5 | 13 | 22 | 31 | 39 | 45 | 50 | 54 | 57 |
| 21 | | | | | | 1 | 5 | 13 | 23 | 33 | 43 | 51 | 57 | 62 | 66 |
| 22 | | | | | | | 4 | 12 | 23 | 35 | 46 | 56 | 64 | 70 | 75 |
| 23 | | | | | | | 3 | 11 | 23 | 36 | 49 | 61 | 71 | 79 | 85 |
| 24 | | | | | | | 2 | 10 | 23 | 38 | 53 | 67 | 79 | 89 | 96 |
| 25 | | | | | | | 2 | 9 | 22 | 39 | 56 | 72 | 87 | 99 | 109 |
| 26 | | | | | | | 1 | 8 | 21 | 39 | 59 | 78 | 95 | 110 | 122 |
| 27 | | | | | | | 1 | 7 | 21 | 40 | 62 | 84 | 104 | 122 | 137 |
| 28 | | | | | | | 1 | 6 | 19 | 40 | 64 | 89 | 113 | 134 | 152 |
| 29 | | | | | | | | 5 | 18 | 39 | 66 | 94 | 121 | 146 | 168 |
| 30 | | | | | | | | 4 | 17 | 39 | 68 | 100 | 131 | 160 | 188 |
| 31 | | | | | | | | 3 | 15 | 38 | 69 | 104 | 140 | 173 | 203 |
| 32 | | | | | | | | 2 | 13 | 36 | 69 | 108 | 148 | 187 | 222 |
| 33 | | | | | | | | 2 | 12 | 35 | 70 | 113 | 158 | 202 | 243 |
| 34 | | | | | | | | 1 | 10 | 33 | 69 | 115 | 166 | 216 | 263 |
| 35 | | | | | | | | 1 | 9 | 31 | 69 | 118 | 174 | 231 | 285 |

Легко доказать и обратное: $a_i$ удовлетворяют (2), (9), (10), то они удовлетворяют и (1).

Пусть $a$ удовлетворяет (9), (10). Пусть $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = a$, $k \leqq n$, — некоторое разбиение $a$ на отличные друг от друга числа, не превосходящие $n$. Каждому такому разбиению соответствует одно множество типа (*) с $n$ элементами, причем разбиениям отличных друг от друга чисел $a$ или же разным разбиениям одного и того же $a$ соответствуют отличные друг от друга множества.

Следовательно, для $Q(n)$ получаем формулу

(11) $$Q(n) = \sum p_a(n),$$

где $a$ пробегает все решения сравнения (9), удовлетворяющие неравенству (10).

Примечание 2. Соотношение (8) может быть использовано для упрощения вычислений $Q(n)$, а именно, в (11) следует $p_a(n)$ для $a > \frac{1}{4} n(n+1)$ заменить на $p_{\frac{1}{2}n(n+1)-a}(n)$.

III. Обозначим через $P_r(s)$ количество разных разбиений числа $r$ на отличные друг от друга нечетные числа, не превосходящие $s$ ($s$ — нечетное). Покажем, что для $P_r(s)$ имеет место рекуррентное соотношение

$$P_r(s) = P_r(s-2) + P_{r-s}(s-2)$$

(при этом $P_0(s) \underset{\text{def}}{=} 1$).

Каждое из разбиений числа $r$ на отличные друг от друга нечетные числа, не превосходящие $s$, отнесем к одному из двух классов. В первый класс включим разбиения, в которых не фигурирует число $s$; таких разбиений $P_r(s-2)$. Во второй класс включим разбиения, в которых содержится число $s$; таких разбиений имеется ровно столько, сколько имеется разбиений числа $r - s$ на нечетные числа, не превосходящие $s - 2$, т.е. $P_{r-s}(s-2)$.

Для составления таблицы чисел $P_r(s)$ используем еще следующие соотношения, справедливость которых легко проверяется:

$$P_r(s) = 0 \quad \text{для} \quad r > \left(\frac{s+1}{2}\right)^2,$$

$$P_r(s) = P_r(r) \quad \text{для} \quad s > r, r \text{ — нечетное},$$

$$P_r(s) = P_r(r-1) \quad \text{для} \quad s > r, r \text{ — четное},$$

(12) $$P_r(s) = P_{\left(\frac{s+1}{2}\right)^2 - r}(s).$$



В таблице 2 приведены первые значения $P_r(s)$.
Производящая функция для $P_r(s)$ будет

$$(1+x)(1+x^3)\ldots(1+x^s) = \sum_{r=0}^{\left(\frac{s+1}{2}\right)^2} P_r(s)x^r \quad (s \text{ — нечетное}).$$

Таблица 2

$P_r(s)$

| $r \backslash s$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 | 29 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 5 | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 7 | | | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 8 | | | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 9 | | | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 10 | | | | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 11 | | | | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 12 | | | | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 13 | | | | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 14 | | | | 0 | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 15 | | | | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 16 | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 17 | | | | | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 18 | | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| 19 | | | | | 1 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| 20 | | | | | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| 21 | | | | | 1 | 3 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 22 | | | | | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| 23 | | | | | 0 | 2 | 4 | 6 | 7 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| 24 | | | | | 1 | 3 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 11 | 11 | 11 |
| 25 | | | | | 1 | 2 | 5 | 7 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 12 | 12 |
| 26 | | | | | | 2 | 4 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 12 | 12 |
| 27 | | | | | | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 12 | 13 | 13 | 14 | 14 |
| 28 | | | | | | 2 | 5 | 8 | 10 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 16 |
| 29 | | | | | | 1 | 4 | 7 | 10 | 12 | 14 | 15 | 16 | 16 | 17 |
| 30 | | | | | | 1 | 4 | 7 | 10 | 12 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 31 | | | | | | 1 | 3 | 7 | 10 | 13 | 15 | 17 | 18 | 19 | 19 |
| 32 | | | | | | 1 | 4 | 8 | 12 | 15 | 17 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| 33 | | | | | | 1 | 4 | 7 | 12 | 15 | 18 | 20 | 22 | 23 | 24 |
| 34 | | | | | | 0 | 3 | 7 | 11 | 15 | 18 | 20 | 22 | 23 | 24 |
| 35 | | | | | | 1 | 3 | 7 | 11 | 16 | 19 | 22 | 24 | 26 | 27 |

Вычислим теперь $Q(n)$ с помощью чисел $P_r(s)$.

Для множества $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ типа (*) имеет место:

$$\binom{n+1}{2} \leqq \sum_{i=1}^{n} a_i \leqq \tfrac{1}{3}\binom{3n+1}{2},$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = k \,.\, m ,$$

$$\frac{\binom{n+1}{2}}{m} \leqq k \leqq \frac{\binom{3n+1}{2}}{3m}.$$

Если рассматривать теперь все отличные друг от друга множества типа (*) с $n$ элементами, то $k$ будет принимать значения от $q_0 = [\frac{1}{4} n] + 1$ до $q_1 = [\frac{1}{4}(3n-1)]$:

$$k_1 = q_0; \quad k_2 = q_0 + 1; \ldots; \quad k_q = q_1; \quad q = q_1 - q_0 + 1.$$

Легко проверяется, что при этом

(13) $$k_i + k_{q-i+1} = n.$$

Образуем таблицу, в первой строке которой будут находиться числа от 1 до $n$, во второй — числа от $n+1$ до $2n$, записанные в обратном порядке, а в третьей — разности между числом во второй строке и лежащим над ним числом в первой строке:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots, n-2, & n-1, & n \\ 2n, & 2n-1, & 2n-2, & \ldots, n+3, & n+2, & n+1 \\ 2n-1, & 2n-3, & 2n-5, & \ldots, \quad 5, & 3, & 1 \end{array}$$

Сумма чисел в первой строке равна $\binom{n+1}{2}$.

Обозначим $v_i = m \,.\, k_i - \binom{n+1}{2}$, где $i = 1, \ldots, q$.

Если теперь заменить некоторые числа первой строки соответствующими (т.е. лежащими под ними) числами второй строки так, чтобы сумма чисел в первой строке увеличилась на $v_i$, то элементы первой строки будут образовать множество типа (*). Если это сделать всевозможными способами (и для всех $i = 1, \ldots, q$), то получим все отличные друг от друга множества типа (*) с $n$ элементами. Поскольку в третьей строке фигурируют только нечетные числа, не превосходящие $2n-1$, то таких способов



будет ровно столько, сколько имеется разных разбиений чисел $v_i$ ($i = 1, \ldots, q$) на отличные друг от друга нечетные числа, не превосходящие $2n-1$:

(14) $$Q(n) = \sum_{i=1}^{q} P_{v_i}(2n-1).$$

Примечание 3. С помощью соотношений (12), (13) вычисления по формуле (14) могут быть упрощены так, что числа $P_{v_i}(2n-1)$ для $i > \frac{1}{2} q$ заменятся числами $P_{v_{q-i+1}}(2n-1)$

IV. Приведем еще один способ нахождения числа $Q(n)$.

В части I. было доказано, что значение $k(n)$ зависит только от $n$ и не зависит от выбранного множества $A$.

Выберем произвольное множество $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ типа (*). Из этого множества мы можем образовать $k(n)$ новых множеств типа (*) с $n$ элементами следующим образом: Пусть $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$ — одно из $k(n)$ подмножеств типа (*) множества $A$. Если в исходном множестве $A$ заменить элементы этого подмножества элементами подмножества $\{a'_{i_1}, \ldots, a'_{i_k}\}$, где $a'_i = m - a_i$, и остальные элементы оставить неизменными, то получим новое множество $A^+$, которое будет (согласно I.) также множеством типа (*). Если этот прием проделать для всех $k(n)$ подмножеств типа (*) множества $A$, то получим систему $k(n)$ новых множеств типа (*) с $n$ элементами. Присоединим еще к этой системе исходное множество $A$ и множество $A' = \{a'_1, \ldots, a'_n\}$. Мы получим систему $\mathfrak{N}$ всех отличных друг от друга множеств типа (*) с $n$ элементами.

Докажем последнее утверждение. Очевидно, все множества системы $\mathfrak{N}$ отличны друг от друга. Предположим, что существует множество $\bar{A}$ типа (*) с $n$ элементами, не принадлежащее системе $\mathfrak{N}$. Образуем пересечение $A \cap \bar{A}$. Если $A \cap \bar{A} = \varnothing$, то $\bar{A} = A'$, что противоречит предположению о том, что $\bar{A}$ не принадлежит $\mathfrak{N}$. Если же $A \cap \bar{A} = A_1 = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}\}$, то $A_1$ является одним из $k(n)$ подмножеств типа (*) множества $A$. Но это означает, что мы получили множество $\bar{A}$ описанным выше образом из подмножества $A - A_1$, которое является (согласно части I.) также одним из $k(n)$ подмножеств типа (*) множества $A$. Мы получили противоречие, так как предполагали, что $\bar{A}$ не принадлежит $\mathfrak{N}$. Утверждение доказано.

Тем самым мы вывели соотношение

$$Q(n) = k(n) + 2,$$

исходя из которого мы можем записать формулу для вычисления $k(n)$:

(15) $$k(n) = \sum p_a(n) - 2$$

или

(16) $$k(n) = \sum_{i=1}^{q} P_{v_i}(2n - 1) - 2.$$

В таблице 3 приведено несколько первых значений $Q(n)$ и $k(n)$.

Таблица 3

| $n$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Q(n)$ | 2 | 2 | 2 | 4 | 8 | 16 | 26 | 48 | 90 | 164 | 302 | 564 | 1058 |
| $k(n)$ | 0 | 0 | 0 | 2 | 6 | 14 | 24 | 46 | 88 | 162 | 300 | 562 | 1056 |

## ЛИТЕРАТУРА

[1] Hardy G. H., Wright E. M., *An introduction to the theory of numbers*, Oxford 1938.

Поступило 26. 2. 1964.

*ČSAV, Kabinet matematiky*
*Slovenskej akadémie vied,*
*Bratislava*

*Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie*
*Chemickej fakulty*
*Slovenskej vysokej školy technickej,*
*Bratislava*

# A COMBINATORIAL PROBLEM OF THE THEORY OF CONGRUENCES

Alexander Rosa, Štefan Znám

## Summary

Let $n$ be a natural number, $m = 2n + 1$. The set $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \{1, \dots, 2n\}$ $N \leqq n$ is said to be of the type (*), if (1) holds and if (2) holds for all $i, j = 1, \dots, N$.

If $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ is of the type (*), then $p_i^{(A)}$ denotes the number of subsets of the type (*) with $i$ elements, of the set $A$.

In part I the following theorem is proved:

The sum $\sum_{i=3}^{n-3} p_i^{(A)}$ does not depend on the choice of the set $A$, but only on the number of its elements (this sum is denoted by $k(n)$).



In part II $Q(n)$, the number of different sets of the type (*) with $n$ elements is determined, with the help of the numbers $p\ (s)$, where $p\ (s)$ denotes the number of partitions of the number $r$ into mutually different numbers not exceeding $s$ (formula (11)).

In part III $Q(n)$ is determined with the help of the numbers $P_r(s)$, where $P_r(s)$ denotes the number of partitions of $r$ into mutually different odd numbers not exceeding $s$ (formula (14)).

In part IV the relation

$$Q(n) = k(n) + 2$$

is derived.

This problem has arisen from the problem of cyclic decompositions of the complete graph with $m = 2n + 1$ vertices into circuits with $n$ edges each.