MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 15, 1, 1965

DIE SZÁSZSCHEN GRUPPOIDE

PETR HÁJEK, Praha

§ 1. EINLEITUNG

In der vorliegenden Arbeit behandle ich systematisch bestimmte spezielle Gruppoide, deren Existenz G. Szász in [1] bewiesen hat.(1) Dazu benütze ich gewisse wohlbekannte Begriffe und Resultate der Gruppoidtheorie,(2) die man z.B. in [2], [3], [4] finden kann. Ich übernehme die Termine aus [2]; „*Gruppoid*" bedeutet selbstverständlich „Struktur mit einer (multiplikativ geschriebenen) Verknüpfung". Das mit einer kompatiblen Klasseneinteilung definierte Gruppoid G der Untermengen eines Gruppoides G nenne ich nach [3] das *Faktoroid* von G. Eine Untermenge $U \subseteq G$ mit der Eigenschaft $GU \subseteq U$ heißt das *linksseitige Ideal* von G; ähnlich rechtsseitiges, zweiseitiges Ideal (z.B. [3]). Das Element $a \in G$, für das $ax = a$ (für jedes $x \in G$), heißt das *linksseitige Nullelement*; ist $ax = x$(für jedes $x \in G$), heißt es das *linksseitige Einselement*; ist a das linksseitige Nullelement und für $b \in G$ und jedes $x \in G$ $bx = a$, so heißt b der *linksseitige Annulator*, analog das rechts- und zweiseitige; vgl. [2], S. 45–47.

Aus [1] übernehme ich (mit einer kleinen Änderung) folgende Definitionen: Ein Tripel xyz der Elemente eines Gruppoides G heißt *assoziativ (assz.)*, wenn $(xy)z = x(yz)$, anderenfalls heißt es nichtassoziativ. xyz heißt ein *isoliertes Tripel (i. T.)* in G, falls es ein einziges nichtassoziatives Tripel von G ist, d.h. falls $(xy)z \neq x(yz)$ und für jedes $u, v, w \in G$ $(uv)w \neq u(vw) \Rightarrow (x = u \;\&\; y = v \;\&\; z = w)$. Ein Tripel xyz ist vom *Typus* (aaa), wenn $x = y = z$, vom *Typus* (aab), wenn $x = y \neq z$, ähnlich (aba), (baa), (abc).

Enthält das Gruppid ein isoliertes Tripel, so nenne ich es ein *Szászsches Gruppoid*. Den Typus seines isolierten Tripels nenne ich den *Typus* dieses Gruppoides. Ein Szászsches Gruppoid nenne ich *primitiv*, wenn es kein echtes Szászsches Untergruppoid enthält. Es sei **K** eine Klasse von Szászschen Grup-

(1) Ein Beispiel hat schon im Jahre 1947 Al. C. Climescu angeführt; s. Bemerkung 8) in [1].

(2) Und auch aus der Verbandstheorie; die die Verbände (der Gruppoide) behandelnden Sätze können beim Lesen weggelassen wurden.

poiden. Das Gruppoid $V \in \mathbf{K}$ ist *$\mathbf{K}$-frei*, wenn jedes Gruppoid aus K sein homomorphes Bild ist. Das Szászsche Gruppois M ist *minimal*, wenn keines von seinen echten homomorphen (d.h. homomorphen, aber nicht isomorphen) Bildern szászsch ist. Die Klasse $\mathbf{K}$ von Szászschen Gruppoiden is *perfekt*, wenn ein $\mathbf{K}$-freies Gruppoid existiert und wenn jedes von seinen homomorphen Szászschen Bildern ein $\mathbf{K}$-Gruppoid ist.

In [1] werden nach diesen Definitionen 5 primitive minimale Szászsche Gruppoide angegeben; je ein von jedem Typus. In der vorliegenden Arbeit werden die Eigenschaften der Szászschen Gruppoide behandelt und die Klassifikation der primitiven Szászschen Gruppoide von Typen (aaa), (aab) und (baa) wird durchgeführt. Es wird gezeigt, daß die primitiven Szászschen Gruppoide vom Typus (aaa) eine perfekte Klasse bilden; die vom Typus (aab) bzw. (baa) werden in je 17 perfekte Klassen eingeteilt. (Die primitiven Szászschen Gruppoide von Typen (aba) und (abc) werden außer Acht gelassen.)

Hilfssätze. 1.1. *Die Klasseneinteilung – im Gruppoid G ist dann und nur dann kompatibel, wenn* $(k, h, r \in G)$ $(\bar{k} = \bar{h} \Rightarrow (\overline{kr} - \overline{hr} \;\&\; \overline{rk} = \overline{rh}))$. [1], S. 102.

1.2. *Es sei U ein Ideal von G. Gilt $x \in U \Rightarrow \bar{x} = U$, $\Rightarrow \bar{x} = (x)$,* (3) *so ist die Klasseneinteilung – kompatibel.*

Diese Klasseneinteilung ist die sog. Reessche Einteilung; die Bedingung aus 1.1 ist dafür leicht zu beweisen. Das durch bestimmte Faktoroid von G werde ich das zu U gehörige Faktoroid nennen. S. auch [4], S. 382.

1.3. *Die Menge $\mathbf{G}$ aller Faktoroide eines Gruppoides G kann halbgeordnet werden, wenn man für kompatible Einteilungen* $^{-}, {}^{=}$ $\bar{\bar{G}} \leq \bar{G} \equiv (x, y \in G)$ $(\bar{x} = \bar{y} \Rightarrow \bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}})$ *definiert,* (4) *$\mathbf{G}$ mit dieser Halbordnung ist ein vollständiger Verband.* Siehe [4], S. 365.

1.4. *Es sei G ein Gruppoid, $x, y, z \in G$. Ist x ein linksseitiges Eins- oder Nullelement oder Annulator oder ist z ein rechtsseitiges Eins- oder Nullelement oder Annulator oder ist eines der Elemente x, y, z ein (zweiseitiges) Eins- oder Nullelement oder Annulator, so ist xyz assz.* Siehe [1], Hilfssätze.

1.5. *Es sei G ein Gruppoid, $C \subseteq G$. Ist für beliebiges $x, y \in G$, $z \in C$ das Tripel xyz assz., so ist das Tripel xyz für beliebiges $x, y \in G$, $z \in \{C\}$ assz.* Siehe [2], S. 53 (Satz 30).

(3) Ich bezeichne mit $(x, \ldots, y)$ die genau die Elemente $x, \ldots, y$ enthaltende Menge; x und (x) werden aber oft nicht unterschieden. Ist G ein Gruppoid, $C \subseteq G$, so bezeichnet $\{C\}$ das durch die Elemente von C erzeugte (generierte) Untergruppoid von G.

(4) $(x \in A)(P(x))$ lese man „für alle $x \in A$ ist $P(x)$"; $(\exists x \in A)(P(x))$ lese man „es existiert ein $x \in A$, so daß $P(x)$"; $(\lambda x \in A)(P(x))$ bedeutet „Menge aller $x \in A$, für die $P(x)$". Ist $\mathbf{K}$ eine Klasse von Gruppoiden, so sage ich „$\mathbf{K}$-Gruppoid" statt „Gruppoid aus $\mathbf{K}$".

2.1. (Hauptsatz für die Szászschen Gruppoide.) *Ist xyz das i.T. des Szászschen Gruppoides G, u eines der Elemente des i.T., $s, t \in G$, so gilt*

1) $u = st \Rightarrow (u = s \vee u = t)$,
2) $x = xt \Rightarrow ((t = y \;\&\; yz = z) \vee (ty = y) \vee (t = y \;\&\; y = z))$,
3) $y = yt \Rightarrow ((t = z) \vee (tz = z) \vee (t = x \;\&\; xy = x) \vee (t = y \;\&\; y = x))$,
4) $y = sy \Rightarrow ((s = x) \vee (sx = x) \vee (s = y \;\&\; yz = z) \vee (s = y \;\&\; y = z))$,
5) $z = sz \Rightarrow ((s = y \;\&\; xy = x) \vee (ys = y) \vee (s = y \;\&\; y = x))$.

Beweis. Sollte in folgenden Gleichheiten für jedes Gleichheitszeichen mindestens eine der darunter geschriebenen Bedingungen gelten, so wären alle Gleichheiten bewiesen, was aber zum Widerspruch führen müßte mit der Voraussetzung, dass xyz das i.T. von G ist.

$$u = x \qquad (st \cdot y)z \underset{\substack{s \neq x \\ t \neq y \\ y \neq z}}{=} (s \cdot ty)z \underset{\substack{s \neq x \\ ty \neq y}}{=} s(ty \cdot z) \underset{t \neq x}{=} s(t \cdot yz) \underset{\substack{s \neq x \\ t \neq y \\ yz \neq z}}{=} st \cdot yz$$

$$u = y \qquad x(st \cdot z) \underset{\substack{s \neq x \\ t \neq y}}{=} x(s \cdot tz) \underset{\substack{s \neq y \\ tz \neq z}}{=} xs \cdot tz \underset{\substack{xs \neq x \\ t \neq y}}{=} (xs \cdot t)z \underset{\substack{s \neq y \\ t \neq z}}{=} (x \cdot st)z$$

$$u = z \qquad xy \cdot st \underset{\substack{t \neq z \\ s \neq y \\ xy \neq x}}{=} (xy \cdot s)t \underset{s \neq y}{=} (x \cdot ys)t \underset{\substack{t \neq z \\ ys \neq y}}{=} x(ys \cdot t) \underset{\substack{t \neq z \\ s \neq y \\ y \neq x}}{=} x(y \cdot st)$$

Es müssen also in jedem der Fälle $u = x$, $u = y$, $u = z$ für *eines* der Gleichheitszeichen *alle* darunter geschriebenen Bedingungen mit dem Gleichheitszeichen statt des Ungleichheitszeichen zur Geltung kommen. Daraus ergeben sich leicht alle Behauptungen des Satzes.

Folgerungen. *Wenn man eines der Elemente des i.T. wegläßt, entsteht eine Halbgruppe. Weiter erzeugt jede Untermenge eines Szászschen Gruppoides G, die nicht alle Glieder des i.T. enthält, eine Unterhalbgruppe von G. Namentlich sind in jedem Szászschen Gruppoid alle Potenzen eindeutig bestimmt.*

Alle diese Folgerungen ergeben sich aus der Behauptung 1) des Hauptsatzes, die man folgendermaßen ausdrücken kann: das Element u des i.T. in der Cayleyschen Tafel des Szászchen Gruppoides kann höchstens in der dem Element u entsprechenden Zeile bzw. Spalte vorkommen.

2.2. *Das homomorphe Bild des Szászschen Gruppoides ist entweder szászsch, oder eine Halbgruppe; das isomorphe Bild desselben ist szászsch.*

Beweis. Dies folgt daraus, daß wenn – ein Homomorphismus, und xyz

ein assz. Tripel ist, so ist auch xyz assz. Durch einen Homomorphismus kann das i.T. assz. werden, durch einen Isomorphismus nicht.

2.3. Ist $^-$ ein Homomorphismus des Szászschen Gruppoides G (dessen i. T. xyz ist) auf das Szászsche Gruppoid H (dessen i. T. uvw ist), so sind $\bar{x} = u$, $\bar{z} = v$, $\bar{z} = w$ und u, v, w haben keine anderen Urbilder.

Beweis. Es sei $\bar{p} = u, \bar{q} = v, \bar{r} = w$ für $p, q, r \in G$. Sollte $p = x$ & $q = y$ & $r = z$ nicht gelten, su müßte das Tripel pqr in G assz. sein und mithin auch uvw in H. Das wäre aber ein Widerspruch; x ist also das einzige Urbild von u, analog y, z.

Folgerung. *Die homomorphen Gruppoide G, H sind also von einem und demselben Typus; sind G, H Szászsche Gruppoide von verschiedenen Typen, so existiert kein Homomorphismus von G auf H.*

2.4. *Ist H ein Szászsches homomorphes Bild des primitiven Szászschen Gruppoides G, so ist H primitiv.*

Beweis. Sollte H ein echtes Szászsches Untergruppoid H' enthalten so wäre die Menge der Urbilder der Elemente von H' ein echtes Szászsches Untergruppoid von G.

2.5. *Es seien H, K die Szászschen Faktoroide des primitiven Szászchen Gruppoides G. Es existiert ein Homomorphismus von H auf K dann und nur dann, wenn $K \leqq H$.*

Beweis. Die Behauptung „dann" ist trivial (s. [2], Bemerkung S. 159). Zum Beweis der Behauptung „nur dann" benützen wir die Tatsache, daß ein primitives Szászsches Gruppoid offenbar durch die Glieder seines i. T. xyz erzeugt wird; da bei einem beliebigen Homomorphismus von G auf K die Bilder von x, y, z auf Grund von 2.3 eindeutig bestimmt sind, ist auch dieser Homomorphismus eindeutig bestimmt (S. [2], S. 100). Es sei $^-$ der Homomorphismus von G auf H, $^=$ der Homomorphismus von G auf K, f ein Homomorphismus von H auf K. Das Produkt der Homomorphismen f und $^-$ ist ein Homomorphismus von G auf K, nach dem oben Gesagten gilt also $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}} = f(\bar{x}) = f(\bar{y})$. Ist für $x, y \in G$ $\bar{x} = \bar{y}$, so ist $f(\bar{x}) = f(\bar{y})$ und daraus $\bar{\bar{x}} = \bar{\bar{y}}$, was $K \leqq H$ bedeutet.

Folgerungen. *Keine zwei verschiedenen Szászschen Faktoroide des primitiven Szászschen Gruppoides sind isomorph. Ist H das Szászsche homomorphe Bild des primitiven Szászschen Gruppoides G, so ist H mit einem und nur einem Faktoroid von G isomorph.* Danach kann man jedes Gruppoid einer perfekten Klasse **K** primitiver Szászscher Gruppoide mit einem eindeutig bestimmten Faktoroid des **K**-freien Gruppoides indentifizieren; ich werde es tun.

2.6. *Es sei **K** eine perfekte Klasse primitiver Szászscher Gruppoide. Das Gruppoid $M \in$ **K** ist minimal im Sinne der obigen Definition (sz-minimal) dann und nur dann, wenn es ein minimales Element der halbgeordneten Menge der Szászschen Faktoroide des **K**-freien Gruppoides V_K (ho-minimal) ist.*

Beweis. Es sei M ho-minimal. Das bedeutet, daß kein $N \in K$ mit der Eigenschaft $N < M$ existiert, nach 2.5 ist also kein Faktoroid von V_K, das ein echtes homomorphe Bild von M ist, szászsch. Weil aber jedes homomorphe Bild von M offenbar mit irgendwelchem Faktoroid von V_K isomorph ist, können wir schließen, daß kein echtes homomorphes Bild von M szászsch ist; M ist sz-minimal. Es sei M nicht ho-minimal. Es existiert ein $N \in$ **K** mit der Eigenschaft $N < M$; nach 2.5 ist also N ein echtes (szászsches) homomorphes Bild von M; M ist nicht sz-minimal.

2.7. *Es seien H, K Faktoroide des Szászschen Gruppoides G, und zwar es sei H szászsch. Ist $H \leqq K$, so ist K szászsch.*

Beweis. Nach 2.2 kann K szászsch oder eine Halbgruppe sein; wäre K eine Halbgruppe, so wäre es auch H, weil H das homomorphe Bild von K ist.

2.8. *Es sei **K** eine perfekte Klasse primitiver Szászscher Gruppoide, V_K ein **K**-freies Gruppoid, **W** der vollständige Verband aller seiner Faktoroide (im Sinne der obigen Bemerkung ist **K** $\subseteq$ **W**. 1) **K** ist ein vollständiger Vereinigungsunterhalbverband von **W**. 2) **K** ist ein Verband (also: ein vollständiger Unterverband von **W**) dann und nur dann, wenn das kleinste **K**-Gruppoid existiert.*

Beweis. Es sei **F** eine nichtleere Menge Szászschen Faktoroide von W_K. Es existiert sup **F** $= S$ in **W**; es gilt $H \leqq S$ für beliebiges $H \in$ **F**. Nach 2.7 ist also S szászsch und wegen der Perfektheit von **K** ist $S \in$ **K**. **K** ist also ein vollständiger Vereinigungsunterhalbverband von **W**. Enthält **K** ein kleinstes **K**-Gruppoid M, so gilt $M \leqq H$ für jedes $H \in$ **F** und daraus folgt $M \leqq \inf$ **F**. Auf Grund von 2.7 ist $\inf$ **F** $\in$ **K**. Enthält **K** kein kleinstes Element, so ist es kein Verband. Nach dem folgenden Lemma existiert in diesen Fall in **K** ein minimales **K**-Gruppoid M, das kein kleinstes Element von **K** ist; es existiert also ein $N \in$ **K**, so daß $\inf(M, N)$ in **K** nicht existiert.

2.9. Lemma. *Ist **K** eine perfekte Klasse primitiver Szászscher Gruppoide, so existiert in **K** ein minimales Gruppoid.*

Beweis. Dies folgt aus dem Lemma von Zorn. Ist nämlich **F** eine durch $\leqq$ $\leqq$ geordnete Untermenge von **K**, so ist inf **F** $\in$ **K**. Es sei xyz das i. T. von V_K, $xy \,.\, z = h$, $x \,.\, yz = d$, es sei **F'** die Menge der den Elementen von **F** entsprechenden Einteilungen von V_K. Für jedes $f \in$ **F'** is $f(h) \cap f(d) = \emptyset$ und als auch $\bigcup_{f \in F} f(d) \cap \bigcup_{f \in F} f(h) = \emptyset$; $\bigcup_{f \in F} f(d)$, $\bigcup_{f \in F} f(h)$ sind aber die dem d bzw. h entsprechenden Elemente von inf **F**. In inf **F** gilt also $xy \,.\, z = x \,.\, yz$, inf **F** $\in$ **K** und die Voraussetzungen des Lemmas von Zorn sind erfüllt.

§. 3. VORBEMERKUNGEN ZUR KLASSIFIKATION

Zur konkreten Klassifikation der primitiven Szászschen Gruppoide von Typen (aaa), (aab) und (baa), die ich kurz ***a**-Gruppoide* bzw. *(**aab**)-Gruppoide* bzw. *(**baa**)-Gruppoide* nennen werde, brauche ich folgende Erläuterungen.

„*Folge*" bedeutet immer „endliche Folge von Elementen bestimmter Menge"; die Anzahl der Elemente der Folgte x nenne ich die *Länge* von x und bezeichne sie Ix. Für die Folge $x = x_1 \ldots x_n$ setze ich $*x = x_2 \ldots x_n$, $x_* = x_1 \ldots x_{n-1}$, $*x_* = x_2 \ldots x_{n-1}$ (letzteres nur im Fall $Ix \geqq 2$). ([5]) Eine Menge V von Folgen nenne ich vollständig, wenn $(x \in V \,\&\, Ix > 1 \Rightarrow x_* \in V \,\&\, *x \in V)$. Eine Folge x, deren Elemente Folgen sind, nenne ich die *Folge von Folgen*; die Elemente von x nenne ich *innere Folgen*. Wenn ich über eine vollständige Menge von Folgen von Folgen spreche, fordere ich, daß sie als eine Menge von Folgen vollständig sei und daß auch die inneren Folgen eine vollständige Menge bilden.

Es sei G ein Gruppoid, x eine Folge von Elementen von G. Ich definiere üblicherweise (s. [3], S. 82) das *Produkt von* x (wir bezeichnen es $\bar{x}$) durch Induktion nach $Ix = n : n = 1 \Rightarrow \bar{x} = x$; $n = 2 \Rightarrow \bar{x} = x_1 \,.\, x_2$;

$$n \geqq 3 \Rightarrow \bar{x} = \bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{x_1 \ldots x_i} \,.\, \overline{x_{i+1} \ldots x_n} \,.\,(^6)$$

Eine Folge $x = x_1 \ldots x_n$ ist *assz.*, wenn das Produkt jeder Folge $x_i x_{i+1} \ldots x_j$ $(1 \leqq i \leqq j \leqq n)$ eine einelementige Menge ist. Ich betrachte auch Folgen assoziativer Folgen von Elementen eines Gruppoides (kurz Folgen a.F.). Ist $x = x_1 \ldots x_n$ eine Folge a.F., so definiere ich das Produkt von x $\bar{\bar{x}} = \overline{\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n}$ ($\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n$ ist offenbar eine Folge von Elementen unseres Gruppoides). x heißt assz., falls die Folge $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n$ assz. ist.([7])

Ist V eine Menge assoziativer Folgen und x eine assz. Folge, so nenne ich x *einfach unter allen Folgen aus* V *(in* G*)*, falls für jedes $y \in V$ $x \neq y \Rightarrow \bar{x} \neq \bar{y}$. Dasselbe für den Fall, dass V eine Menge assoziativer folgen a.F. ist.

Hilfssätze. 3.1. *Es sei V eine Menge assoziativer Folgen eines Gruppoides G, es sei die Menge der Produkte aller Folgen aus V ein Untergruppoid $G' \subseteq G$. Ist in V eine Multiplikation so definiert, daß das Produkt der Folgen x, y eine Folge z ist, deren Produkt $\bar{z}$ dem Produkt der Produkte $\bar{x}$, $\bar{y}$ gleich ist, so ist die Abbildung $x \to \bar{x}$ ein Homomorphismus von V auf G'.* (Offenbar.)

3.2. *Es sei V eine vollständige Menge von Folgen eines Szászschen Gruppoides, V_3 die Menge aller Folgen aus V von der Länge höchstens 3. Sind alle Folgen aus V_3 assz. und sind die Glieder des i. T. einfach unter allen Folgen aus V_3, so sind alle Folgen aus V assz. und die Glieder des i. T. sind einfach unter allen Folgen aus V.*

([5]) s. [2] S. 169. Ist $Ix = 1$, so ist $*x$ das leere Symbol u. dgl.

([6]) Das Produkt hinter dem Symbol $\bigcup$ muß als das Produkt der Untermengen aufgefaßt werden; s. Bemerkung ([3]).

([7]) Die Folge, die durch Juxtaposition der inneren Folgen entsteht, braucht dabei keineswegs assz. sein; es sind nur „gewisse Einklammerungen" zulässig.

Beweis. Es bezeichne V_n die Menge aller Folgen aus V von der Länge höchstens n, es gelte unsere Behauptung für V_n, $n \geqq 3$. Es sei $x = x_1 \ldots x_{n+1}$, $x \in V_{n+1}$. Jede Folge $x_i x_{i+1} \ldots x_j$ der Länge $\leqq n$ ist nach der Induktionsannahme assz. und im Fall $j \neq i$ von allen Gliedern des i. T. verschieden. Jedes $v \in \bar{x}$ kann man als $\overline{x_1 \ldots x_i} \,.\, \overline{x_{i+1} \ldots x_n}$ schreiben; ist $i > 1$, so ist $v = (x_1 \,.\, \overline{x_2 \ldots x_i})\overline{x_{i+1} \ldots x_n} = x_1 \,.\, \overline{x_2 \ldots x_n}$, weil eine der Folgen $x_2 \ldots x_i$, $x_{i+1} \ldots x_n$ sicher die Länge > 1 hat und $\overline{x_1 x_2 \ldots x_i}\,\overline{x_{i+1} \ldots x_n}$ mithin nicht das i. T. ist; x ist also assz.; aus $x = \overline{x_1 x_2} \,.\, \overline{x_3 \ldots x_n}$ und dem Hauptsatz folgt nach der Induktionsannahme, daß x von allen Gliedern des i. T. verschieden ist.

Folgerung. *Ist V eine vollständige Menge von Folgen von Folgen eines Szászschen Gruppoides, und will man sich überzeugen, das es sich um eine Menge assoziativer Folgen a.F. handelt, so genügt es zu zeigen, daß alle inneren Folgen von der Länge $\leqq 3$ assz. und die Glieder des i. T. unter ihnen einfach sind und dann dasselbe für die Folgen der (äußeren) Länge $\leqq 3$ nachzuweisen.*

3.3. *Ist G ein Szászsches Gruppoid vom anderen Typus als (aaa) und u ein Glied des i. T., für das $u^2 = u = u^3$ gilt, so ist $u^n = u$ für alle $n > 1$.*

Beweis. Es genügt in 3.2 für V die vollständige Menge der Folgen $u \ldots u$ beliebiger Länge zu wählen.

3.4. *Es sei **K** eine Klasse primitiver szászscher Gruppoide, V_K ein **K**-freies Gruppoid, dessen Elemente eine vollständige Menge von Folgen der Elemente einer Menge A bilden, es sei für jedes $c \in A$ das Bild von c beim Homomorphismus von V_K auf sein beliebiges zu **K** zugehöriges Faktoroid G die einelementige c enthaltende Klasse.*([8]) *Es seien im beliebigen $G \in$ **K** alle Folgen aus V_K assz. Es sei $U \subseteq V_K - A$ ein Ideal, das zu U zugehörige Faktoroid M sei ein **K**-Gruppoid, es sei jede Folge aus $V_K - U$ im beliebigen $G \in$ **K** einfach. Dann ist M das kleinste **K**-Gruppoid.*

Beweis. Für jedes Faktoroid G von V_K, das zu **K** gehört, ist $M \leqq G$, weil beim Homomorphismus von V_K auf G nur Elemente von U identifiziert werden können.

Es werden folgende Verkürzungen benutzt. Ist neben dem Implikationzeichen eine Nummer geschrieben, weist es auf den Satz hin, durch den die Implikation berechtigt ist. Ist neben dem Gleichheitszeichen eine Ziffer geschrieben, weist sie auf eine unmittelbar folgende und mit dieser Ziffer bezeichnete Bemerkung (Erläuterung oder Voraussetzung) hin, durch die die Gleichheit berechtigt ist. (.c) hinter einer Gleichheit bedeutet, dass diese Gleichung mit c von rechts aus multipliziert werden soll, analog (c.). Statt „das Produkt der Produkte der Folgen x, y der Elemente des Gruppoides G

([8]) Wir nehmen stillschweigend an, daß alle Elemente von A die einelementigen Folgen aus V_K sind; im anderen Fall könnten wir wegen der Vollständigkeit A verkleinern. (A wird immer die Glieder des i. T. enthalten.) Alle Elemente aus A sind also auch Elemente des beliebigen Szászschen Faktoroid von V_K.

ist gleich dem Produkt der Folge z" sage ich kurz „in G ist $xy = z$" (ich sollte $\bar{x} \,.\, \bar{y} = \bar{z}$ schreiben); ich fasse also die Folge in G als einen „Ausdruck" auf.

Jetzt kann ich schon die perfekten Klassen primitiver Szászscher Gruppoide konstruieren. Für jede Klasse **K** definiere ich ein Gruppoid V_K, dessen Elemente eine vollständige Menge von Folgen der Elemente einer (zwei- bis vierelementigen) Menge bzw. eine vollständige Menge von Folgen solcher Folgen bilden. Ich nenne die Elemente von V_K **K**-Folgen. Ich beweise dann, dass V_K **K**-frei ist, d.h.

1. ich beweise, dass es szászsch und ein Element von **K** ist;

2. für ein beliebiges **K**-Gruppoid G ordne ich die (inneren) Folgen der Länge 1 aus V_K gewissen Elementen von G (darunter den Gliedern des i. T.) zu. Dann stelle ich fest, dass diese Elemente verschieden und die Folgen (von Folgen) dieser Elemente, welche den **K**-Folgen entsprechen, assz. sind. Dann bilde ich eine kompatible Klasseneinteilung von V_K derart, daß zwei Elemente dann und nur dann in ein und derselben Klasse sind, wenn ihr Produkt (in G) ein und dasselbe Element von G ist. So entsteht der Homomorphismus von V_K auf G. Danach ist schon in den betrachteten Klassen von Gruppoiden immer klar, daß sie perfekt sind.

Weiter stelle ich fest, ob es das kleinste **K**-Gruppoid gibt. Ist dies nicht der Fall, so finde ich mindestens zwei minimale **K**-Gruppoide.

Im § 4 werden **a**-Gruppoide, in den §§ 5,6 die (**aab**)-Gruppoide betrachtet. Alle (**baa**)-Gruppoide sind offenbar genau alle zu den (**aab**)-Gruppoiden entgegengesetzte Gruppoide; sie werden also auch beschrieben.

§ 4. **a**-GRUPPOIDE

Wir bezeichnen mit **a** die Klasse aller **a**-Gruppoide. **a**-Folgen von der Länge $\leqq 3$ seien: $a, b, ab, ba, bb, aba, abb, bbb$; es seien weiter **a**-Folgen die Folgen $x = x_1 \dots x_n$ von der Länge $n \geqq 4$ der Elemente a, b, für welche $x_2 = \dots = x_n = b$. Ich definiere die Höhe der **a**-Folge x (bezeichne Ex) : $Ea = 1, Eb = 2, E(x_1 \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} Ex_i$. Es gibt genau 2 **a**-Folgen der Höhe 3 bzw. 4 und genau je 1 **a**-Folge jeder anderen (natürlichen) Höhe. Die **a**-Folge der Höhe $n \geqq 5$ bezeichne ich a^n (ich spreche aber über keine Potenzen von a). Das Gruppoid V_a ist durch die Tafel T0.1 definiert.

	a	b	ab	ba	bb	aba	a^n
a	b	ab	bb	aba	a^5	a^5	a^{n+1}
b	ba	bb	a^6	a^5	a^6	a^6	a^{n+2}
ab	aba	a^4	a^5	a^6	a^7	a^7	a^{n+3}
ba	bb	a^5	a^6	a^6	a^7	a^7	a^{n+3}
bb	a^5	a^6	a^7	a^7	a^8	a^8	a^{n+4}
aba	a^5	a^6	a^7	a^7	a^8	a^8	a^{n+4}
a^m	a^{m+1}	a^{m+2}	a^{m+3}	a^{m+3}	a^{m+4}	a^{m+4}	a^{n+m}

T0.1

4.1. *V_a ist **a**-frei, **a** ist perfekt.*

Beweis. 1. V_a ist szászsch: aaa ist nicht assz.; weil die Höhe des Produkts zweier **a**-Folgen der Summe der Höhen der Faktoren gleich ist, ist offenbar jedes Tripel mit der Summe der Höhen der Glieder $\geqq 5$ assz.; die Assoziativität der Tripel der Höhe 4 (baa, aba, aab) ergibt sich aus der Multiplikationstafel. V_a ist offenbar primitiv vom Typus (aaa), also ein **a**-Gruppoid.

2. Es bleibt zu zeigen, daß man im beliebigen **a**-Gruppoid „nach der Tafel T0.1 rechnet" (s.3.1). Als Hilfsmittel führen wir die **aa**-Folgen ein. Dies seien die Folgen der Elemente a, b, in denen keine zwei Nachbarglieder gleichzeitig a sind Jede **a**-Folge ist also eine **aa**-Folge. Ebenso, wie für **a**-Folgen, definiert man die Höhe der **aa**-Folge. Es sei im beliebigen **a**-Gruppoid Ga das Glied des i. T., b sein Quadrat: $b = a^2$. Dann ergibt sich aus 3.2, daß alle **aa**-Folgen in G assz. sind und a unter ihnen einfach ist. Die **aa**-Folgen der Länge $\leqq 3$ sind nämlich

$$a,\ b,\ ab,\ ba,\ bb,\ aba,\ abb,\ bab,\ bba,\ bbb. \qquad (*)$$

Alle diese Folgen sind sicher assz., wenn offenbar $b \neq a$ (im Fall $a^2 = a$ wäre aaa assz.), die Folgen der Länge $\leqq 3$ aus (*) sind also vom i. T. verschieden. Aus 2.1 3), 4) ergibt sich für $x = y = z = a = u$ die Equivalenz $au =^{\bullet} a \equiv \equiv ua = a$ und darum kann weder ab noch ba gleich a sein. Sollte in G $aba = a$ sein, so müsste wegen 2.1 1) auch $ba \,.\, a = b \,.\, aa = bb = a$ sein; aba und alle übrigen aus (*) sind also wegen 2.1 1) von a verschieden. Siehe 3.2.

Für die **aa**-Folgen der Länge 1 ist in G offenbar

$$a \,.\, a = b, \quad a \,.\, b = ab, \quad b \,.\, a = ba, \quad b \,.\, b = bb \qquad ({*}{*})$$

Es seien x, y **aa**-Folgen. Es ist in G

$$x \,.\, y = x_* x_p \cdot y_1 {}^*y = (x_* x_p \cdot y_1) {}^*y = (x_* \,.\, x_p y_1) {}^*y, \ (^9) \qquad ({*}{*}{*})$$

was aber dem Produkt der Folge $x_* u {}^*y$ ($u = x_p \,.\, y_1$ nad (**)) gleich ist; $x_* u {}^*y$ ist eine **aa**-Folge, ihre Höhe ist $Ex + Ey$. Alle Gleichheiten in (***) sind dadurch berechtigt, daß mindestens eines der Elemente x_*, x_p und auch y_1, ${}^*y$ von a verschieden ist und deswegen kein der Tripel in (***) isoliert ist (der Fall, daß x_* oder ${}^*y$ leer ist, macht keine Schwierigkeiten). Das Produkt zweier **a**-Folgen ist also in G einer **aa**-Folge z gleich, die höchstens zweimal a enthält. Ist sie nicht aba, so hat sie die Höhe $\geqq 5$. In G ist $bab = (aa \,.\, a)b = (a \,.\, aa)b = abb$, anal. $bab = bba$. Ist $Ez = 5$, so ist danach z in G abb, also einer **a**-Folge gleich. Ist $Ez \geqq 5$, so enthält sie mindestens

(9) Der Index p soll keine Zahl bedeuten; es bezeichnet das letzte Glied gegebener Folge. Dasselbe menchmal im weiteren.

zweimal b. Enthält z zweimal a, so ermöglichen die Gleichungen $abb = bab = bba$ zu z solche zwei $\mathfrak{aa}$-Folgen u, v zu finden, daß $z = uv$ in G, $u = u_*a$, $v = a^*v$ und u_*, $^*v$ kein a enthalten (man kann die beiden a „auf Nachbarplätze umstellen"); aus dem oben Gesagten folgt $z = u_*b^*v$ in G, was aber die $\mathfrak{a}$-Folge der Höhe Ez ist. Enthält z ein einziges a, so ermöglichen die obigen Gleichungen dieses a „auf den ersten Platz umzustellen", also $x \cdot y$ als die $\mathfrak{a}$-Folge der Höhe Ez auszudrücken. Enthält z kein a, so ist es eine $\mathfrak{a}$-Folge. Siehe (jetzt) 3.1; jedes $\mathfrak{a}$-Gruppoid ist ein homomorphes Bild von V_a, V_a ist $\mathfrak{a}$-frei. Weil nach der Folgerung von 2.3 und nach 2.4 jedes homomorphe Bild von V- ein $\mathfrak{a}$-Gruppoid ist, ist $\mathfrak{a}$ perfekt.

4.2. 1) *Im beliebigen $\mathfrak{a}$-Gruppoid G ist b einfach unter allen $\mathfrak{a}$-Folgen.* 2) *Mindestens eine der Folgen ab, ba ist einfach in G unter allen $\mathfrak{a}$-Folgen; ist eine der Folgen ab, ba nicht einfach, so ist in G $aba = bb$.* 3) *Es existieren genau zwei minimale $\mathfrak{a}$-Gruppoide; das eine wird durch die Tafel* T0.2 *definiert, das zweite is ihm entgegengesetzt.*

	a	b	c	d
a	b	c	d	d
b	d	d	d	d
c	d	d	d	d
d	d	d	d	d

T0.2

Beweis. 1) (alle Gleichheiten in G.) $b = ab \Rightarrow_{(a.)} ab = bb \Rightarrow b = bb$, $E(bb) = 4$, anal. $b = ba$. Sollte $b = s$, $Es = 4$ sein, so wäre $_{(a.)}\Rightarrow ab = a^{n+1}$, $_{(.a)}\Rightarrow ba = a^{n+1}$, Widerspruch. Es muß $ab \neq ba$!)

2) Es sei $ab = s$, $n = Es \geqq 4$; $_{(a.)}\Rightarrow bb = a^{n+1}$, anal. $_{(.a)}\Rightarrow aba = a^{n+1}$. Durch wiederholtes Multiplizieren der Gleichheit $ab = s$ mit beliebiger Folge der Höhe $n - 3$ finden wir $ab = a^{n+k(n-3)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Sollte noch $ba = t$, $Et = m \geqq 4$ sein, so wäre $ba = a^{m+h(m-3)}$; im Fall $n = 4$ bekommen wir $ab = a^p$ $(p \geqq 5)$, also $ab = ba$; im Fall $m = 4$ anal., im Fall $n, m \geqq 5$ wählen wir $k = m - 4$, $h = n - 4$ und bekommen $ab = ba = a^{mn-3n-3m+12}$, Widerspruch.

3) Es sei $\mathfrak{a}_1$ die Klasse $\mathfrak{a}$-Gruppoide, in denen ab unter allen $\mathfrak{a}$-Folgen einfach ist, anal. $\mathfrak{a}_2$ für ba. Es ist $\mathfrak{a}_1 \cup \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ sind zwei (undisjunkte) Klassen von $\mathfrak{a}$-Gruppoiden, das freie Gruppoid der beiden Klassen ist $V_a \cdot U_1 = V_a - (a, b, ab)$ bzw. $U_2 = V_a - (a, b, ba)$ ist ein Ideal in V_a. Auf a_i, V_a, U_i $(i = 1, 2)$ können wir 3.4 anwenden; für $i = 1$ bekommen wir das Gruppoid M_1 aus T0.2, für $i = 2$ das dem M_1 entgegengesetzte Gruppoid M_2. M_1, M_2 sind genau alle minimalen $\mathfrak{a}$-Gruppoide.

4.3. (Alle $\mathfrak{a}$-Gruppoide.) *Die Klasseneinteilung von V_a, die aba, bb und nur diese gleichstellt, ist kompatibel; es sei V'_a das zugehörige Faktoroid. V_a aund V'_a sind alle unendlichen $\mathfrak{a}$-Gruppoide Bezeichnen wir in V'_a $aba = bb = a^n$. Genau alle endlichen $\mathfrak{a}$-Gruppoide entstehen auf diese Weise: es seien m, n natürliche Zahlen, die die Bedingung $3 < m < n$ bzw. $2 < m < n$ erfüllen, es sei weiter x eine beliebige $\mathfrak{a}$-Folge der Höhe m. Man definiert die kompatible Klasseneinteilung von V_a bzw. V'_a durch die Gleichungen $x = a^{n+k(n-m)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$,*

$$(u > v > m \,\&\, u = v \bmod (n - m)) \Rightarrow a^u = a^v .$$

(Dies sind genau alle in dem durch die Gleichung $x = a^n$ definierten Faktoroid von V_a bzw. V'_a zu geltenden Gleichungen außer $s = s$ für alle s.)

Beweis. Weil für $x, y \in V_a$ $E(x \cdot y) = Ex + Ey$ und für jedes $n \geqq 5$ genau ein $x \in V_a$ der Höhe n existiert, ist das Gleichsetzen von aba, bb kompatibel. Jede andere einem $\mathfrak{a}$-Faktoroid G von V_a entsprechende Klasseneinteilung muß zwei Elemente verschiedener Höhen gleichsetzen; es sei x eine Folge der kleinsten Höhe, die durch - mit einer Folge größerer Höhe gleichgesetzt wird; es muß $Ex \geqq 3$ sein. Sind durch - aba, bb gleichgesetzt, (das muß z.B. nach 4.2 2) immer der Fall sein, wenn $Ex = 3$), so können und werden wir das durch - definierte Faktoroid von V_a als Faktoroid von V'_a auffassen. Ist in G nicht $aba = bb$ und ist $Ex = 4$, so können wir analog zum Beweis von 4.2 2) beweisen, daß die von x verschiedene Folge der Höhe 4 einfach ist. Nach diesen Bemerkungen kann man schon leicht — analog zur Diskussion der zyklischen (monogenen) Halbgruppen (vgl. z.B. [4] S. 151ff) — beweisen, daß die oben geschriebenen Gleichungen tatsächlich genau allen endlichen $\mathfrak{a}$-Gruppoiden entsprechen. Man bezeichnet nämlich im beliebigen $\mathfrak{a}$-Gruppoid G $Ex = m$, a^n die Folge der kleinsten Höhe $> m$, für die in G $x = a^n$, und zeigt, daß genau alle obigen Gleichungen in G gelten. Umgekehrt muß man zeigen, daß die obigen Gleichungen für jedes zulässige x, m, n eine kompatible einem $\mathfrak{a}$-Faktoroid von V_a bzw. V'_a entsprechende Klasseneinteilung bilden.

§ 5. EIGENSCHAFTEN DER $(\mathfrak{aab})$-GRUPPOIDE

Es sei G ein $(\mathfrak{aab})$-Gruppoid. Wir ordnen jeder von den Folgen aa, bb, ab, ba, aaa das Element a bzw. b bzw. — zu und zwar auf folgende Weise: ist diese Folge in G gleich a bzw. b, so ordnen wir ihr a bzw. b zu; ist unsere Folge in G weder a noch b gleich, so ordnen wir ihr das Element — zu. Dadurch haben wir jedem $(\mathfrak{aab})$-Gruppoid G eine bestimmte fünfgliedrige Folge von den Elementen a, b, — zugeordnet; sie bezeichnet, welche von den oben angeführten Folgen in G gleich a bzw. b ist und wir nennen sie die Charakteristik von G. Folgende Lemmen ermöglichen unzuläßige Charakteristiken zu finden. G sei ein Szászsches Gruppoid, seine i. T. sei aab.

5.1. Lemma. 1. $(x \in G \,\&\, x \neq a, b) \Rightarrow (ax = a \equiv xa = a \equiv xb = b)$,
2. $ab = a \equiv ba = a$.

Beweis. 1) $xa = a \equiv_{2.1\,2),\,4)} ax = a \equiv_{2.1\,3),\,5)} xb = b$; 2) Aus 2.1 2), 4).

5.2. Lemma. 1) $a^2 = a \Rightarrow (ab \neq a \,\&\, ab \neq b)$,
2) $a^3 = a \Rightarrow ab \neq b$,
3) $ab = bb = b \Rightarrow ba = b$,
4) $(a^2 \neq a \,\&\, b^2 \neq b \,\&\, ab = a) \Rightarrow a^3 \neq a$,
5) $(a^2 \neq a \,\&\, b^2 = b \,\&\, ab \neq a, b \,\&\, ba \neq a, b) \Rightarrow a^3 \neq a$,
6) $b^2 \neq b \Rightarrow (ab = a \equiv b^3 = b)$.

Beweis. 1) Anderenfalls wäre aab assz. 2) Ist $a^2 = a$, siehe 1); ist $a^2 \neq a$, so ist nach 5.1 $a^2b = b$; wäre $ab = b$, so wäre $a \,.\, ab = ab = b$, aab wäre also assz. 3) $ba = a \Rightarrow_{5\cdot1} ab = a$; es sei $ba \in G - (a, b)$. $ba \,.\, b = b \,.\, ab = bb = b \Rightarrow$ $\Rightarrow_{5\cdot1} a = a \,.\, ba = ab \,.\, a = ba$, Widerspruch. 4) Es sei $a^3 = a$; $\Rightarrow_{5\cdot1} a^2b = b$; $ab = a \Rightarrow_{5\cdot1} ba = a$; $ab^2 = ab \,.\, b = ab = a$; $ba^2 = ba \,.\, a = a^2$; $a^2b^2 =$ $= a \,.\, ab^2 = a^2$; $a^2b^2 = a^2b \,.\, b = b^2$, also $a^2 = b^2$; $b \,.\, bb = ba^2 = a^2$; $bb \,.\, b =$ $= a^2b = b$, also $a^2 = b$, Widerspruch mit 2.1 1). 5) $a^3 = a \Rightarrow_{5\cdot1} a^2b = b$; $ba \,.\, ab = (ba \,.\, a)b = (b \,.\, aa)b = b \,.\, a^2b = bb = b$, was infolge von $ab, ba \neq b$ Widerspruch mit 2.1 1) ist. 6) $b^2b = b \Rightarrow_{5\cdot1} ab^2 = ab \,.\, b = a \Rightarrow_{2\cdot1} ab = a$; $ab = a \Rightarrow ab^2 = ab \,.\, b = ab = a \Rightarrow_{5\cdot1} b^2b = b$.

5.3. *Die* (**aab**)*-Gruppoide können höchstens diese Charakteristiken haben:*

1	$(ab\text{-}ba)$	7	$(\text{-}bbb\text{-})$	12	$(\text{--}bb\text{-})$
2	$(ab\text{--}a)$	8	$(\text{-}b\text{-}ba)$	13	$(\text{--}b\text{--})$
3	$(a\text{--}ba)$	9	$(\text{-}b\text{-}b\text{-})$	14	$(\text{---}ba)$
4	$(a\text{---}a)$	10	$(\text{-}b\text{---})$	15	$(\text{---}b\text{-})$
5	$(\text{-}baaa)$	11	$(\text{--}aa\text{-})$	16	$(\text{----}a)$
6	$(\text{-}baa\text{-})$			17	(-----)

Beweis. Nach 2 1 1) kann am 1. und 5. Platz der Charakteristik a oder —, am 2. Platz b oder — sein. Ist $a^2 = a$, so $a^3 = a$ und $ab \neq a, b$ (5.2 1)), $ba \neq a$ (5.1 2)). Für $b^2 = b$ habe ich also die Fälle 1, 2, für $b^2 \neq b$ die Fälle 3, 4. Nehmen wir $a^2 \neq a$, $b^2 = b$, so ist $ab = a \equiv_{5\cdot1} ba = a$, also 5, 6; $ab = b \Rightarrow$ $\Rightarrow_{5\cdot2\,2),\,3)} (ba = b \,\&\, a^3 = a)$, also 7); $ab \neq a, b \,\&\, ba = b$ gibt die Fälle 8, 9; aus $a, b \neq ab, ba$ folgt $a^3 \neq a$ (5.2 5)), das ist der Fall 10. Ist endlich $a^2 \neq a$ & $b^2 \neq b$, so $ab = a \equiv ba = a \Rightarrow a^3 = a$ (5.2 4)), Fall 11; $ab = b \Rightarrow_{5\cdot2\,2),\,5\cdot1\,2)}$ $(a^3 = a \,\&\, ba = a)$, Fälle 12, 13; $ab \neq a, b \Rightarrow_{5\cdot1\,2)} ba \neq a$, das ergibt die übrigen Fälle.

5.4. *Wenn zwei* (**aab**)*-Gruppoide G, H verschiedene Charakteristiken haben, existiert kein Homomorphismus von G auf H.*

Beweis. Dies ist die Folgerung von 2.3.

Ich bezeichne die Klasse aller (**aab**)-Gruppoide, deren Charakteristik die k-te ($k = 1, \ldots, 17$) der in 5.3 angeführten ist, mit **k** und nenne sie die *Klasse aller* **k***-Gruppoide*. Ich zeige u. a., daß für jedes $k = 1, \ldots, 17$ diese Klasse perfekt ist.

Dazu genügt es nach 5.4 das **k**-freie Gruppoid V_k anzugeben. Um festzustellen, daß $V_k \in$ **k**, genügt es immer nur zu zeigen, daß es szászsch ist; der Typus, die Charakteristik und die Primitivität werden immer offenbar sein. Vgl. die Bemerkung am Ende des § 3.

Weil die Beweise analog sind, führe ich sie eingehend nur für $k = 1, 2, 3$ an; in den übrigen Fällen werden Anweisungen zum Beweis gegeben.

a^n bzw. b^n bedeutet immer eine Folge von n gleichen Elementen a bzw. b oder ihr Produkt (Potenz); für ein anderes Symbol x werde ich x^n auch im anderen Sinn benützen.

6.1. 1-Gruppoide: Charakteristik $(ab\text{-}ba)$.

Das durch die Tafel T1 *definierte Gruppoid V_1 ist das einzige (also:* **1***-freie und kleinste)* **1***-Gruppoid.*

	a	b	c	h
a	a	c	h	h
b	b	b	b	b
c	c	c	c	c
h	h	h	h	h

T1

Beweis. 1) b, c, h sind linksseitige Nullelemente, alle Tripel bxy, cxy, hxy sind also nach 1.4 assz. Das Tripel aab ist nicht assz. ($a \,.\, ab = h$, $aa \,.\, b = c$), weiter ist (bei beiderlei Einklammern) $aba = abb = abc = abh = c$, $aac =$ $aca = acb = acc = ach = abh = ahc = h$; (a, h) ist eine Unterhalbgruppe von V_a; V_a ist also szászsch.

2) Wir bezeichnen im beliebigen **1**-Gruppoid $ab = c$, $ac = h$. Es muß wegen der Isoliertheit des Trippels aab $c \neq h$ sein. Nach der Charakteristik ist $c \neq a$, $c \neq b$, nach 2.1 ist $h \neq b$; $h \neq a$, weil $h = a \Rightarrow_{5\cdot1} b = ab \,.\, b = a \,.\, bb = ab$, Widerspruch. $ah = a \,.\, ac = ab \,.\, c = h$; $bc = b \,.\, ab = ba \,.\, b = bb = b$; $bh =$ $= b \,.\, ac = ba \,.\, c = bc = b$; $cx = ab \,.\, x = a \,.\, bx = ab = c$; $hx = ac \,.\, x =$ $= a \,.\, cx = ac = h$ $(x = a, b, c, h)$. Jedes **1**-Gruppoid ist also nach 3.1 ein homomorphes Bild von V_1 (a, b, c, h als Folgen der Länge 1 bilden eine voll-

ständige Menge); jedes echte Faktoroid von V_1 ist aber eine Halbgruppe, denn alle Elemente a, b, c, h sind in jeden **1**-Gruppoid verschieden. V_1 ist mithin auch das kleinste **1**-Gruppoid.

6.2. 2-Gruppoide: Charakteristik (ab-a).

2-Folgen der Länge 1 sind a, b, h. Für $n > 1$ ist $x_1 \ldots x_n$ eine **2**-Folge falls

$$1 \leqq i \leqq n \Rightarrow (x_i = a \vee x_i = b),$$
$$(1 \leqq i < n \;\&\; x_i = a) \Rightarrow x_{i+1} = b,$$
$$(1 \leqq i < n \;\&\; x_i = b) \Rightarrow x_{i+1} = a$$

(z. B. ab, bab, $ababa$). Definition der Verknüpfung:

$$a \,.\, a = a, \quad b \,.\, b = b, \quad a \,.\, b = ab, \quad b \,.\, a = ba, \quad a \,.\, ab = h$$
$$(x, y \neq h \;\&\; \neg(x = a \;\&\; y = ab)) \Rightarrow x \,.\, y = x_*(x_p \cdot y_1)^*y, \quad (^{10}) \qquad (!)$$
$$x \,.\, h = x \,.\, ab, \quad h \,.\, b = h, \quad (y \neq b \Rightarrow h \,.\, y = ab \,.\, y).$$

Auf diese Weise wird das Gruppoid V_2 definiert.

*V_2 ist **2**-frei. Es existiert das kleinste **2**-Gruppoid, dies ist in der Tafel T2 angeführt.*

	a	b	c	d
a	a	c	d	d
b	d	b	d	d
c	d	c	d	d
d	d	d	d	d

T2

Beweis. 1) V_2 ist szászsch. Es sei zuerst $q = a \vee q = b$. Wir beweisen, daß alle Tripel xyq außer aab assz. sind. $a \,.\, ab = h = ab = aa \,.\, b$, für $x \neq h$ $xq \,.\, q = (x_* \,.\, x_pq)q = x_*(x_pq \,.\, q) = x_*(x_p \,.\, qq) = x_*x_p \,.\, qq = x \,.\, qq$, weil x_*, x_p nicht gleichzeitig a sind. Ähnlich beweist man $x \,.\, ba = x_*(x_pb)a = xb \,.\, a$, für $x \neq a$ $xa \,.\, b = x_*(x_pa)b = x \,.\, ab$. Es sei jetzt $x, y \neq h$, $Iy \geqq 2$, $\neg\,(x = a \;\&\; y = ab)$.

$$xy \,.\, q = (x_*x_p \,.\, y_1{}^*y)q =_{(1)} (x_*(x_py_1)^*y)q = x_*(x_py_1)^*y_*(y_pq) =$$
$$= (x_*x_p)(y_1{}^*y_*(y_pq)) = x(y_*y_p \,.\, q) = x \,.\, yq.$$

(1) Hier brauchen wir $\neg\,(x = a \;\&\; y = ab)$.

Weiter $(a \,.\, ab)a = aba = a(ab \,.\, a)$, $\quad (a \,.\, ab)b = h = a(ab \,.\, b)$.

Es sei $x \neq h, y \neq h, b$. Es ist $xh \,.\, q = (x \,.\, ab)q = x(ab \,.\, q) = x \,.\, hq$, $hy \,.\, q = (ab \,.\, y)q = ab \,.\, yq = h \,.\, yq$; man berechnet $hb \,.\, q = h \,.\, bq$, $hh \,.\, q = h \,.\, hq$. Auf diese Weise wird festgestellt, daß alle Tripel xyq außer aab assz. sind. Wir stellen die Assoziativität der Tripel $xy\,(ab)$, $xy\,(ba)$ fest.

$$xy \,.\, ab =_{(1)} (xy \,.\, a)b = (x \,.\, ya)b =_{(1)} x(ya \,.\, b) =_{(2)} x(y \,.\, ab),$$
$$uv \,.\, ba = (uv \,.\, b)a =_{(3)} (u \,.\, vb)a = u(vb \,.\, a) = u(v \,.\, ba).$$

(1) Es genügt, daß $y \neq a$ (2) Es muß $y \neq a$ sein (3) Es muß $\neg\,(u = v = a)$ sein. Wir rechnen leicht aus, daß die Tripel $a \,.\, a \,.\, ab$, $a \,.\, a \,.\, ba$ assz. sind; für $x \neq a$ ist $xa \,.\, ab = (xa \,.\, a)b = (x \,.\, aa)b = xa \,.\, b = x \,.\, ab = xh = x(a \,.\, ab)$. Für beliebiges $x \neq y \in V_2$ sind also die Tripel xya, xyb, $xy(ab)$, $xy(ba)$ mit Ausnahme von aab assz. Offenbar $\{a, ab, ba\} = V_2 - (b)$. Nach 1.5 ist also V_2 szászsch.

2) Es sei G ein **2**-Gruppoid, wir bezeichnen $a \,.\, ab = h$. Ich zeige, daß alle **2**-Folgen in G assz. sind und daß a, b unter ihnen einfach sind. Die Assoziativität der **2**-Folgen der Länge $\leqq 3$ ist klar, keines der Elemente a, b ist nach der Charakteristik keinem der Elemente ab, ba gleich. Nach 2.1 1) $b \neq h$. Sollte $a = h$ sein, so wäre nach 5.1 $ab \,.\, b = b$, d. h. $a \,.\, bb = ab = b$, Widerspruch. Nach 2.1 1) $b = aba$, $a = bab$. Sollte $a = aba$ sein, so wäre nach 5.1 $a = b = ab \,.\, b = ab$, Widerspruch; sollte $b = bab$ sein, so wäre nach 5.1 $a = ba \,.\, a = ba$, Widerspruch. Siehe jetzt 3.2. Zu 3.1: Es sei $x, y \neq h$ in V_2. Ist $\neg\,(x = a \;\&\; y = ab)$ in V_2, so ist $\neg\,(x = a \;\&\; y_1 = a \;\&\; {}^*y = b)$ in G wegen der Einfachheit von a, b; in G also $x_*x_p \,.\, y_1{}^*y = (x_*x_p \,.\, y_1)^*y =_{(1)} (x_* \,.\, x_py_1)^*y$

(1) Es ist nicht gleichzeitig $x_* = x_p = a$.

Das letzte Produkt ist schon das Produkt der **2**-Folge aus der rechten Seite von (!). Es sei $x \in V_2$, $x \neq h, b$ in V_2. Es ist in G

$$hx = (a \,.\, ab)x =_{(1)} a(ab \,.\, x) = a(a \,.\, bx) =_{(2)} a \,.\, bx = ab \,.\, x.$$

(1) $ab \neq a$ (2) $bx \neq b$ in G wegen der Einfachheit von b und darum, weil bx nach dem oben gesagten in G dem Produkt der zugehörigen Folge aus V_2 gleich ist. $x \neq a \Rightarrow xh = x(a \,.\, ab) = xa \,.\, ab = (xa \,.\, a)b = (x \,.\, aa)b = xa \,.\, b = x \,.\, ab$; $ah = a(a \,.\, ab) = aa \,.\, ab = a \,.\, ab = h$. Leicht bekommt man $hh = x \,.\, ab$; [sic] Nach 3.1 ist also jedes **2**-Gruppoid das homomorphe Bild von V_2, $V_2 = abab$. ist **2**-frei.

3) Ich beweise, daß auch ab unter allen 2-Folgen einfach ist. Wir bezeichnen

$$(Ix = 2n \;\&\; x_1 = a) \Rightarrow x = c^n, \quad (Ix = 2n \;\&\; x_1 = b) \Rightarrow x = d^n,$$
$$(Ix = 2n + 1 \;\&\; x_1 = a) \Rightarrow x = e^n, \quad (Ix = 2n + 1 \;\&\; x_1 = b) \Rightarrow x = f^n;$$

$$c^1 = c.$$

(10) Wenn wir hier statt $x_p \cdot y_1$ das eben definierte Produkt schreiben, ist die rechte Seite eine 2-Folge; vgl. Beweis von 4.1, Beziehung (**), (***) und Bemerkung (9). Z. B. $aba \,.\, ab = abab$.

Es ist $ab \neq a, b, h$. In G $ac = h \neq c$ (aab ist nicht assz.), für $n > 1$ $ac^n = c^n$, es ist also $c \neq c^n$. Wäre für ein $n \geqq 1$ $c = e^n$, so wäre $(.b)$ $c = c^{n+1}$. Widerspruch. $(n \geqq 1 \;\&\; c = d^n) \Rightarrow_{(.b)} c = f^n$, was zum Widerspruch führt: $\Rightarrow_{(b.)} f = f^n = = c \Rightarrow_{(.c)} c^2 = fc$, also $c^2 = bab \,.\, ab = ba \,.\, bab = ba \,.\, ab = bab = ab = c$, Widerspruch. Jetzt ist es schon leicht zu sehen, daß $V_2 - (a, b, c)$ ein den Bedingungen von 3.4 entsprechendes Ideal ist. Das ihm zugehörige Reesche Faktoroid ist das aus T2.

6.3. 3-Gruppoide: Charakteristik (a--ba).

Definition von V_3. *Die **3**-Folgen der Länge 1 seien a, b, h; für $n > 1$ sei $x_1 \dots x_n$ eine **3**-Folge, falls $(x_1 = a \vee x_1 = b) \;\&\; (1 < i \leqq n \Rightarrow x = b)$. Alle **3**-Folgen sind also a, b^n, ab^n, h (n natürlich). Für die Multiplikation siehe* T3.1.

	a	b^n	ab^n	h
a	a	ab^n	X^n	h
b^m	b^m	b^{n+m}	b^{n+m}	b^{m+1}
ab	ab^m	ab^{n+m}	ab^{n+m}	ab^{m+1}
h	h	ab^{n+1}	ab^{n+1}	ab^2

$X^1 = h, \quad (n > 1 \Rightarrow X^n = ab^n)$

T3.1

	a	b	c	h
a	a	c	h	h
b	b	h	h	h
c	c	h	h	h
h	h	h	h	h

T3.2

*V_3 ist **3**-frei; das in* T3.2 *angeführte Gruppoid ist das kleinste **3**-Gruppoid.*

Beweis Wenn ich im gewöhnlichen Sinn auch den Exponent 0 zulasse,[11] so kann ich die Multiplikation zwischen $a^u b^n$, $a^v b^m$ ($u, v = 0{,}1$, $n, m \geqq 0$) folgenderweise schreiben:

$$a \,.\, ab = h,$$

$$\neg\,(u = v = m = 1 \;\&\; n = 0) \Rightarrow a^u b^n \,.\, a^v b^m = a^u b^{n+m}.$$

1) a ist das rechtsseitige Einselement, alle Tripel xya sind also assz. Ich untersuche die Tripel xyb: aab ist nich assz.;

$$\neg\,(u = v = m = 1 \;\&\; n = 0) \Rightarrow (a^u b^n \,.\, a^v b^m) b = a^u b^{n+m+1} = a^u b^n (a^v b^m \,.\, b);$$

falls h vorkommt:

$$ahb = hab = ab^2, \quad hhb = ab^3, \quad x \neq a, h \Rightarrow xhb = x \,.\, ab^2, \quad hxb = ab \,.\, x \,.\, b.$$

Weiter untersuche ich die Tripel $xy(ab)$, $xy(bb)$.

[11] x^0 bedeutet das leere Symbol.

$$xy \,.\, ab = (xy \,.\, a)b =_{(1)} (x \,.\, ya)b = x(ya \,.\, b) =_{(2)} x(y \,.\, ab), \qquad (1)\ \neg\,(x = y = a)$$
$$xy \,.\, bb = (xy \,.\, b)b =_{(1)} (x \,.\, yb)b = x(yb \,.\, b) = x(y \,.\, bb), \qquad (2)\ y \neq a$$

Wir ergänzen:

$$a(a \,.\, ab) = (a \,.\, a)ab = h, \quad a(a \,.\, bb) = a \,.\, a)bb = ab^2,$$

ist $x \neq a$, $y = a$, so setze ich von dem mit (2) bezeichneten Gleichheitszeichen fort: $\dots = x \,.\, ab = xh = x(a \,.\, ab)$. Alle Tripel xya, $xy(ab)$, $xy(bb)$ sind also assz. und offenbar $\{a, ab, bb\} = V_3 - (b)$ $(h = a \,.\, ab,\ b^{n+1} = b^n h,\ ab^{n+1} = = ab^n \,.\, h)$. Siehe 1.5; V_3 ist szászsch.

2) Es sei G ein beliebiges **3**-Gruppoid, es sei in ihm $a \,.\, ab = h$. Alle **3**-Folgen der Länge $\leqq 3$ sind $a, b, h, ab, bb, abb, bbb$; sie sind in G assz. Ich beweise, daß a, b in G unter allen **3**-Folgen einfach sind. Es ist in G $ab, bb \neq a, b$ nach der Charakteristik, $abb \neq a, b$, $bbb \neq a$ nach 2.1 1), $bbb \neq b$ nach 5.2 6). $h \neq b$ nach 2.1, $h = a \Rightarrow_{5.1} a = ab \,.\, a = a \,.\, ba = ab$, Widerspruch, also $h \neq a$. Siehe 3.2.

Multiplizieren in G: Man beweist induktiv, daß $b^n a = b^n$ $(b^{n+1}a = b \,.\, b^n a)$. Es sei $x = a^u b^n$, $y = a^v b^m$, $u, v = 0{,}1$, $n, m \geqq 0$. Ist $\neg\,(x = a \;\&\; y = ab)$ in V_3, so ist $\neg\,(x = a \;\&\; y_1 = a \;\&\; {}^*y = b)$ in G. Es ist also

$$a^u b^n \,.\, a^v b^m = (a^u b^n \,.\, a^v) b^m = (a^u \,.\, b^n a^v) b^m = a^u b^n \,.\, b^m = a^u b^{n+m}.$$

Es sei $x \neq a$, h in V_3; es ist $xh = x(a \,.\, ab) = xa \,.\, ab = x \,.\, ab$, anal. $hx = ab \,.\, x$, $ah = ha = a$, $\quad hh = h(a \,.\, ab) = ha \,.\, ab = h \,.\, ab = ab \,.\, ab = abb$. Siehe 3.1; V_3 ist **3**-frei.

3) Es sei in V_3 $ab = c$; induktiv beweist man, daß $c^n = ab^n$ (c^n als Potenz). Ich beweise, daß die Folge ab unter allen **3**-Folgen einfach ist. Ich weiß schon, daß in G $c \neq a, b, h$ ($\neq h$ wegen des i. T.). $(n > 1 \;\&\; c = c^n) \Rightarrow_{(.a)} h = c^n \Rightarrow \Rightarrow c = h$, Widerspruch, für $n > 1$ $c = b^n \Rightarrow_{(a.)} h = c^n \Rightarrow h = b^{n^2}$, $\quad h = c^n \Rightarrow \Rightarrow_{(b.)} b^2 = b^{n+1}$, $\quad$ deswegen $\quad c = b^n = b^{n+k(n-1)}$, für $k = n$ $c = b^{n^2} = h$, Widerspruch. ab ist einfach, $V_3 - (a, b, c)$ ist ein Ideal, siehe 3.4. Das zugehörige Faktoroid ist das aus T3.2.

6.4. 4-Gruppoide: Charakteristik (a---a).

Definition von V_4. *$\mathbf{4}$-Folgen der Länge* 1 *seien a, b, h; für $n > 1$ sei $x_1 \dots x_n$ eine **4**-Folge, falls*

$$(1 \leqq i \leqq n \Rightarrow (x_i = a \vee x_i = b)) \;\&\; ((1 \leqq i < n \;\&\; x_i = a) \Rightarrow x_{i+1} = b).$$

Es sei

$$a \,.\, a = b, \quad a \,.\, b = ab, \quad b \,.\, a = ba, \quad b \,.\, b = bb, \quad a \,.\, ab = h;$$
$$(x, y \neq h \;\&\; \neg\,(x = a \;\&\; y = ab)) \Rightarrow x \,.\, y = x_*(x_p \,.\, y_1)^*y;$$

*für beliebige **4**-Folge sei* $x \,.\, h = x \,.\, ab, \quad h \,.\, x = ab \,.\, x$.

*V_4 ist **4**-frei; für jedes $k \geqq 4$ existiert das minimale **4**-Gruppoid mit k Elementen.*

Ähnlich als in 6.2 stellt man die Assoziativität aller Tripel xya, xyb (außer aab), $xy(ab)$, $xy(ba)$, $xy(bb)$, $xy(bbb)$ fest; $\{a, ab, ba, bb, bbb\} = V_4 - (b)$, V_4 ist szászsch. Aus 2.1, 5.1, 5.2 6) folgt es nach 3.2, daß im beliebigen **4**-Gruppoid G alle **4**-Folgen assz. und a, b unter ihnen einfach sind. Es sind in G die Bedingungen von 3.1 erfüllt (man multipliziert in G nach V_4), V_4 ist **4**-frei.

Für $k \geqq 1$ definieren wir

$$U_1 = (\lambda x \in V_4)(\exists i)(x = b^i \;\&\; i \geqq k + 2),$$
$$U_2 = \lambda x \in V_4)(x = x_1 \dots x_n \;\&\; n \geqq 2 \;\&\; (\exists i)(1 \leqq i \leqq n \;\&\; xi = a).$$

$(U_1 \cup U_2 \cup (h)) - (ab)$ ist ein Ideal in V_4, im zugehörigen Resschen Faktoroid kann man noch ab, b^{k+1} (Annullatoren) gleichsetzen; dadurch entsteht das Faktoroid M_k von V_4, dessen Elemente $a, b, \dots, b^{k+2}$ sind und das minimal ist, weil in ihm $a \,.\, ab = b^{k+2}$, $aa \,.\, b = b^{k+1}$ ist; durch Gleichsetzen beliebiger Elemente b^i, b^j $(i < j \leqq k + 2)$ wären also auch $aa \,.\, b$ und $a \,.\, ab$ gleichgesetzt. M_k hat $k + 3$ Elemente.

6.5. 5-Gruppoide: Charakteristik (*-baaa*).

Das durch die Tafel T5 *definierte Gruppoid ist das einzige **5**-Gruppoid.*

	a	b	c
a	c	a	a
b	a	b	c
c	a	b	c

T5

Vgl. 6.1.

6.6, 6.7. 6-Gruppoide: Charakteristik (*-baa-*).
7-Gruppoide: Charakteristik (*-bbb-*).

*Die **6**- bzw. **7**-Folgen sind a^n, b, h (n nat.); das **6**- bzw. **7**-freie Gruppoid V_6 bzw. V_7 ist durch* T6.1 *bzw.* T7.1 *definiert.* T6.2 *bzw.* T7.2 *gibt das kleinste **6**- bzw. **7**-Gruppoid an.*

	a^n	b	h
a^m	a^{m+n}	X^m	a^{m+2}
b	a^n	b	h
h	a^{n+2}	h	a^4

$X^2 = h, \quad (n \neq 2 \Rightarrow X^m = a^m)$

T6.1

	a	b	c	d
a	c	a	d	d
b	a	b	c	d
c	d	d	d	d
d	d	d	d	d

T6.2

	a^n	b	h
a^m	a^{m+n}	Y^m	h
b	b	b	b
h	h	h	h

$Y^1 = b, \quad (n > 1 \Rightarrow Y^n = h)$

T7.1

	a	b	c
a	c	b	c
b	b	b	b
c	c	c	c

T7.2

Man stelle fest, daß V_6 bzw. V_7 szászsch ist; dabei sei bemerkt, daß b ein linksseitiges Eins- bzw. Nullelement ist und daß in beiden Fällen $\{a, h\}$ offenbar eine Unterhalbgruppe ist. Im beliebigen **6**- bzw. **7**-Gruppoid sei $h = a^2 \,.\, b$; man prüfe die Multiplikation nach den Tafeln. In V_6 ist a^2 einfach und $V_6 - (a, b, a^2)$ ein Ideal, siehe 3.2; in V_7 ist $V_7 - (a, b)$ ein rechtsseitiges Ideal und für $s \in V_7$ ist $bs = b$, $a^n s, hs \in V_7 - (a, b)$. Die zugehörige Einteilung ist also kompatibel und das zugehörige Faktoroid ist das kleinste. Vgl. Tafeln T6.2, T7.2 .

6.8. 8-Gruppoide: Charakteristik (*-b-ba*).

*Die **8**-Folgen sind a, b, h, aa, ab. Ich bezeichne $aa = c$, $ab = d$. Das **8**-freie Gruppoid V_8 siehe* T8.1; *sein einziges echtes szászsches Faktoroid is in* T8.2 *angegeben.*

	a	c	b	d	h
a	c	a	d	h	d
c	a	c	b	d	h
b	b	b	b	b	b
d	d	d	d	d	d
h	h	h	h	h	h

T8.1

	a	c	b	d
a	c	a	d	d
c	a	c	b	d
b	b	b	b	b
d	d	d	d	d

T8.2

b, d, h sind linksseitige Nullelemente, c ist ein Einselement. Man untersuche also die Tripel xya, xyb, die kein c enthalten und mit a beginnen. Daraus: alle Tripel xyd, xyh sind assz.; V_8 ist szászsch. Im beliebigen **8**-Gruppoid multipliziert man nach T8.1 und c ist einfach. $V_8 - (a, b, c) = (h, d)$ erfüllt die Bedingungen von 3.4, keine andere Klasseneinteilung ist möglich, die zum szászschen Faktoroid führen könnte.

6.9. 9-Gruppoide: Charakteristik (*-b-b-*).

*Die **9**-Folgen sind die Folgen von Folgen. Die inneren Folgen sind a^n, b, h; die **9**-Folgen sind die Folgen von Folgen der Länge **1** aus diesen, weiter die Folgen* *v. F. der Länge 2 der Gestalt $a^n b$. Ich bezeichne $a^n b = c^n$, trotzdem es keine Potenzen von c^1 sein werden. Die Tafel T9.1 definiert das Gruppoid V_9; V_9 ist* **9**-*frei.* T9.2 *gibt drei minimale* **9**-*Gruppoide an. (Dies sind alle minimalen* **9**-*Gruppoide.)*

	a^n	b	c^n	h
a^m	a^{m+n}	c^m	Z^n_m	c^{m+2}
b	b	b	b	b
c^m	c^m	c^m	c^m	c^m
h	h	h	h	h

$Z^1 = h, \quad (m + n > 2 \Rightarrow Z^n_m = c^{m+n})$

T9.1

	a	b	c	d	h
a	d	c	h	d	d
b	b	b	b	b	b
c	c	c	c	c	c
d	d	d	d	d	d
h	h	h	h	h	h

T9.2 A

	a	b	e	f	h
a	e	h	h	h	h
b	b	b	b	b	b
e	h	f	h	h	h
f	f	f	f	f	f
h	h	h	h	h	h

T9.2 B

	a	b	c	e	h
a	e	c	h	h	h
b	b	b	b	b	b
c	c	c	c	c	c
e	h	c	h	h	h
h	h	h	h	h	h

T9.2 C

b, c^n, h sind linksseitige Nullelemente; um die Assoziativität der Tripel xya, xyb (außer aab) zu beglaubigen, genügt $x = a^n$ anzunehmen. Für xyc^m folgt aus der Assoziativität der obigen Tripel $a^n y . c^m = a^n y . a^m b = a^n(y . a^m b) = = a^n . yc^m$. Infolge von $h = ac^1$ ist nach 1.5 V_9 szászsch.

Im beliebigen **9**-Gruppoid G sei $h = a . ab$. Innere **9**-Folgen sind in G assz., **9**-Folgen sind in G assoziative Folgen a. F. (der Länge $\leqq 2$). a, b sind nach 2.1 1), 3.3, 5.1 einfach. In G multipliziert man nach T9.1; V_9 ist **9**-frei.

Bezüglich minimale **9**-Gruppoide: $U_1 = V_9 - (a, b, c^1, h)$, $U_2 = V_a - - (a, a^2, b, c^2)$, $U_3 = V_9 - (a, a^2, b, c^1, c^2)$ sind rechtsseitige Ideale in V_9, in zugehörigen Reeschen Einteilungen ist also $\bar{s} = \bar{t} \Rightarrow \overline{rs} = \overline{tr}$. Es ist auch $\bar{s} = \bar{t} \Rightarrow \overline{rs} = \overline{rt}$, weil für $s, t \in U_i$, $r \in V_9$ entweder $rs, rt \in U_i$ oder $rs = rt = r$ ist. Im dem U_3 zugehörigen Faktoroid kann man noch c^1, c^2 gleichsetzen. Es entstehen drei **9**-Gruppoide A, B, C, sie sind die aus T9.2 (Bezeichnung: im 1. Fall $U_1 = d$, $c^1 = c$, im 2. Fall $a^2 = e$, $c^2 = f$, $U_2 = h$, im 3. Fall $a^2 = e$, $c^1 = c^2 = c$, $U_3 = h$). Sie sind minimal. a, b sind einfach und wegen der Isoliertheit von aab muß in jedem szászschen homomorphen Bild von A $d \neq h$, im von B $f \neq h$, im von C $c \neq h$ sein; durch Gleichsetzen beliebiger zwei noch in Erwägung kommenden Elemente wür den diese Ungleichheiten zerstört.

Ist im beliebigen **9**-Gruppoid G h einfach, so $A \leqq G$, denn c^1 ist auch einfach. Ist in G c^2 einfach, so $B \leqq G$, denn a^2 ist auch einfach. Man kann noch zeigen,

daß falls h nicht einfach ist, kann c^2 höchstens mit c^1 gleichgesetzt werden (und ist es der Fall, so $C \leqq G$). Um das zu beweisen, kann man nur aus der Voraussetzung $c^2 = c^{2+p}$ & $h = c^{2+n}$ & $p, r > 0$ einen Widerspruch $(a . ab = = h = c^m = c^2 = a^2 b)$ finden. Es sei schleißlich bemerkt, daß die **9**-Gruppoide A, B, C nach der Folgerung von 2.5 unisomorph sind.

6.10. 10-Gruppoide: Charakteristik (-b---).

Definition von V_{10}: *die inneren* **10**-*Folgen und die* **10**-*Folgen der Länge* 1 *sind* a^m, b, i. *Für* $n > 1$ *ist* $x = x_1 \ldots x_n$ *die* **10**-*Folge, wenn*

$$1 \leqq i \leqq n \Rightarrow (x_i = a^{m_i} \vee x_i = b),$$
$$(1 \leqq i < n \;\&\; x_i = a^{m_i}) \Rightarrow x_{i+1} = b,$$
$$(1 \leqq i < n \;\&\; x_i = b) \Rightarrow x_{i+1} = a^{m_{i+1}}.$$

Multiplikation:

$$a^n . a^n = a^{n+m}, \quad b . b = b, \quad a^n . b = a^n b, \quad b . a^n = ba^n, \quad a . ab = h,$$
$$x, y \neq h \;\&\; \neg\,(x = a \;\&\; y = ab)) \Rightarrow x . y = x_*(x_p . y_1)^* y,$$
$$x . h = x . a^2 b, \quad hb = b, \quad (y \neq b \Rightarrow h . x = a^2 b . x).$$

V_{10} *ist* **11**-*frei; für beliebiges* $k \geqq 5$ *existieren minimale* **10**-*Gruppoide mit* k *Elementen.*

Es sei in V_{10} $x, y \neq h \;\&\; Iy \geqq 2 \;\&\; \neg\,(x = a \;\&\; y = ab)$, es sei weiter $q = = a \vee q = b$. Dann $x . yq = xy . q$. Durch Ausrechnung zeigt man die Assoziativität aller Tripel xyq, für die $x, y \neq h \;\&\; Iy = 1$, ausser aab, das nicht assz. ist. Weiter ist $h . xq = hx . q$, $xh . q = x . hq$ für beliebige **10**-Folge x; alle Tripel xyq außer aab sind also assz. Daraus beweise man, daß alle Tripel xyz $(z = ab, ba\, ab, bab)$ assz. sind. $V_{10} - (b) = \{a, ab, ba, bab\}$, s. 1.5; V_{10} ist szászsch.

Im beliebigen **10**-Gruppoid G sei $h = a . ab$. Alle **10**-Folgen sind in G assz. und a, b sind unter ihnen einfach. Das folgt zuerst für die inneren Folgen aus 2.1 1) Folgerungen), 3.3, 5.1. Für die **10**-Folgen der (äußeren) Länge $\leqq 3$ siehe 3.2 Folgerung) und 2.1 1), 5.1. Jetzt sind alle Multiplikationsregeln aus der Definition von V_{10} in G leicht zu beglaubigen; nach 3.2 (Folgerung) ist V_{10} **10**-frei.

Ist $k \geqq 5$, so gibt folgende Klasseneinteilung von V_{10} ein minimales **10**-Gruppoid von $k + 2$ Elementen an. Die erste Klasse: h, weiter alle Folgen, die mindestens ein Glied b enthalten, außer b, $a^2 b$; weiter alle Folgen a^n für $n > k$. Die zweite Klasse: a^k, $a^2 b$. Andere Klassen: einelementig. Die erste Klasse ist nämlich das Ideal in V_{10}, im zugehörigen Faktoroid kann man noch a^k, $a^2 b$ als Annullatoren gleichsetzen. Es entsteht das Faktoroid M

von V_{10}, das die Elemente $a, \ldots a^k, b, h$ (also $k+2$) hat und minimal ist, denn a, b sind einfach und durch Gleichsetzen beliebiger Elemente a^i, a^j $(i < j \leqq k+1)$ wären auch a^2b und h gleichgesetzt $(a^2b = a^k,\ h = a^{k+1} = a^{k+2} = \ldots)$.

6.11. 11-Gruppoide: Charakteristik (--*aa*-).

11-Folgen: a^n (*n nat.*), b, bb, h. *Multiplikation im 11-freien Gruppoid* V_{11} $(bb = d)$: T11.1. *Das kleinste 11-Gruppoid*: T11.2.

	a^n	b	d	h
a^m	a^{m+n}	X^m	a^m	a^{m+2}
b	a^n	d	b	h
d	a^n	b	d	h
h	a^{n+2}	a^2	h	a^4

$X^2 = h,\quad n \neq 2 \Rightarrow X^n = a^n$

T11.1

	a	c	e	b	d	h
a	c	e	e	a	e	e
c	e	e	e	h	c	e
e	e	e	e	e	e	e
b	a	c	e	d	b	h
d	a	c	e	b	d	h
h	e	e	e	c	h	e

T11.2

V_{11} ist szászsch: d ist ein Einselement, $\{a\}$, $\{b\}$ sind Halbgruppen. Man ergänze übrige Fälle für xya, xyb, rechne $xy \,.\, h = xy \,.\, a^2b = x \,.\, yh$ aus und siehe 1.5. Im beliebigen 11-Gruppoid G sind bei unter Bezeichnung $bb = d$, $a^2b = h$ die Voraussetzungen von 3.1 erfüllt (vgl. 3.2, Lemma 5.2 6); $db = b \Rightarrow da = ad = a)$, V_{11} ist also 11-frei; $V_{11} - (a, a^2, b, d, h)$ ist ein Ideal von V_{11}, das den Bedingungen von 3.4 entspricht.

6.12. 12-Gruppoide: Charakteristik (--*bb*-).

12-Folgen: a^n, b^n (*n. nat.*), h. *Multiplikation im 12-freien Gruppoid* V_{12}: T12.1. *Das kleinste 12-Gruppoid*: T12.2

	a^n	b^n	h
a^m	a^{m+n}	Y^n_m	h
b^m	b^m	b^{m+n}	b^{m+1}
h	h	b^{n+1}	b^2

$(m \neq \,\&\, n = 1) \Rightarrow Y^n_m = h$
$(m = 1 \vee n \neq 1) \Rightarrow Y^n_m = b$

T12.1

	a	b	c	d
a	c	b	c	d
b	b	d	b	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

T12.2

Man untersuche in V_{12} alle Tripel xya, xyb, daraus auch $xyh = xy(a^2b)$ und siehe 1.5 $(\{a, h\} = V_{12} - (b))$; V_{12} ist szászsch. Für beliebiges 12-Gruppoid G

s. 3.2, 3.1 $(h = a^2b)$. Das Gleichheitensystem $a^{2+i} = a^{2+j}$, $b^{2+i} = b^{2+j} = h$ $(i, j = 0, 1 \ldots)$ definiert eine kompatible Klasseneinteilung, das ihr zugehörige Faktoroid von V_{12} ist das kleinste 12-Gruppoid, weil im beliebigen 12-Gruppoid a, b einfach sind und $\{a\} \cap (\{b\} \cup (h)) = \emptyset$ gelten muß.

$$(a^i = b^j \Rightarrow_{(b\cdot)} b = b^{j+1},\quad a^i = h \Rightarrow_{(b\cdot)} h = b^2 \Rightarrow a^i = b^2).$$

6.13. 13-Gruppoide: Charakteristik (--*b*--).

13-Folgen der Länge 1 *seien* a, b, h; *die der größeren Länge*: $x_1 \ldots x_n$, *so daß*

$$1 \leqq i \leqq n \Rightarrow x_i = a \vee x_i = b,$$
$$(i)(1 \leqq i \leqq b \Rightarrow x_i = a) \vee (\exists i)(1 \leqq i \leqq n \,\&\, x_1 = \ldots = x_i = b \,\&\, x_{i+1} = = \ldots = x_n = a).$$

Ohne ein Mißverständnis zu befürchten, kann ich alle 13-Folgen außer h in der Form b^ia^j $(i, j \geqq 0)$ schreiben. *Die Multiplikation im 13-freien Gruppoid* V_{13} *siehe* T13.1, *das kleinste 13-Gruppoid siehe* T13.2.

	a^n	b^na^m	h
a^i	a^{i+n}	Z_i^{nm}	h
b^ia^j	b^ia^{j+n}	$b^{i+n}a^m$	b^{i+1}
h	ba^n	$b^{n+1}a^m$	b^2

$(i, n \geqq 1) \,\&\, (j, m \geqq 0)$
$i \geqq 2 \Rightarrow Z_i^{10} = h$
$\neg\,(i \geqq 2 \,\&\, n = 1 \,\&\, m = 0) \Rightarrow Z_i^{nm} = b^na^m$

T13.1

	a	b	c
a	c	b	c
b	c	c	c
c	c	c	c

T13.2

Zum Beweis ist es zweckmäßig, die Multiplikation folgenderweise auszudrücken:

$$n > 0 \,\&\, \neg\,(i = m = 0 \,\&\, j \geqq 2 \,\&\, n = 1) \Rightarrow b^ia^j \,.\, b^na^m = b^{i+n}a^m,$$
$$j \geqq 2 \Rightarrow a^j \,.\, b = h$$
$$b^ia^j \,.\, a^m = b^ia^{j+m}$$
$$hx = bx,\quad ah = h,\quad (x \neq a \Rightarrow xh = xb)\ (x \in V_{13})$$

(wenn nicht ausdrücklich bemerkt, sind alle Exponente beliebige ganze nichtnegative Zahlen.) Nach diesen Formeln untersucht man alle Tripel xya, xyb, aus diesen alle $xy(ba)$, xyh $(h = a^2b)$. $\{a, ba, h\} = V_{12} - (b)$; siehe 1.5, 3.2, 3.1 (nach der Berechnung der Produkte a^ib^j im beliebigen 13-Gruppoid beglaubige man darin die oben angeführten Folmeln). $V_{13} - (a, b)$ ist das die Voraussetzungen von 3.4 erfüllende Ideal.

6.14. **14**-Gruppoide: Charakteristik (---*ba*).

Die **14***-Folgen sind* a, aa, b^n, ab^n, h. *Das* **14***-freie Gruppoid* V_{14} *ist in* T14.1, *das kleinste* **14***-Gruppoid in* T14.2 *angegeben.*

	a	a^2	b^n	ab^n	h
a	a^2	a	ab^n	X^n	ab
a^2	a	a^2	b^n	ab^n	h
b^i	b^i	b^i	b^{i+n}	b^{i+n}	b^{i+1}
ab^i	ab^i	ab^i	ab^{i+n}	ab^{i+n}	ab^{i+1}
h	h	h	b^{n+1}	b^{n+1}	b^2

$X^1 = h, \quad (n > 1 \Rightarrow X^n = b^n)$

T14.1

	a	c	b	h
a	c	a	h	h
c	a	c	b	h
b	b	b	h	h
h	h	h	h	h

T14.2

Erklärung der Multiplikation durch Regeln: (1) $\{a\}$ ist die zyklische Gruppe der Ordnung 2. (2) a^2 ist das Einselement in V_{14}.

(3) $$a \, . \, b^n = ab^n,$$

(4) $$a \, . \, ab = h; \quad n \geqq 2 \Rightarrow a \, . \, ab^n = b^n,$$

(5) $$(u, v = 0{,}1 \;\&\; n \geqq 1 \;\&\; m \geqq 0) \Rightarrow a^u b^n \, . \, a^v b^m = a^u b^{n+m},$$

(6) $$i = 1{,}2 \Rightarrow ha^i = h; \quad \text{für andere } x \quad hx = bx; \; y \neq a^2 \Rightarrow yh = yb.$$

Man untersucht alle Tripel xya, xyb, daraus $xy(ab)$; $\{a, ab\} = V_{14} - (b)$, s. 1.5; V_{14} ist szászsch. Im beliebigen **14**-Gruppoid G stellt man nach 3.2, 3.1 fest, daß alle **14**-Folgen in G assz. und die Folgen a, b unter ihnen einfach sind, und daß V_{14} **14**-frei ist. In G ist a einfach; $V_{14} - (a, a^2, b)$ ist ein Ideal, siehe 3.4.

6.15. **15**-Gruppoide: Charakteristik (---*b*-).

Die Folgen a^n, b^n, h *sind die inneren* **15***-Folgen und die* **15***-Folgen der Länge* 1. *Weiter: die Folgen der Länge* 2 *der Gestalt* $a^n b^m$ *sind die übrigen* **15***-Folgen. Multiplikation im* **15***-freien Gruppoid* V_{15} *ist in* T15.1 *angegeben. Es existieren mindestens zwei minimale* **15***-Gruppoide; zwei von diesen sind in* T15.2 *angegeben.*

	a^i	$a^j b^k$	h
a^m	a^{m+i}	Z_m^{jk}	$a^{n+2}b$
$a^r b^s$	$a^r b^s$	$a^r b^{s+k}$	$a^r b^{s+1}$
h	h	$a^2 b^{k+1}$	$a^2 b^2$

$(i, m, s, k \geqq 1, \quad j, r \geqq 0)$
$Z_1^{11} = h, \quad \neg\,(m = k = j = l) \Rightarrow Z_m^{jk} = a^{m+j} b^k$

T15.1

	a	c	d	b	f	g
a	c	d	d	f	f	f
c	d	d	d	g	f	f
d	d	d	d	f	f	f
b	b	b	b	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f
g	g	g	g	f	f	f

T15.2 A

	a	c	b	f	d	h
a	c	c	d	f	h	f
c	c	c	f	f	f	f
b	b	b	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f
d	d	d	f	f	f	f
h	h	h	f	f	f	f

T15.2 B

Jede **15**-Folge außer h hat die Gestallt $a^i b^j$, $i, j \geqq 0$. Erklärung der Multiplikation durch Regeln:

$$a \, . \, ab = h; \quad \neg\,(i = p = r = 1) \Rightarrow a^i \, . \, a^p b^r = a^{i+p} b^r,$$
$$j \geqq 1 \Rightarrow a^i b^j \, . \, a^p b^r = a^i b^{j+r},$$
$$a^i b^j \, . \, h = a^i b^{j+1}; \quad ha^i = h; \quad (j \geqq 1 \Rightarrow h \, . \, a^i b^j = a^2 b^{j+1}), \quad h \, . \, h = a^2 b^2,$$

$V_{15} - (b) = \{a, ab, h, b^2, a^2 b\}$, s. 1.5, 3.2, 3.1. In jedem **15**-Gruppoid ist

$$\{a\} \cap ((\lambda x)(\exists i, j)(x = a^i b^j \;\&\; i \geqq 0 \;\&\; j \geqq 1) \cup (h)) = \emptyset$$
$$(a^k = a^i b^j \Rightarrow_{(\cdot b)} b = b^{j+1}; \quad a^k = h \Rightarrow_{(b\cdot)} b = b^2).$$

$$U = ((\lambda x)(\exists i \geqq 0, j \geqq 2)(x = a^i \, . \, b^j) \cup (\lambda x)(\exists j \geqq 3)(x = a^j b) \cup (h)) - (ab)$$

ist ein Ideal in V_{15}; im zugehörigen Resschen Faktoroid kann ich noch alle Potenzen a^{3+i} $(i = 0{,}1, \ldots)$ gleichsetzen. Unter der Bezeichnung $a^2 = c$, $a^3 = d$, $a^2 b = g$, $b^2 = f$ bekomme ich das Gruppoid aus T15.2 A; es ist szászsch und minimal. Weiter ist

$$(\lambda x)(\exists i \geqq 0, j \geqq 2)(x = a^i b^j) \cup (\lambda x)(\exists j \geqq 2)(x = a^j b)$$

ein Ideal, im zugehörigen Faktoroid kann ich noch alle Potenzen a^{2+i} $(i = 0{,}1, \ldots)$ gleichsetzen und unter der Bezeichnung $a^2 = c$, $b^2 = f$, $ab = d$ bekomme ich das Gruppoid aus T15.2 B; es ist szászsch und minimal.

6.16. **16**-Gruppoide: Charakteristik (----*a*).

Definition von V_{16}: *die* **16***-Folgen der Länge* 1 *sind* a, b, c, h. *Für* $n > 1$ *ist* $x_1 \ldots x_n$ *eine* **16***-Folge, wenn*

$$(x_n = a \vee x_n = b \vee x_n = c) \;\&\; (i < n \Rightarrow (x_i = a \vee x_i = b)),$$
$$(1 < i \leqq n \;\&\; x_i \neq b) \Rightarrow x_{i-1} = b.$$

Multiplikation: $a \, . \, a = c \, . \, c = c$, $\quad a \, . \, c = c \, . \, a = a$, $\quad a \, . \, b = ab$, $\quad b \, . \, a = ba$, $b \, . \, c = bc$, $\quad c \, . \, b = b$, $\quad b \, . \, b = bb$,

$$(x, y \neq h \;\&\; \neg\,(x = a \;\&\; y = ab)) \Rightarrow x \, . \, y = x_*(x_p \cdot y_1)^* y,$$

wobei man im Fall $(x_p = y_1 = a \& {}^*y \neq \emptyset)$ *den Ausdruck* $(x_p . y_1)$ *als ein leeres Symbol lesen muß; der Ausdruck* $x_*{}^*y$ *ist dann offenbar eine* **16**-*Folge.* $a . ab = h, \quad hx = bx, \quad ch = h, \quad (x \neq c \Rightarrow xh = xb)\, (x \in V_{16})$.

V_{16} *ist* **16**-*frei; das kleinste* **16**-*Gruppoid ist in* T16 *angegeben.*

	a	c	b	d
a	c	a	d	d
c	a	c	b	d
b	d	d	d	d
d	d	d	d	d

T16

V_{16} ist szászsch:

$$x, y \neq h \,\&\, Iy \geqq 2 \,\&\, \neg\, (x = a \,\&\, y = ab) \,\&\, (q = a \vee q = b)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow xy . q = x_*(x_p . y_1)^*y_*(y_p . q) = x . yq,$$

auch übrige Tripel xyq außer aab sind assz. Daraus folgt: alle Tripel $xy(ab)$, $xy(ba)$ sind assz. $V_{16} - (b) = \{a, ab, ba\}$. Siehe 1,5, 3.2, 3.1; $V_{16} - (a, b, c)$ ist ein Ideal, siehe 3.4.

6.17. 17-Gruppoide: Charakteristik (-----).

Definition von V_{17}: *die Folgen* a^n, b^n, h *sind die inneren* **17**-*Folgen und die* **17**-*Folgen der Länge* 1; *für* $m > 1$ *ist die Folge v. F.* $x_1 \ldots x_m$ *die* **17**-*Folge, wenn*

$$1 \leqq i \leqq m \Rightarrow (x_i = a^{n_i} \vee x_i = b^{n_i}),$$
$$(1 \leqq i < m \,\&\, x_i = a^{n_i}) \Rightarrow x_{i+1} = b^{n_{i+1}}, \quad (1 \leqq i < m \,\&\, x_i = b^{n_i}) \Rightarrow x_{i+1} = a^{n_{i+1}}.$$

Multiplikation: $a^k . a^n = a^{k+n}, \quad b^k . b^n = b^{k+n}, \quad a^k . b^n = a^kb^n, \quad b^k . a^n = b^ka^n$, $a . ab = h$,

$$(x, y \neq h \,\&\, \neg(x = a \,\&\, y = ab)) \Rightarrow x . y = x_*(x_p . y_1)^*y,$$

$hx = a^2b . x, \quad xh = x . a^2b \quad$ (x beliebige **17**-Folge).

V_{17} *ist* **17**-*frei; für beliebiges* $k \geqq 5$ *existiert ein minimales* **17**-*Gruppoid mit* k *Elementen.*

Zum Beweis sei angeführt, dass V_{17} isomorph ist mit der Menge aller endlichen Folgen aus a, b, zu denen man ein Element h zufügt, $a . ab = h$ setzt, und für jedes andere Paar von Folgen aus a, b $x . y$ als die durch Juxtaposition entstandene Folge, schließlich $x . h = x . aab$, $h . x = aab . x$ definiert. Daraus folgt leicht, daß V_{17} szászsch ist; nach 3.2, 3.1 beweist man, dass V_{17} 17-frei ist.

Ist $k \geqq 3$, so gibt folgende Klasseneinteilung ein minimales **17**-Gruppoid an. Die erste Klasse: alle **17**-Folgen, deren Summe der Längen der inneren Folgen gleich $k + 1$ ist, weiter alle **17**-Folgen, die ein Glied b umfassen, außer b, a^2b, weiter die **17**-Folge h. Die zweite Klasse: a^2b, a^k. Andere Klassen: einelementig. (Vgl. Beweisanweisung in 6.10)

Dadurch ist die Klassifikation der (**aab**)-Gruppoide (und auch der (**baa**)-Gruppoide — siehe Bemerkung am Schluß des § 3) beendet.

LITERATUR

[1] Szász G., *Die Unabhängigkeit der Assoziativitätsbedingungen*, Acta Sc. Math. Szeged *15* (1953—1954), 20—28.
[2] Rédei L., *Algebra I*, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig 1959.
[3] Borůvka O., *Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960.
[4] Ляпин Е. С., *Полугруппы*, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1960.

Eingegangen am 16. 11. 1963.

Matematický ústav ČSAV,
Praha

ГРУППОИДЫ САСА

Петр Гаек

Резюме

Тройка xyz элементов группоида G изолированна, если $(xy)z \neq x(yz)$ и если для всякого $u, v, w \in G$ есть $(uv)w \neq u(vw) \Rightarrow (u = x \,\&\, v = y \,\&\, w = z)$, т. е. если xyz является единственной неассоциативной тройкой в G. Группоид называется группоидом Саса, если он содержит изолированную тройку. Группоид Саса имеет тип (aaa), если для его изолированной тройки xyz имеет место $x = y = z$, тип (aab), если $x = y \neq z$, аналогично (aba), (baa), (abc). Группоид Саса называется примитивным, если он не содержит собственный подгруппоид Саса. Пусть **K** некоторый класс группоидов Саса. Группоид V **K**-свободен, если всякий группоид $G \in$ **K** является гомомор ф ным образом V. Группоид Саса минимален, если всякий его гомоморфный неизоморфный образ является полугруппой. Класс **K** группоидов Саса является совершенным, если существует **K**-свободный группоид, всякий гомоморфный образ которого, являющийся группоидом Саса, принадлежит **K**.

В этой работе изучаются основные свойства группоидов Саса и проводится классификация примитивных группоидов Саса типов (aaa), (aab), (baa). Первые образуют совершенный класс, вторые и третьи распадаются каждые в 17 классов. Для каждого класса находится свободный группоид и наименьший группоид, в случае если он существует. В обратном случае построены по крайней мере два минималных группоида рассматриваемого класса.