MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK 15 1965 ČÍSLO 1

РАДИКАЛЫ И ТОПОЛОГИЯ В ПОЛУГРУППАХ

РОБЕРТ ШУЛКА (ROBERT ŠULKA), Братислава

В работе [3] определены множества нильпотентных элементов по отношению к идеалам полугруппы S, радикал Клиффорда, Шварца и Маккойя и вполне простой радикал полугруппы S по отношению к идеалу полугруппы S. В следующем определении 1 введенные множества $\mathbf{N}(M)$, $\mathbf{R}^*(M)$, $\mathbf{R}(M)$, $\mathbf{M}(M)$ и $\mathbf{C}(M)$ являются некоторым обобщением указанных понятий. Оказывается, что отображения $M \to \mathbf{N}(M)$ и $M \to \mathbf{C}(M)$ являются операциями замыкания, которые определяют на полугруппе S некоторые топологии. Настоящая работа посвящена изучению этих топологий.

Определение 1. *Пусть S — полугруппа и M — непустое подмножество в S.*

а) *Обозначим через $\mathbf{N}(M)$ множество всех элементов $x \in S$, для которых существует такое натуральное число $n(x)$, что $x^{n(x)} \in M$.*

б) *Идеал I из S называется нильидеалом по отношению к M, если для каждого его элемента x существует натуральное число $n(x)$ такое, что $x^{n(x)} \in M$. Объединение всех нильидеалов по отношению к M обозначим через $\mathbf{R}^*(M)$.*

в) *Идеал I из S называется нильпотентным идеалом по отношению к M, если сеществует такое натуральное число n, что $I^n \subseteq M$. Объединение всех нильпотентных идеалов по отношению к M обозначим через $\mathbf{R}(M)$.*

г) *Пересечение всех простых идеалов, содержащих множество M, обозначим через $\mathbf{M}(M)$.*

д) *Пересечение всех вполне простых идеалов, содержащих множество M, обозначим через $\mathbf{C}(M)$.*

Лемма 1. *Пусть S — полугруппа, M — ее непустое подмножество, J — идеал. Тогда*

а) $M \subseteq \mathbf{N}(M)$,
б) $J \subseteq \mathbf{R}^*(J)$,
в) $J \subseteq \mathbf{R}(J)$,

г) $M \subseteq \mathbf{M}(M)$,
д) $M \subseteq \mathbf{C}(M)$.

Доказательство этой леммы вытекает непосредственно из определения 1.

Следующий пример показывает, что пункты б) и в) леммы 1 могут не выполняться для множеств M, которые не являются идеалами.

Пример 1. Пусть S — свободная полугруппа. Пусть $\{a, b\}$ – множество ее образующих элементов. Пусть $M = \{a\}$. $\mathbf{R}^*(M) = \emptyset$, так как главный идеал, порожденный любым элементом из S, содержит элементы, никакая степень которых не равна элементу a. Значит, ни $M \subseteq \mathbf{R}^*(M)$, ни $M \subseteq \mathbf{R}(M)$. Очевидно, $\mathbf{M}(M) \neq \emptyset$ и поэтому лемму 19 из работы [3] нельзя распространить на произвольные множества.

Лемма 2. *Пусть S — полугруппа и M — ее непустое подмножество. Тогда*

а) $\mathbf{N}(\mathbf{N}(M)) = \mathbf{N}(M)$,
б) $\mathbf{R}^*(\mathbf{R}^*(M)) = \mathbf{R}^*(M)$,
в) $\mathbf{M}(\mathbf{M}(M)) = \mathbf{M}(M)$,
г) $\mathbf{C}(\mathbf{C}(M)) = \mathbf{C}(M)$.

Доказательство пунктов а), в) и г) просто и вытекает непосредственно из определения 1 и леммы 1. Следовательно, докажем только пункт б).

Так как $\mathbf{R}^*(M)$ — идеал, то на основании леммы 1 имеем $\mathbf{R}^*(M) \subseteq \mathbf{R}^*(\mathbf{R}^*(M))$. С другой стороны, если $x \in \mathbf{R}^*(\mathbf{R}^*(M))$, то некоторая степень каждого элемента y главного идеала I_x, порожденного элементом x, будет принадлежать $\mathbf{R}^*(M)$, а некоторая степень этой степени — M. Поэтому некоторая степень каждого элемента $y \in I_x$ будет принадлежать M, т.е. $x \in \mathbf{R}^*(M)$, значит, $\mathbf{R}^*(\mathbf{R}^*(M)) \subseteq \mathbf{R}^*(M)$. Следовательно, $\mathbf{R}^*(\mathbf{R}^*(M)) = \mathbf{R}^*(M)$.

Следующий пример показывает, что $\mathbf{R}(\mathbf{R}(M)) = \mathbf{R}(M)$ может не иметь места даже тогда, когда M является идеалом.

Пример 2. Пусть S — полугруппа с множеством образующих элементов $\{0, a, b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ и с определяющими соотношениями

$0 \,.\, x = x \,.\, 0 = 0$ для каждого $x \in S$;
$a^2 = 0$,
$b_i b_j = 0$ для $i, j = 1, 2, \ldots$;
$b_i a b_j = 0$ для $i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots$;
$(ab_i)^{i+1} = (b_i a)^{i+1} = 0$ для $i = 1, 2, \ldots$

Всякий элемент, отличный от нулевого элемента, является произведением образующих элементов $a, b_1, b_2, \ldots$, причем

а) a выступает как множитель только в первой степени;

б) никогда не следует друг за другом b_i и b_j, т.е. перед и после b_i либо нет множителя, либо есть a (b_i — тоже только в первой степени);

в) в одном слове не фигурируют элементы b_i, b_j с разными индексами $i \neq j$;

г) произведения ab_i и $b_i a$ фигурируют в одном слове друг за другом не более i раз.

Следовательно, ненулевыми элементами являются следующие слова и части этих слов:

$$(1)\quad \begin{array}{ll} ab_1a & b_1ab_1 \\ ab_2ab_2a & b_2ab_2ab_2 \\ ab_3ab_3ab_3a & b_3ab_3ab_3ab_3 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Рассмотрим слова (1) и части этих слов, которые содержат хотя бы два образующих элемента. Выберем один из рассматриваемых элементов. Этот элемент x есть произведение, множителями которого являются поочередно образующие элементы a и b_i (при фиксированном i). Из определяющих соотношений следует тогда, что элемент x образует главный идеал I_x, для которого выполняется $I_x^{i+1} = 0$. В самом деле, главный идеал I_x содержит кроме элемента x и 0 только произведения с большим числом чередующихся множителей a и b_i, чем он имеет их сам. Поэтому слова (1) и их части, состоящие хотя бы из двух образующих элементов, принадлежат $\mathbf{R}(\{0\})$.

Пусть I_a — главный идеал, порожденный элементом a. Его элементами являются произведения образующих элементов, в которых хотя бы одним из множителей является a. Значит, ими будут, помимо элементов a и 0, все слова (1) и их части, состоящие хотя бы из двух образующих элементов. I_a^2 имеет элементами 0, слова (1) и части этих слов, состоящие из более чем двух образующих элементов, без элементов $b_i a b_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Поэтому $I_a^2 \subseteq \mathbf{R}(\{0\})$ и $a \in \mathbf{R}(\mathbf{R}(\{0\}))$.

С другой стороны, элементы ab_i $(i = 1, 2, \ldots)$ принадлежат I_a, но $(ab_i)^i \neq 0$. Следовательно, для каждого натурального числа n существует такой элемент ab_n, что $(ab_n)^n \neq 0$ и поэтому ни для какого натурального числа n не выполняется $I_a^n = 0$ и $a \notin \mathbf{R}(\{0\})$. Поэтому $\mathbf{R}(\mathbf{R}(\{0\})) \neq \mathbf{R}(\{0\})$, что и требовалось доказать.

Легко доказывается

Лемма 3. *Пусть S — полугруппа, M_1, M_2 — ее непустые подмножества. Тогда*

а) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow \mathbf{N}(M_1) \subseteq \mathbf{N}(M_2)$,
б) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow \mathbf{R}^*(M_1) \subseteq \mathbf{R}^*(M_2)$,
в) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow \mathbf{R}(M_1) \subseteq \mathbf{R}(M_2)$,
г) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow \mathbf{M}(M_1) \subseteq \mathbf{M}(M_2)$,
д) $M_1 \subseteq M_2 \Rightarrow \mathbf{C}(M_1) \subseteq \mathbf{C}(M_2)$.

Справедлива также

Лемма 4. *Пусть S — полугруппа, M_1, M_2 — ее непустые подмножества. Тогда*

а) $\mathbf{N}(M_1) \cup \mathbf{N}(M_2) = \mathbf{N}(M_1 \cup M_2)$,
б) $\mathbf{C}(M_1) \cup \mathbf{C}(M_2) = \mathbf{C}(M_1 \cup M_2)$.

Доказательство. а) доказывается аналогично доказательству пункта в) леммы 1 в работе [3].

б) доказывается аналогично доказательству пункта в) леммы 13 в работе [3]. Можно даже показать, что лемма 4 справедлива и для бесконечного числа непустых множеств $M_\varkappa$, $\varkappa \in K$, т.е., что имеет место $\mathbf{N}(\bigcup_{\varkappa \in K} M_\varkappa) = \bigcup_{\varkappa\in K} \mathbf{N}(M_\varkappa)$ и $\mathbf{C}(\bigcup_{\varkappa \in K} M_\varkappa) = \bigcup_{\varkappa \in K} \mathbf{C}(M_\varkappa)$.

Примечание 1. Из примера в работе [3] (стр. 213 и 221) вытекает, что лемма 4 не имеет места для множеств $\mathbf{R}^*(M)$, $\mathbf{R}(M)$ и $\mathbf{M}(M)$ даже тогда, когда M_1 и M_2 — идеалы.

Пусть $M \to \mathbf{K}(M)$ — отображение, ставящее каждому подмножеству M множества P в соответствие подмножество $\mathbf{K}(M)$ множества P, и пусть это отображение обладает следующими свойствами:

$M \subseteq \mathbf{K}(M)$,
$\mathbf{K}(M_1) \cup \mathbf{K}(M_2) = \mathbf{K}(M_1 \cup M_2)$,
$\mathbf{K}(M) = \mathbf{K}(\mathbf{K}(M))$,
$\mathbf{K}(\emptyset) = \emptyset$.

Тогда мы говорим (см., например [1], стр. 290), что $M \to \mathbf{K}(M)$ является операцией замыкания. С помощью этой операции замыкания на множестве P введена топология.

Из леммы 1,2 и 4 тогда следует

Теорема 1. *Пусть S — полугруппа. Каждому подмножеству M из S поставим в соответствие множество $\mathbf{N}(M)$ (пустому множеству $\emptyset$ поставим в соответствие пустое множество $\emptyset$). Тогда отображение $M \to \mathbf{N}(M)$ является операцией замыкания.*

Примечание 2. Операция замыкания из теоремы 1 определяет на S топологию. Замкнутыми множествами в этой топологии являются как раз все множества $\mathbf{N}(M)$, когда M пробегает все подмножества из S. Это такие подмножества M из S, которые не содержат никакой степени никакого элемента из своего дополнения $S \setminus M$. Открытыми множествами в указанной топологии будут такие множества U, которые с любым элементом содержат также все его степени, а значит, и порожденную этим элементом моногенную полугруппу, и пустое множество. Значит, открытыми множествами являются такие множества U, которые являются объединением моногенных полугрупп, и пустое множество. Можно также сказать, что открытые множества — это множества, которые являются объединением подполугрупп, и пустое множество. В качестве полной системы окрестностей этого топологического пространства можно взять систему всех моногенных подполугрупп полугруппы S.

Точно так же из лемм 1,2 и 4 следует.

Теорема 2. *Пусть S — полугруппа. Каждому подмножеству M из S поставим в соответствие множество $\mathbf{C}(M)$ и для пустого множества $\emptyset$ положим $\mathbf{C}(\emptyset) = \emptyset$. Тогда отображение $M \to \mathbf{C}(M)$ является операцией замыкания.*

Примечание 3. Операция замыкания из теоремы 2 определяет на S также топологию. Замкнутыми множествами в этой топологии являются как раз все множества $\mathbf{C}(M)$, когда M пробегает все подмножества из S. Значит, замкнутыми множествами в топологии из теоремы 2 являются все подмножества из S, которые являются пересечениями вполне простых идеалов из S (это — идеалы), и пустое множество. Идеал из S является замкнутым множеством тогда и только тогда, когда он является вполне простым радикалом по отношению к этому идеалу. Поскольку непустое множество P элементов полугруппы S является вполне простым идеалом тогда и только тогда, когда $S \setminus P$ есть сильная подполугруппа, отличная от S (см. [3]), то открытыми множествами в вышеуказанной топологии являются объединения сильных подполугрупп (а также пустое множество). Так как пересечение произвольного числа сильных подполугрупп есть сильная подполугруппа, то для каждого элемента $x \in S$ существует минимальная сильная подполугруппа, содержащая элемент x (она является пересечением всех сильных подполугрупп, содержащих x; назовем ее сильной подполугруппой, порожденной элементом x), а систему всех этих минимальных сильных подполугрупп можно взять в качестве полной системы окрестностей топологического пространства из теоремы 2.

Примечание 4. Каждое открытое множество в топологии, введенной в теореме 2, является также открытым множеством в топологии, введенной в теореме 1. Но эти топологии отличны друг от друга, так как операции замыкания $\mathbf{N}(M)$ и $\mathbf{C}(M)$ отличны друг от друга. В самом деле, $\mathbf{N}(M)$ может и не быть идеалом (как известно), но $\mathbf{C}(M)$ всегда является идеалом.

Топологии, введенные в теоремах 1 и 2, могут быть отличными друг от друга даже в коммутативной полугруппе S, как это показывает следующий пример.

Пример 3. Пусть S — коммутативная полугруппа с множеством образующих элементов $\{0, a, b\}$ и с определяющими соотношениями

$$0 \cdot x = x \cdot 0 = 0 \quad \text{для} \quad x \in S;$$
$$xy = yx \quad \text{для} \quad x, y \in S.$$

Положим $M = \{a\}$. Тогда $\mathbf{N}(M) = \{a\}$. Но $\mathbf{C}(M)$ содержит наверняка идеал I_a, порожденный элементом a, и вместе с ним и элемент ab, значит, $\mathbf{N}(M)$ является собственным подмножеством $\mathbf{C}(M)$ и поэтому обе топологии отличны друг от друга.

Примечание 5. Из работы [3] вытекает, что если S — коммутативная полугруппа, то те множества M, которые являются идеалами в S, имеют в обеих вышеприведенных топологиях одно и то же замыкание.

Теорема 3. *Следующие четыре утверждения взаимно эквивалентны:*

а) *Топология из теоремы 1 является* T_1-*топологией;*
б) *Топология из теоремы 1 является* T_2-*топологией;*
в) *Топология из теоремы 1 является дискретной топологией;*
г) *Каждый элемент полугруппы S является идемпотентом.*

Доказательство. Очевидно, из б) следует а). Так как полной системой окрестностей в топологии из теоремы 1 является система всех моногенных подполугрупп полугруппы S, то окрестность каждого элемента x содержит также степени x^n $(n = 1, 2, \ldots)$. Если указанная топология является T_1-топологией, то существует такая окрестность элемента x, которая не содержит элемента x^2, отличного от x. Следовательно, должно иметь место $x^2 = x$, т.е. каждый элемент $x \in S$ должен быть идемпотентом. Значит, из а) вытекает г). Если каждый элемент $x \in S$ является идемпотентом, то топология из теоремы 1 является дискретной топологией, т.е. из г) следует в). Из в) же очевидно следует б), и на этом доказательство заканчивается.

Пример 4. Пусть S — полугруппа с произвольной системой образующих элементов и с определяющими соотношениями $xy = x$ для каждого $x, y \in S$. Каждый элемент этой полугруппы является идемпотентом и поэтому согласно теореме 3 топология из теоремы 1 на этой полугруппе является T_1-топологией, T_2-топологией, а также дискретной топологией.

Пример 5. Пусть полугруппа S — полуструктура. Тогда каждый ее элемент — идемпотент, а из теоремы 3 — аналогично примеру 4 — вытекает, что топология из теоремы 1 на этой полугруппе является T_1-топологией, T_2-топологией, а также дискретной топологией.

В следующей теореме и всюду в дальнейшем под порядком моногенной полугруппы (а значит, и циклической группы) мы будем понимать число элементов этой полугруппы в случае, когда она конечна, и число 0 в случае, когда она является бесконечной моногенной полугруппой.

Теорема 4. *Топология из теоремы 1 является* T_0-*топологией тогда и только тогда, когда полугруппа S не содержит циклических подгрупп порядка высшего чем 2.*

Доказательство. Когда полугруппа S содержит циклическую подгруппу порядка высшего чем 2, то эта циклическая подгруппа (она конечна) имеет хотя бы два отличные друг от друга образующие элементы a и b. Поэтому моногенная полугруппа, порожденная элементом a, содержит b, а моногенная полугруппа, порожденная элементом b, содержит a. Значит, всякая окрестность точки a содержит b и всякая окрестность точки b содержит a, т.е. рассматриваемая топология не является T_0-топологией.

Если топология из теоремы 1 не является T_0-топологией, то существует два таких отличных друг от друга элемента $a, b \in S$, что всякая окрестность элемента a содержит b и всякая окрестность элемента b содержит a. Это означает, что моногенная полугруппа A, порожденная элементом a, содержит b, и моногенная полугруппа B, порожденная элементом b, содержит a. Но тогда $B \subseteq A$ и $A \subseteq B$, т.е. $A = B$ и элементы a и b порождают одну и ту же моногенную полугруппу. Поэтому существуют такие натуральные числа m и n, что $a^m = b$ и $b^n = a$. Из этого вытекает, что $a^{m \cdot n} = (a^m)^n = b^n = a$, т.е. $a = a^{m \cdot n}$ и моногенная полугруппа A, порожденная элементом a, является циклической группой с двумя отличными друг от друга образующими элементами a и b. Поэтому циклическая группа A — порядка высшего чем 2. Значит, полугруппа S содержит циклическую группу порядка высшего чем 2, что и требовалось доказать.

Теорема 5. *Топология из теоремы 2 является* T_1-*топологией тогда и только тогда, когда полугруппа S состоит из единственного элемента.*

Доказательство. Пересечением всех окрестностей произвольно выбранного элемента $x \in S$ в T_1-пространстве является состоящее из единственного элемента множество $\{x\}$. Но так как пересечение всех сильных подполугрупп, содержащих элемент x, есть сильная подполугруппа, то $\{x\}$ является сильной подполугруппой для каждого $x \in S$ (значит, каждый элемент $x \in S$ является идемпотентом). Пусть x и y — два отличных друг от друга элементы из S и $xy = z$. Поскольку $\{z\}$ — сильная подполугруппа и $xy = z$, то должно быть $x \in \{z\}$ и $y \in \{z\}$, т.е. $x = y = z$, что противоречит предположению о том, что x и y — отличные друг от друга элементы из S. Значит, полугруппа S состоит из единственного элемента.

Справедливость обратного утверждения очевидна.

Лемма 5. *Следующие три утверждения взаимно эквивалентны:*

а) *Топология из теоремы 2 является* T_0*-топологией.*

б) *Из каждых двух разных элементов полугруппы S хотя бы один принадлежит сильной подполугруппе, не содержащей второго из них.*

в) *Никаких два разных элемента полугруппы S не порождают одну и ту же сильную подполугруппу.*

Доказательство. Из а) следует б) и в). В самом деле, если существует такая окрестность элемента a, которая не содержит элемент b, то сильная подполугруппа, порожденная элементом a, не содержит элемент b, и сильные подполугруппы, порожденные элементами a и b, отличны друг от друга.

Из б) следует а). Если существует сильная подполугруппа, содержащая элемент a и не содержащая элемент b, то и сильная подполугруппа, порожденная элементом a, не содержит элемент b, и существует окрестность элемента a, не содержащая b.

Из в) следует а). Если сильная подполугруппа A, порожденная элементом a, отлична от сильной подполугруппы B, порожденной элементом b, то либо $a \notin B$, либо $b \notin A$. (В противном случае мы имели бы $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, т.е. $A = B$.) Значит, существует либо такая окрестность элемента b, которая не содержит a, либо такая окрестность элемента a, которая не содержит b.

Пример 6. Пусть S — множество натуральных чисел с операцией, ставящей каждой паре натуральных чисел a, b в соответствие натуральное число $\min(a, b)$. S является при этой операции полугруппой. Сильной подполугруппой, порожденной элементом a, является множество всех натуральных чисел больших или равных элементу a. Разные элементы $a, b \in S$ образуют, следовательно, разные сильные подполугруппы и согласно лемме 5 топология из теоремы 2 в этой полугруппе S является T_0-топологией.

Лемма 6. *Если два элемента полугруппы S принадлежат одной и той же моногенной полугруппе, то они порождают одну и ту же сильную подполугруппу.*

Доказательство. Пусть x^m и x^n — два разных элемента моногенной полугруппы, порожденной элементом x. Тогда сильная подполугруппа, порожденная элементом x^m и элементом x^n, содержит элемент x и вместе

с ним также целую моногенную полугруппу, порожденную элементом x. Поэтому элементы x^m и x^n порождают одну и ту же сильную подполугруппу. (Мы получим ее как пересечение всех сильных подполугрупп, содержащих моногенную полугруппу, порожденную элементом x.)

Теорема 6. *Топология из теоремы 2 является T_0-топологией тогда и только тогда, когда S — коммутативная полугруппа идемпотентов.*(1)

Доказательство. Пусть топология из теоремы 2 на полугруппе S является T_0-топологией. Мы покажем, что тогда S является коммутативной полугруппой идемпотентов.

Если бы какой-нибудь элемент $x \in S$ не был идемпотентом, то мы имели бы $x^2 \neq x$ и моногенная полугруппа, порожденная элементом x, содержала бы элемент $x^2 \neq x$. Но согласно лемме 6 сильная подполугруппа, порожденная элементом x, равна сильной подполугруппе, порожденной элементом x^2. Значит, согласно лемме 5 указанная топология не была бы T_0-топологией, что противоречит предположению. Значит, каждый элемент $x \in S$ является идемпотентом.

С другой стороны, если бы полугруппа S не была коммутативной полугруппой, то существовали бы такие элементы $a, b \in S$, что мы имели бы $ab \neq ba$. Но элементы ab и ba порождают одну и ту же сильную подполугруппу (ab принадлежит сильной подполугруппе, порожденной элементом ab, поэтому к ней принадлежат также a и b, а значит, также ba — точно так же ab принадлежит сильной подполугруппе, порожденной элементом ba). Но тогда не существовало бы ни окрестности элемента ab, не содержащей ba, ни окрестности элемента ba, не содержащей ab, и приведенная топология не была бы T_0-топологией, что противоречит предположению. Значит, S является коммутативной полугруппой идемпотентов.

Теперь остается еще доказать, что в каждой коммутативной полугруппе идемпотентов топология из теоремы 2 является T_0-топологией.

Каждая коммутативная полугруппа идемпотентов является полуструктурой при частичном упорядочении, в котором $x \leqslant y$ тогда и только тогда, когда $xy = x$. Тогда сильная подполугруппа A, порожденная элементом a, является множеством всех элементов $x \geqslant a$. В самом деле, $a \in A$, а если $x \geqslant a$, то $xa = a$, а из этого следует, что и $x \in A$. Значит, каждый элемент $x \geqslant a$ принадлежит A. Но, с другой стороны, множество всех элементов x, $x \geqslant a$ является подполугруппой, а если yz принадлежит этому множеству, то $yz \geqslant a$, откуда следует, что $y \geqslant a$ и $z \geqslant a$. Поэтому

(1) На коммутативность этой полугруппы обратил мое внимание Ю. Босак, после чего теорема 6 приняла приведенный окончательный вид.

множество всех элементов $x \geqslant a$ является наименьшей сильной подполугруппой, содержащей элемент a.

Пусть a и b — два разных элемента из S, пусть A — сильная подполугруппа, порожденная элементом a, и B — сильная подполугруппа, порожденная элементом b. Если a и b несравнимы, то A не содержит b и B не содержит a. Если $a \leqslant b$, то B не содержит a, а если $b \leqslant a$, то A не содержит b. Значит, во всех случаях хотя бы один из элементов a, b имеет окрестность, не содержащую другого из них, и топология из теоремы 2 является T_0-топологией.

Следующий пример показывает, что умножение в полугруппе S при топологии из теоремы 1 может и не быть непрерывным даже тогда, когда S — коммутативная полугруппа.

Пример 7. Пусть S — полугруппа с множеством образующих элементов $\{a, b\}$ и с определяющим соотношением $xy = yx$ для каждого $x, y \in S$. Тогда $A = \{a, a^2, a^3, \ldots\}$ является моногенной полугруппой, порожденной элементом a, $B = \{b, b^2, b^3, \ldots\}$ является моногенной полугруппой, порожденной элементом b, и $C = \{ab, a^2b^2, a^3b^3, \ldots\}$ является моногенной полугруппой, порожденной элементом ab. Возьмем C в качестве окрестности элемента ab. Если взять в качестве окрестности элемента a множество A и в качестве окрестности элемента b множество B (которые являются наименьшими окрестностями соответствующих элементов), то окажется, что AB не является подмножеством C и поэтому умножение не будет в топологии из теоремы 1 непрерывным. AB не является подмножеством C, так как AB содержит, например, элемент ab^2, не принадлежащий C.

Теорема 7. *Умножение в полугруппе S являетця при топологии введенной в теореме 2, непрерывным.*

Доказательство. Пусть A — сильная подполугруппа, порожденная элементом a, B — сильная подполугруппа, порожденная элементом b, C — сильная подполугруппа, порожденная элементом ab. Сильная подполугруппа C содержит элементы a и b, поэтому она содержит также сильные подполугруппы A и B, а также их произведение AB. Так как C — наименьшая окрестность элемента ab, A — окрестность элемента a, B — окрестность элемента b, то для каждой окрестности W элемента ab существует такая окрестность A элемента a и такая окрестность B элемента b, что $AB \subseteq W$ и умножение в S непрерывно.

Наконец мы решим еще вопрос, в каких полугруппах топологии из теорем 1 и 2 эквивалентны. Справедлива следующая теорема:

Теорема 8. *Топологии из теорем 1 и 2 эквивалентны тогда и только тогда, когда S состоит из единственного элемента.*

Доказательство. Пусть S — полугруппа, в которой топологии из теорем 1 и 2 эквивалентны. Ввиду примечаний 2, 3, 4 это имеет место тогда и только тогда, когда каждая моногенная подполугруппа полугруппы S является одновременно сильной подполугруппой. Пусть $a \in S$ и A — моногенная полугруппа, порожденная элементом a. Тогда A — порядка 1. В самом деле, каждая полугруппа порядка 0 имеет собственные подполугруппы, которые должны были бы быть сильными подполугруппами, что невозможно, так как каждая из них должна была бы содержать A. Каждая конечная полугруппа порядка высшего чем 1 содержит, с другой стороны, идемпотент, т.е. собственную подполугруппу, которая должна была бы быть сильной подполугруппой, что снова таки невозможно, так как она должна была бы содержать A. Поскольку каждая моногенная полугруппа A, порожденная элементом $a \in S$ — порядка 1, то каждый элемент $a \in S$ является идемпотентом и $\{a\}$ является сильной подполугруппой для каждого $a \in S$. Из этого следует, аналогично как в доказательстве теоремы 5, что полугруппа S имеет единственный элемент. Справедливость обратного утверждения очевидна.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Александров П. С., *Введение в общую теорию множеств и функций*, Москва—Ленинград 1948.
[2] Ляпин Е. С., *Полугруппы*, Москва 1960.
[3] Шулка Р., *О нильпотентных элементах, идеалах и радикалах полугруппы*, Mat.-fyz. časopis *13* (1963), 209—222.

Поступило 21. 10. 1963.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Elektrotechnickej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej,
Bratislava

RADICALS AND TOPOLOGY IN SEMIGROUPS

Robert Šulka

Summary

Let S be a semigroup and M a nonvoid subset in S.

The set of all elements $x \in S$, for which there exists a positive integer $n(x)$, so that $x^{n(x)} \in M$, will be denoted by $\mathbf{N}(M)$.

The intersection of all completely prime ideals, which contain M, will be denoted by $\mathbf{C}(M)$.

The mappings $M \to \mathbf{N}(M)$ and $M \to \mathbf{C}(M)$ are closure operators and with each of them there is associated a topology.

The algebraic characterizations of closed and open sets and of the complete systems of neighborhoods of these topologies are given.

For the first of these topologies the following statements are equivalent:

a) it is a T_1-topology,

b) it is a T_2-topology,

c) it is the discrete topology,

d) every element of the semigroup S is idempotent.

The first of these topologies is a T_0-topology if and only if the semigroup S does not contain cyclic subgroups of higher order than 2.

The second of these topologies is a T_1-topology if and only if the semigroup S has only one element.

The second of these topologies is a T_0-topology if and only if the semigroup S is a commutative semigroup of idempotent elements.

The multiplication in the semigroup S in the first of these topologies need not be continuous, but in the second topology it is always continuous.

These topologies are equivalent if and only if S has only one element.