

ZUR DARSTELLUNG DES GRAVITATIONSFELDES ZWEIDIMENSIONALER HOMOGENER KÖRPER DURCH KURVENINTEGRALE

TIBOR KOLBENEYER, Košice

Die Berechnung des Gravitationsfeldes zweidimensionaler homogener Körper beruht meistens entweder auf einer exakten, oder einer angenähert en numerischen eventuell auch graphischen Auswertung des Ausdrucks

$$\vec{F} = 2\kappa\sigma \int_f \frac{R \, df}{R^2}, \quad (1)$$

wo \vec{F} den Vektor der Feldstärke in einem beliebigen Punkt $P(z, x)$ der zur Streichrichtung des Körpers senkrechten Ebene (z, x) , κ die Gravitationskonstante, σ die Dichte des Körpers und f seinen in der Ebene (z, x) liegenden Querschnitt bedeutet (Abb. 1). \vec{R} ist der Radiusvektor des Punktes $Q(\zeta, \xi)$ des Integrationsgebiets in Bezug auf P und R der gegenseitige Abstand dieser Punkte.

Hubbert [1] hat eine Methode angegeben, die zu einer Darstellung von \vec{F} in der Gestalt eines Kurvenintegrals über die Berandung des Gebiets f führt. Zu seiner Formel, die von Talwani und seinen Mitarbeitern [2] für unendliche homogene Prismen erfolgreich weiterentwickelt wurde, werden wir weiter unten zurückkehren. Der auf diesem Weg abgeleitete, den Anforderungen der praktischen Rechnungen gut angepaßte Formelapparat wurde besonders bei der Interpretation der in der Menocchio-Zone durchgeführten Schwermessungen mit Erfolg benutzt. Andere Formeln, die schon früher bekannt waren und die am einfachsten ebenfalls durch Verwandlung des Flächenintegrals in (1) in Kurvenintegrale abgeleitet werden können, bilden die Grundlagen der Konstruktion von mechanischen Integratoren zur Bestimmung von anomalen Schwerfeldern. Der Gedanke, die Schwerwirkungen zweidimensionaler homogener Körper durch Kurvenintegrale darzustellen, ist also nicht neu. Es fehlt jedoch eine einheitliche und strenge Theorie, die alle bisher entwickelten Verfahren zusammenfassen, prinzipiell auf eine gemeinsame Grundlage zurückzuführen und dabei nicht nur die Feldstärke, sondern auch die zweiten und höheren Ableitungen des Potentials erfassen würde. Naturgemäß wird man von einer solchen

Theorie auch verlangen, daß sie die Berechnung der Feldstärke und der höheren Potentialableitungen für eine größere Anzahl verschiedenartiger Körper ermöglicht. Das entsprechende dreidimensionale Problem wurde vom Verfasser in [3] eingehend behandelt. Dort wurde gezeigt, daß das Feld eines homogenen dreidimensionalen Körpers durch ein über die Oberfläche S des Körpers erstrecktes Integral in der Gestalt

$$\vec{F} = \kappa\sigma \oint_S \frac{\vec{n}}{R} ds \quad (2)$$

ausgedrückt werden kann. Dabei bedeutet \vec{n} den Einheitsvektor der äußeren Normale der Fläche S . Obgleich sich die Entwicklung der zweidimensionalen Theorie in vieler Hinsicht der dreidimensionalen ähnlich gestaltet, hat sie doch auch viele besondere Züge und ihre vom dreidimensionalen Problem getrennte Behandlung erscheint nicht nur als zweckmäßig, sondern auch als unvermeidlich.

Es sei zunächst P ein äußerer Punkt (Abb. 1). Für die Komponenten Z und X der Feldstärke hat man nach (1)

$$Z = 2\kappa\sigma \int_f \frac{\xi - z}{R^2} df, \quad X = 2\kappa\sigma \int_f \frac{\xi - x}{R^2} df \quad (3)$$

und beachtet man, daß

$$\frac{\xi - z}{R^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} (\ln R), \quad \frac{\xi - x}{R^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} (\ln R)$$

ist, so ergibt sich aus (3) nach dem Gaußschen Satz

$$Z = 2\kappa\sigma \oint_s \ln R \cos(\eta z) ds, \quad X = 2\kappa\sigma \oint_s \ln R \cos(\eta x) ds, \quad (4)$$

wo s die Berandung des Körperquerschnitts f und η die äußere Normale dieser Kurve bedeutet. Wird die Randkurve, wie in Abb. 1 durch Pfeile angedeutet, bei der Integration im positiven Sinne umlaufen, so ist

$$d\xi = -\cos(\eta x) ds, \quad d\eta = \cos(\eta z) ds$$

und aus (4) erhält man

$$Z = 2\kappa\sigma \oint_s \ln R d\xi, \quad X = -2\kappa\sigma \oint_s \ln R d\eta. \quad (5)$$

Führt man anstatt der Komponenten Z und X die komplexe Größe

$$W = Z + iX \quad (6)$$

ein, die man wohl auch als komplexe Feldstärke bezeichnen kann und vertauscht

man zugleich die Koordinatenebene (z, x) mit der komplexen Zahlenebene $w = \zeta + i\xi$, so lassen sich die beiden Formeln (5) in einer einzigen Beziehung

$$W = -2\kappa\sigma i \oint_s \ln R dw \quad (7)$$

zusammenfassen.

Es sei nun f ein einfach zusammenhängendes Gebiet und P , wie bisher, ein äußerer Punkt, dessen Lage durch die komplexe Zahl $w_0 = z + ix$ bestimmt ist. Dann ist $\ln(w - w_0)$ eine im Gebiet f analytische Funktion und folglich $\oint_s \ln(w - w_0) dw = 0$.

Es ist jedoch, wenn man nach Abb. 1 den Winkel φ einführt,

$$w - w_0 = iR e^{-i\varphi}.$$

Man erhält somit

$$\oint_s \ln R dw = i \oint_s \varphi dw$$

und mit Rücksicht auf (7) gilt dann für die komplexe Feldstärke die Beziehung

$$W = 2\kappa\sigma \oint_s \varphi dw. \quad (8)$$

Für die Z -Komponente ergibt sich auf diese Weise die Formel

$$Z = 2\kappa\sigma \oint_s \varphi d\xi, \quad (9)$$

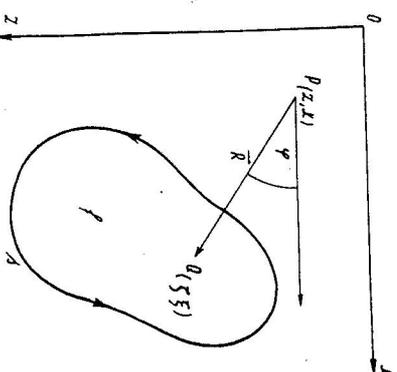


Abb. 1.

deren Gültigkeit man auch sonst leicht beweisen kann, wenn man den Körper parallel zur x -Achse in sehr dünne Streifen der Dicke $d\xi$ zerlegt und beachtet, daß die zu jedem solchen Streifen gehörige Z -Komponente gleich $2\kappa\sigma(\varphi_2 - \varphi_1) d\xi$ ist. Dabei bedeutet $\varphi_2 - \varphi_1$ den Winkel, unter dem der Streifen von P aus gesehen erscheint. Beachtet man weiter, daß unter den oben besprochenen Bedingungen $\varphi(\xi - z)$ eine auf s eindeutige, stetig differenzierbare Funktion der Lage des Punktes Q ist, so hat man $\oint_s \varphi d\xi = -\oint_s (\xi - z) d\varphi$ und aus (9) ergibt sich dann sofort eine andere Darstellung der Vertikalkomponente Z durch ein über die geschlossene Randkurve erstrecktes Integral,

$$Z = -2\kappa\sigma \oint_s (\xi - z) d\varphi.$$

In der letzteren Formel erkennt man ohne weiteres die von Caputo in einer anderen Form benutzte, in [4] (S. 161) näher betrachtete Beziehung und auch die bereits

früher erwähnte Hubbertsche Formel. Für die Komponente X gelangt man auf demselben Wege zu den Beziehungen

$$X = 2\kappa\sigma \oint_s \varphi \, d\xi = -2\kappa\sigma \oint_s (\xi - x) \, d\varphi.$$

Die beiden Gleichungen (4) können vektoriell in der Form

$$\vec{F} = 2\kappa\sigma \oint_s \vec{n} \ln R \, ds \quad (10)$$

beschrieben werden, wo \vec{n} wieder den Normaleneinheitsvektor bedeutet. Ist nun der Körper, dessen Schwerkraft wir berechnen wollen, ein unendliches Prisma von beliebigem Querschnitt, so ist s ein Vieleck. Bezeichnet man die einzelnen Seiten des letzteren mit s_v ($v = 1, 2, \dots, N$), so ist $n = n_v$ für jede Seite ein konstanter Vektor. Beachtet man noch, daß

$$U^{(v)} = -2\kappa\sigma \int_{s_v} \ln R \, ds \quad (11)$$

das auf den Aufpunkt P bezogene logarithmische Potential der mit der konstanten linearen Dichte 2σ belegten Vielecksseite s_v bedeutet, so ergibt sich aus (10) für unendlich lange Prismen die bemerkenswerte Beziehung

$$\vec{F} = -\sum_v n_v U^{(v)}. \quad (12)$$

Sie stellt das zweidimensionale Analogon des seinerzeit noch von Mehler für homogene Polyeder abgeleiteten bekannten Theorems dar. Das durch (11) ausgedrückte logarithmische Potential einer geraden Strecke kann auf elementarem Wege berechnet werden und man kann sodann mittels (12) das Feld des Prismas in übersichtlicher Form ausdrücken. Für Prismen gelangt man auf diese Weise verhältnismäßig einfach zu Formeln, die z. B. in [4] (s. 200 ff.) auf andere Art abgeleitet werden, den obenwähnten Talwanschen gleichwertig sind und den Vorteil einer einheitlichen Darstellung der beiden Komponenten Z und X bieten.

Man kann in (10) den Normaleneinheitsvektor $\vec{n} = \frac{\partial R}{\partial n}$ setzen, da ja, wenn man die Einheitsvektoren in den Richtungen der Koordinatenachsen mit e_z und e_x bezeichnet,

$$\frac{\partial R}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} [e_z(\xi - z) + e_x(\xi - x)] = e_z \cos(nz) + e_x \cos(nx)$$

ist. Da R eine lineare Vektorfunktion der Koordinaten (ξ, ξ) ist, erfüllt es die Gleichung $\Delta R = 0$. Da weiter $\ln R$ eine im Gebiet f harmonische Funktion der Lage des

Punktes Q ist, so ergibt sich aus dem Greenschen Satz

$$\oint_s \left[\vec{n} \ln R - R \frac{\partial}{\partial n} (\ln R) \right] ds = 0.$$

Aus (10) folgt dann, wenn man noch

$$\frac{\partial}{\partial n} (\ln R) = \frac{1}{R} \cos(nR) = \frac{h}{R^2}$$

setzt, die Darstellung der Feldstärke durch ein weiteres Kurvenintegral

$$\vec{F} = 2\kappa\sigma \oint_s \frac{hR}{R^2} \vec{n} \, ds, \quad (13)$$

wo $h = R \cos(nR)$ den Abstand des Aufpunktes P von der Tangente t bedeutet, die die Kurve s im Punkte Q berührt (Abb. 2). Die Größe h ist dabei positiv oder negativ je nachdem, ob sich bei der in Abb. 2 angedeuteten, mit dem Umlauf der Kurve s gleichsinnigen Orientierung der Tangente t , der Aufpunkt links oder rechts von der letzteren befindet. Ist s wieder ein Vieleck, so ist $h = h_v$ für die einzelnen Seiten s_v konstant. Der Ausdruck

$$\vec{F}^{(v)} = 2\kappa\sigma \int_{s_v} \frac{h}{R^2} \vec{n} \, ds$$

stellt jedoch die Anziehung durch den mit der Flächendichte σ homogen belegten ebenen Streifen (Prismenfläche) dar, der die Ebene (z, x) längs s_v senkrecht schneidet. Für unendliche Prismen gilt also außer der Mehlerschen Beziehung (12) auch eine weitere,

$$\vec{F} = \sum_v h_v \vec{F}^{(v)}. \quad (14)$$

Man kann die Beziehung (7) so umformen, daß im Integranden anstatt der Funktion $\ln R$ einfache rationale Funktionen der Koordinate ξ und ξ auftreten. Um die betreffenden Integraldarstellungen in möglichst einfacher Form zu erhalten, wählen wir das Bezugssystem so, daß $z = 0$ ist, die Achse x also durch den Aufpunkt P geht und folglich $w_0 = ix$ ist. Wir schreiben (7) in der Gestalt

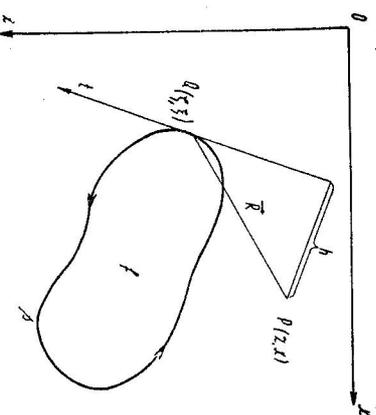


Abb. 2.

$$W = -2\kappa\sigma i \oint (w - w_0) \ln R - (w - w_0) d(\ln R)$$

und beachten zunächst, daß das Integral des vollständigen Differentials $d[(w - w_0) \ln R]$ über die geschlossene Kurve verschwindet (wir setzen ja voraus, daß P ein äußerer Punkt ist und folglich nicht auf s liegt). Weiter ist

$$d(\ln R) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial R}{\partial \zeta} d\zeta \right)$$

und wenn man hier für die Ableitungen des Abstands R nach den Koordinaten

$$\frac{\partial R}{\partial \zeta} = \frac{\zeta}{R}, \quad \frac{\partial R}{\partial \xi} = \frac{\xi - x}{R}$$

einsetzt, ergibt sich schließlich

$$W = 2\kappa\sigma i \oint (w - w_0) \frac{\zeta d\zeta + (\xi - x) d\xi}{\zeta^2 + (\xi - x)^2}. \quad (15)$$

Für die Komponenten der Feldstärke gelten somit die Beziehungen

$$Z = -2\kappa\sigma \oint \frac{\zeta(\xi - x) d\xi + (\xi - x)^2 d\zeta}{\zeta^2 + (\xi - x)^2}, \quad (16)$$

$$X = 2\kappa\sigma \oint \frac{\zeta^2 d\zeta + \zeta(\xi - x) d\xi}{\zeta^2 + (\xi - x)^2},$$

die auf den ersten Blick zwar komplizierter als die Ausgangsformeln (5) erscheinen, die für die Berechnung des Feldes jedoch wegen der Rationalität der Integranden in den meisten Fällen besser geeignet sind und aus denen darüber hinaus einige interessante Folgerungen gezogen werden können.

Die Randkurve s bestehe aus einer endlichen Anzahl von Kurvenstücken s_1, s_2, \dots, s_n . Die Integrale (15) und (16) können dann als Summen der betreffenden Integrale über die einzelnen Kurvenstücke s_i ausgedrückt werden. Im Falle eines unendlichen Prismas sind dann alle s_i gerade Strecken, deren Gleichungen sämtlich in der Parameterform

$$\zeta = a_i t + b_i, \quad \xi = c_i t + d_i, \quad (17)$$

geschrieben werden können. Führt man in den Integralen

$$I_v = \int_{s_i} \frac{\zeta(\xi - x) d\zeta + (\xi - x)^2 d\xi}{\zeta^2 + (\xi - x)^2}, \quad I'_v = \int_{s_i} \frac{\zeta^2 d\zeta + \zeta(\xi - x) d\xi}{\zeta^2 + (\xi - x)^2} \quad (18)$$

die Substitution (17) mit $d\zeta = a_i dt$, $d\xi = c_i dt$ ein, so erhält man zwei Integrale,

deren Integranden einfache rationale Funktionen der Veränderlichen t sind, die also in abgeschlossener Form durch elementare Funktionen ausgedrückt werden können. Man kann auf diese Weise ebenfalls zu den oben erwähnten Formeln für die Schwerewirkungen unendlicher homogener Prismen gelangen.

Die Komponenten der Feldstärke können jedoch prinzipiell auch in vielen anderen, allgemeineren Fällen durch elementare Funktionen in endlicher Form ausgedrückt werden. Wir wollen hier einige solche Fälle näher besprechen.

Die Gleichungen der Kurvenstücke s_i seien der Form

$$\zeta = P_\nu(t), \quad \xi = Q_\nu(t), \quad (\nu = 1, 2, \dots, N), \quad (19)$$

$$t_0^{(\nu)} \leq t \leq t_1^{(\nu)},$$

wo P_ν und Q_ν beliebige, im betrachteten Intervall stetig differenzierbare rationale Funktionen der Veränderlichen t sind. Offensichtlich sind dann die Integranden in (18) ebenfalls rationale Funktionen dieser Integrationsveränderlichen. Sind z. B. die P_ν Polynome von beliebigem Grade und alle $Q_\nu(t) = t$, so sind alle Kurvenstücke s_i Parabeln desselben Grades wie die P_ν und die Intensität des Gravitationsfeldes kann prinzipiell auch für einen solchen Körper in geschlossener Form mittels elementarer Funktionen dargestellt werden, wenn sich eine solche Darstellung in einzelnen Fällen auch ziemlich verwickelt gestalten mag.

Dasselbe gilt auch, wenn die Gleichungen der s_i in der Form

$$\zeta = P_\nu(\sin t, \cos t), \quad \xi = q_\nu(\sin t, \cos t) \quad (20)$$

oder

$$\zeta = P_\nu(\exp t), \quad \xi = Q_\nu(\exp t) \quad (21)$$

geschrieben werden können, wo P_ν , q_ν , P_ν und Q_ν wieder beliebige, in ihrem Definitionsbereich stetig differenzierbare Funktionen der Argumente $\sin t$, $\cos t$, bzw. $\exp t$ sind. Hierher gehört z. B. der Fall, wenn die Kurve s aus lauter Ellipsen- und Hyperbelbögen besteht. Die Gleichung eines Ellipsenbogens kann ja immer auf die Form

$$\zeta = a_i \cos t + b_i \sin t + c_i, \quad \xi = a'_i \cos t + b'_i \sin t + c'_i$$

gebracht werden, während die Gleichung eines Hyperbelbogens auf ähnliche Weise mit Hilfe hyperbolischer Funktionen geschrieben werden kann. In den soeben betrachteten Fällen sind die Integranden in (18) rationale Funktionen entweder von $\sin t$ und $\cos t$, oder von $\exp t$.

Man gelangt zu einem weiteren in geschlossener Form integrierbaren Fall, wenn die Gleichungen der s_i der Gestalt

$$\zeta = P_\nu(t, \sqrt{P_\nu(t)}), \quad \xi = q_\nu(t, \sqrt{P_\nu(t)}) \quad (22)$$

sind, wo die P_ν und q_ν wieder rationale Funktionen ihrer beiden Argumente und die $P_\nu(t)$ Polynome von höchstens viertem Grade sind. In solchen Fällen sind die Integrale

U und U' elliptisch und können auf bekannte Art auf die elliptischen Normalintegrale zurückgeführt werden.

Vom Gesichtspunkt der Integrierbarkeit in geschlossener Form ist es natürlich nicht nötig, daß alle s , zu einer und derselben der oben betrachteten Kategorien gehören. Es genügt vielmehr, wenn die Gleichung jedes Kurvenstücks einzeln in irgendeiner der Formen (19), (20), (21) oder (22) geschrieben werden kann. Natürlich wollen wir keineswegs behaupten, eine Integration in geschlossener Form mittels bekannter Funktionen sei auch in anderen Fällen nicht möglich.

Wir zeigen nun, auf welche Art auch die höheren Ableitungen des Potentials nach den rechtwinkligen kartesischen Koordinaten (z, x) des Aufpunktes durch über die Randkurve s erstreckte Kurvenintegrale dargestellt werden können. Wir setzen, wie vorhin, vorläufig voraus, daß der Aufpunkt außerhalb des anziehenden Körpers liegt. Das Potential des Körpers bezeichnen wir mit U und es sei

$$U_{pq} = \frac{\partial^{p+q} U}{\partial z^p \partial x^q} = -2\kappa\sigma \int_f \frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial x^q} (\ln R) df, \quad (p, q = 0, 1, 2, \dots). \quad (23)$$

Bei dieser Bezeichnung ist $U_{00} = U$, $U_{10} = Z$, $U_{01} = X$. Für die zweiten und dritten Ableitungen, die in der Gravimetrie üblicherweise mit U_{zz} , U_{xx} , U_{zx} und U_{zzz} bezeichnet werden, lauten die entsprechenden Symbole der Reihe nach U_{20} , U_{02} , U_{11} und U_{30} .

Wir differenzieren (7) $p-1$ mal nach z und q -mal nach x und beachten, daß wir rechts unter dem Integralzeichen differenzieren dürfen, da ja P nicht auf dem Integrationsweg liegt und somit $\ln R$ eine nach z und x beliebig vielmal stetig differenzierbare Funktion ist. Mit Rücksicht auf (6) erhalten wir auf diese Weise

$$U_{pq} + iU_{p-1, q+1} = -2\kappa\sigma i \oint_s \frac{\partial^{p+q-1}}{\partial z^{p-1} \partial x^q} (\ln R) dw, \quad (24)$$

$$(p = 1, 2, \dots; \quad q = 0, 1, 2, \dots)$$

und diese Formel drückt die gesuchte Integraldarstellung offensichtlich für alle Ableitungen des Potentials aus. Da R nur von den Koordinatendifferenzen ($\xi - z$, $\xi - x$) abhängt, kann diese Formel auch in der Form

$$U_{pq} + iU_{p-1, q+1} = 2\kappa\sigma i (-1)^{p+q} \oint_s \frac{\partial^{p+q-1}}{\partial \xi^{p-1} \partial \xi^q} (\ln R) dw \quad (25)$$

geschrieben werden.

Außer (24) gibt es noch eine Reihe anderer Möglichkeiten die Ableitungen des Potentials durch Kurvenintegrale darzustellen. Man kann z. B. unter den oben gemachten Voraussetzungen (15) beliebig vielmal nach z und x differenzieren, wobei man rechts wieder unter dem Integral differenzieren darf. Man könnte auf diese

Weise für die zweiten und höheren Potentialableitungen Integralformeln herleiten, in denen die Integranden rationale Funktionen der Koordinaten (ξ, ξ) wären. Es sei hier jedoch darauf hingewiesen, daß die in den an der rechten Seite der Gleichungen (24) und (25) stehenden Integralen auftretenden Ableitungen von $\ln R$ für $p + q > 1$ schon selbst rationale Funktionen der erwähnten Koordinaten sind. Grundsätzlich können also die Integrale in (24) und (25) in den durch (17), (19), (20), (21) und (22) charakterisierten Fällen mittels bekannter Funktionen in endlicher Gestalt ausgedrückt werden.

Bekanntlich ist

$$\Phi = R^{2(p+q)} \frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial x^q} (\ln R), \quad (p, q = 0, 1, 2, \dots; \quad p + q > 0) \quad (26)$$

ein harmonisches Polynom vom Grade $p + q$ in den Veränderlichen ($\xi - z, \xi - x$). Da Φ homogen ist, gilt

$$\vec{R} \text{ grad } \Phi = (p + q) \Phi. \quad (27)$$

Wegen $\Delta \Phi = 0$ ergibt sich aus dem Gaußschen Satz

$$\oint_s R^{-2(p+q-1)} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = \int_f \text{grad } R^{-2(p+q-1)} \text{ grad } \Phi df$$

und da

$$\text{grad } R^{-2(p+q-1)} = -2(p + q - 1) R^{-2(p+q)} \vec{R}$$

ist, hat man mit Rücksicht auf (26) und (27)

$$\oint_s R^{-2(p+q-1)} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = -2(p + q)(p + q - 1) \int_f \frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial x^q} (\ln R) dq.$$

Das rechts stehende Flächenintegral stellt jedoch, mit dem Faktor $-2\kappa\sigma$ multipliziert, gerade die Potentialableitung U_{pq} dar, so daß wir auf diese Weise zu einer weiteren nützlichen Darstellung dieser Ableitung durch ein Kurvenintegral in der Gestalt

$$U_{pq} = \frac{\kappa\sigma}{(p + q)(p + q - 1)} \oint_s R^{-2(p+q-1)} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds \quad (28)$$

gelangen, die für $p + q > 1$, also für die zweiten und höheren Ableitungen des Potentials gilt. Hieraus ergibt sich dann noch eine weitere Darstellung der Potentialableitungen durch Kurvenintegrale, die besonders für unendliche Prismen von interessanten Beziehungen führt. Nach dem Greenschen Satz ist nämlich

$$\oint_s R^{-2(p+q-1)} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = \oint_s \Phi \frac{\partial}{\partial n} [R^{-2(p+q-1)}] ds - \int_f \Phi \Delta R^{-2(p+q-1)} ds,$$

wobei wir $\Delta\Phi = 0$ gesetzt haben, da ja Φ in ζ und ξ harmonisch ist. Wir setzen hier

$$\frac{\partial}{\partial n} [R^{-2(p+q-1)}] = -2(p+q-1)hR^{-2(p+q)},$$

$$\Delta R^{-2(p+q-1)} = 4(p+q-1)^2 R^{-2(p+q)},$$

wo h wieder den (verabredungsgemäß positiven oder negativen) Abstand des Aufpunktes von der Tangente der Kurve s bedeutet. Unter Beachtung von (26) und (23) erhalten wir weiter

$$\oint_s R^{-2(p+q-1)} \frac{\partial\Phi}{\partial n} ds = -2(p+q-1) \oint_s \frac{h\Phi}{R^{2(p+q)}} ds + \frac{2(p+q-1)^2}{\kappa\sigma} U_{pq}.$$

Wir setzen das hier ausgedrückte Kurvenintegral in (28) ein und lösen die so erhaltene Gleichung nach U_{pq} . Es ergibt sich auf diese Weise

$$U_{pq} = \frac{2\kappa\sigma}{p+q-2} \oint_s \frac{h\Phi ds}{R^{2(p+q)}}, \quad (29)$$

eine Beziehung, die für $p > 0, q > 0, p+q \neq 2$ gilt. Ihre Gültigkeit für $p+q = 1$ folgt aus (13) und (26).

Bemidet sich der Aufpunkt außerhalb des anziehenden Körpers und ist f wieder ein einfach zusammenhängendes Gebiet, so kann man bei der Darstellung der Potentialableitungen anstatt der Gleichung (7) von der Formel (8) ausgehen. Da der Winkel φ eine stetig differenzierbare Funktion der Koordinaten z und x des Aufpunktes ist, kann man dabei rechts unter dem Integralzeichen differenzieren. Man gelangt auf diese Weise zu einer weiteren Formel

$$U_{pq} + iU_{p-1, q+1} = 2\kappa\sigma \oint_s \frac{\partial^{p+q-1}\varphi}{\partial z^{p-1} \partial x^q} dw, \quad (p > 0, q \geq 0) \quad (30)$$

und da φ nur von den Koordinatendifferenzen ($\zeta - z, \xi - x$) abhängt, kann man hierfür auch

$$U_{pq} + iU_{p-1, q+1} = 2\kappa\sigma (-1)^{p+q-1} \oint_s \frac{\partial^{p+q-1}\varphi}{\partial \zeta^{p-1} \partial \xi^q} dw$$

schreiben. Bei den Anwendungen dieser Formeln ist zu beachten, daß

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\partial\varphi}{\partial \zeta} = -\frac{\cos\varphi}{R}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial \xi} = \frac{\sin\varphi}{R}$$

ist. Für die zweiten Ableitungen des Potentials erhalten wir auf diese Weise die Formeln

$$U_{20} = -U_{02} = -2\kappa\sigma \oint_s \frac{\cos\varphi}{R} d\xi, \quad U_{11} = -2\kappa\sigma \oint_s \frac{\cos\varphi}{R} d\xi, \quad (31)$$

$$U_{11} = 2\kappa\sigma \oint_s \frac{\sin\varphi}{R} d\xi, \quad U_{02} = 2\kappa\sigma \oint_s \frac{\sin\varphi}{R} d\xi,$$

die sich in manchen Fällen als sehr brauchbar erweisen. Sollen in den obenstehenden Kurvenintegralen nur die Polarkoordinaten auftreten, so ist

$$d\xi = \sin\varphi dR + R \cos\varphi d\varphi, \quad d\xi = \cos\varphi dR - R \sin\varphi d\varphi$$

zu setzen. Die Beziehungen (31) gehen dann in die bekannten Formeln über, auf denen die Konstruktion einiger mechanischen Integratoren zur Bestimmung der zweiten Ableitungen des Potentials beruht und die z. B. in [5] (S. 403) auf anderem Wege abgeleitet werden. Für die dritten Ableitungen U_{30} und U_{21} ergibt sich

$$U_{30} = -2\kappa\sigma \oint_s \frac{\sin 2\varphi}{R^2} d\xi, \quad U_{21} = -2\kappa\sigma \oint_s \frac{\sin 2\varphi}{R^2} d\xi.$$

Für die höheren Ableitungen des Potentials homogener unendlich langer Prismen können aus (24) einfache und übersichtliche Beziehungen abgeleitet werden, die eine sehr nahe Analogie zu (12) darstellen und daher auch als eine Erweiterung des Mehlerschen Theorems auf die höheren Ableitungen des Potentials solcher Prismen aufgefaßt werden können. Ist nämlich s ein Vieleck, so können wir (24) in der Form

$$U_{pq} + iU_{p-1, q+1} = -2\kappa\sigma i \sum_{sv} \int \frac{\partial^{p+q-1}}{\partial z^{p-1} \partial x^q} (\ln R) dw$$

schreiben, wo die s_v , wie früher, die einzelnen Seiten des Vielecks bedeuten. Bezeichnen wir mit α_v den Winkel, den die im Sinne des Umlaufs orientierte Strecke s_v mit der positiven Richtung der z -Achse einschließt, so gilt für diese Strecke $dw = e^{i\alpha_v} ds$, sodaß wir weiter

$$U_{pq} + iU_{p-1, q+1} = -2\kappa\sigma i \sum_v e^{i\alpha_v} \int_{s_v} \frac{\partial^{p+q-1}}{\partial z^{p-1} \partial x^q} (\ln R) ds$$

erhalten. Nun ist aber

$$U_{p-1, q}^{(v)} = -2\kappa\sigma \int_{s_v} \frac{\partial^{p+q-1}}{\partial z^{p-1} \partial x^q} (\ln R) ds, \quad (32)$$

die durch die betreffenden unteren Indizes angeordnete Ableitung des auf den Aufpunkt P bezogenen logarithmischen Potentials der mit der linearen Dichte 2σ homogen belegten Strecke s_v . Somit haben wir

$$U_{pq} + iU_{p-1,q+1} = i \sum_{\nu} e^{i\alpha_{\nu}} U_{p-1,q}^{(\nu)}$$

woraus sich nach Trennung des reellen und imaginären Teiles

$$U_{pq} = - \sum_{\nu} U_{p-1,q}^{(\nu)} \sin \alpha_{\nu}, \quad U_{p-1,q+1} = \sum_{\nu} U_{p-1,q}^{(\nu)} \cos \alpha_{\nu} \quad (33)$$

$$(p = 1, 2, \dots; \quad q = 0, 1, 2, \dots)$$

ergibt. Die zweite der obigen Gleichungen kann auch in der Form

$$U_{pq} = \sum_{\nu} U_{p,q-1}^{(\nu)} \cos \alpha_{\nu}, \quad (p = 0, 1, 2, \dots; \quad q = 1, 2, \dots) \quad (34)$$

beschrieben werden. Die Beziehungen (33) und (34) stellen dann die oben angeordnete Erweiterung des Mehlerschen Theorems auf die höheren Potentialableitungen dar. Es sei besonders darauf hingewiesen, daß der Integrand in (32) eine rationale Funktion der Koordinaten ζ und ξ ist, die ihrerseits von der Integrationsveränderlichen s linear abhängen. Der betrachtete Integrand stellt somit eine rationale Funktion von s dar und $U_{p-1,q}^{(\nu)}$ kann für Prismen in geschlossener Form durch elementare Funktionen ausgedrückt werden.

Eine andere nützliche Beziehung ergibt sich aus der Gleichung (29), die für Prismen, wie man ohne weiteres einsieht, in der Form

$$U_{pq} = \frac{2\kappa\sigma}{p+q-2} \sum_{\nu} h_{\nu} \int_{s_{\nu}} \frac{\Phi ds}{R^{2(\sigma+q)}}$$

geschrieben werden kann. Unter Berücksichtigung von (26) ergibt sich für das rechts stehende Integral

$$\int_{s_{\nu}} \frac{\Phi ds}{R^{2(\sigma+q)}} = \int_{s_{\nu}} \frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial x^q} (\ln R) ds$$

und der letztere Ausdruck ergibt, mit $-2\kappa\sigma$ multipliziert, nach (32) die Größe $U_{pq}^{(\nu)}$. Für homogene unendliche Prismen erhält man auf diese Weise eine weitere Beziehung

$$U_{pq} = - \frac{1}{p+q-2} \sum_{\nu} h_{\nu} U_{pq}^{(\nu)},$$

die eine Verallgemeinerung der Gleichung (14) darstellt und für $p, q = 0, 1, 2, \dots$, $p+q \neq 2$ gilt.

Im Vorhergehenden haben wir die Ableitungen des Potentials durch über die Randkurve s erstreckte Kurvenintegrale ausgedrückt, ohne das Potential U selbst in diesem Zusammenhang untersucht zu haben. Wenn auch U bei den üblichen gravimetrischen Untersuchungen nicht gemessen wird und bei den meisten Interpretationsverfahren gar keine Rolle spielt, wollen wir hier auch für diese Funktion eine Darstellung durch ein Kurvenintegral angeben. Es sei $\psi(R)$ eine die Bedingung

$$\Delta\psi = \psi''(R) + \frac{1}{R} \psi'(R) \quad (35)$$

erfüllende Funktion. Aus dem Gaußschen Satz folgt dann, falls P ein äußerer Punkt ist,

$$\oint_s \frac{\partial\psi}{\partial n} ds = \oint_s \frac{h\psi'(R)}{R} ds = \int_f \ln R df$$

und somit

$$U = -2\kappa\sigma \int_f \ln R df = -2\kappa\sigma \oint_s \frac{h\psi'(R)}{R} ds. \quad (36)$$

Andererseits kann leicht nachgewiesen werden, daß die Funktion

$$\psi(R) = \frac{1}{4} \int R(2 \ln R - 1) dR$$

die Bedingung (35) erfüllt. Setzt man sie in (36) ein, so ergibt sich eine Darstellung des Potentials durch ein Kurvenintegral in der Form

$$U = -\frac{\kappa\sigma}{2} \oint_s (2 \ln R - 1) h ds.$$

Für unendlich lange Prismen gilt dann die Formel

$$U = -\frac{\kappa\sigma}{2} \sum_{\nu} h_{\nu} \int_{s_{\nu}} (2 \ln R - 1) ds,$$

mittels welcher das Potential leicht durch elementare Funktionen ausgedrückt werden kann. Mit Rücksicht auf (11) ist nämlich

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\nu} h_{\nu} U^{(\nu)} + \frac{\kappa\sigma}{2} \sum_{\nu} h_{\nu} s_{\nu},$$

wo nun s_{ν} die Länge der betreffenden Vielecksseite bedeutet.

In allen bisher betrachteten Fällen lag der Aufpunkt $P(z, x)$ außerhalb des anziehenden Körpers. Tatsächlich interessiert vom Gesichtspunkt der Deutung gravimetrischer Messungen in erster Linie das äußere Feld. Andererseits wird man von einer allgemeinen theoretischen Methode der Berechnung von Gravitationsfeldern naturgemäß verlangen, daß sie ihre Brauchbarkeit auch am inneren Feld beweist, zumal die Berechnung des Feldes im Inneren des Körpers in einigen Fällen auch vom praktischen Gesichtspunkt interessiert. Eine ausführliche Untersuchung aller oben abgeleiteten Formeln auf ihre Gültigkeit auch im inneren Gebiet, oder die Herleitung der für dieses Gebiet gültigen Varianten der betreffenden Formeln würde zu weit

führen, wir können jedoch diese wichtige Frage nicht gänzlich umgehen und untersuchen wenigstens die wichtigsten von den oben betrachteten Beziehungen.

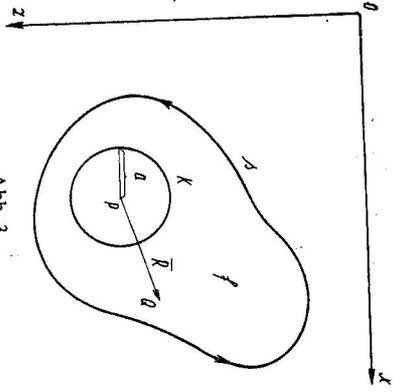


Abb. 3.

Liegt P im Inneren des Körpers, so denken wir uns einen unendlichen geraden Kreiszylinder, dessen Achse senkrecht zur Ebene (z, x) durch P hindurchgeht und diese Koordinatenebene im Kreis K schneidet (Abb. 3). Den Halbmesser a des Zylinders wählen wir so, daß K gänzlich im Inneren der geschlossenen Kurve s liegt. Die Gesamtwirkung des Körpers in P setzt sich dann aus zwei Anteilen zusammen: a) aus der Wirkung des Zylinders und b) aus der Anziehung durch den Körper, mit dem zylindrischen Hohlraum. In Bezug auf den letzteren ist P ein äußerer Punkt. Da P auf der Achse des homogenen Zylinders liegt, verschwindet in diesem Punkt die Anziehung durch den Zylinder und es ist nach (7)

$$W = -2\pi\sigma i \oint_K \ln R \, dw + 2\pi\sigma i \ln a \oint_K dw.$$

Das zweite Glied an der rechten Seite dieser Gleichung verschwindet jedoch wegen $\oint_K dw = 0$ und die Integralformel (7) gilt also auch für das innere Gebiet. Hieraus folgt jedoch sofort auch die Gültigkeit der Gleichungen (5), (9), (12) und (16) für das Innere des Körpers. Unverändert gilt für das innere Gebiet auch die Formel (13), da ja hier

$$\vec{F} = 2\pi\sigma \left[\oint_K \frac{hR}{R^2} ds - \oint_K \frac{hR}{R^2} ds \right]$$

ist und das Integral über K wegen $h = R = a$ und $\oint_K ds = 0$ verschwindet.

Abschließend beweisen wir für das innere Gebiet noch die Gültigkeit der Formel (24). Bezeichnen wir die zum Körper mit dem zylindrischen Hohlraum gehörigen Potentialableitungen mit U_{pq}' und die dem Zylinder entsprechenden mit U_{pq}'' , so ist

$$U_{pq}' + iU_{p-1, q+1}' = H - 2\pi\sigma i \oint_K \frac{\partial^{p+q-1}}{\partial z^{p-1} \partial x^q} (\ln R) \, dw + U_{pq}'' + iU_{p-1, q+1}'', \quad (37)$$

wo wir mit H den an der rechten Seite der Gleichung (24) stehenden Ausdruck mit dem über die Kurve s erstreckten Integral bezeichnet haben. Wie bereits früher,

haben wir in (37) die Gesamtwirkung des Körpers als Summe der Wirkungen des Körpers mit dem zylinderförmigen Hohlraum und des unendlichen Kreiszylinders ausgedrückt, wobei die ersten zwei Glieder rechts die Größe $U_{pq}' + iU_{p-1, q+1}'$ darstellen. Auf Grund elementarer potentialtheoretischer Betrachtungen kann nun leicht bewiesen werden, daß das Potential U'' des Zylinders in einem Punkt $Q(\xi, \zeta)$, der in seinem Inneren liegt, durch die Gleichung

$$U''(\xi, \zeta) = \pi\sigma\sigma[a^2(1 - 2\ln a) - (\zeta - z)^2 - (\xi - x)^2]$$

ausgedrückt wird. Hieraus folgt jedoch unmittelbar, daß für den Punkt P mit $\xi = z$ und $\zeta = x$

$$U_{20}'' = U_{02}'' = -2\pi\sigma\sigma \quad (38)$$

ist, während alle anderen Potentialableitungen U_{pq}'' verschwinden. Führt man im Integranden in (37) rechts Polarkoordinaten ein, indem man

$$w - w_0 = R e^{i\psi} \quad (39)$$

setzt, so gilt, wie man sich z. B. durch vollständige Induktion überzeugen kann,

$$\frac{\partial^{p+q-1}}{\partial z^{p-1} \partial x^q} (\ln R) = R^{-p-q+1} [A \cos(p+q-1)\psi + B \sin(p+q-1)\psi]$$

wo A und B zwei Konstanten sind und für den Kreis K , über den man in (37) zu integrieren hat, ist hier $R = a$ zu setzen. Beachtet man, daß bei der Integration gemäß (39) $dw = ae^{i\psi} d\psi$ ist, so ergibt sich aus der Orthogonalitätseigenschaft der trigonometrischen Funktionen sofort, daß das Integral in (37) für $p+q > 2$ verschwindet. Für die dritten und höheren Potentialableitungen gilt also nach dem obigen Feststellungen die Beziehung (24) auch dann, wenn der Aufpunkt im Inneren des Körpers liegt und es bleibt nur noch übrig, die Fälle $p = 2, q = 0$ und $p = 1, q = 1$ zu untersuchen (der Fall $p = 0, q = 2$ kommt wegen den der Gleichung (24) auferlegten Einschränkungen nicht in Frage). Wir beschränken uns auf den ersten der hier erwähnten beiden Fälle, da der zweite genau nach demselben Muster behandelt werden kann. Im Integranden an der rechten Seite von (37) ist dann für die dort auftretende Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial z} (\ln R) = \frac{z - \xi}{a^2} = \frac{\cos \psi}{a}$$

zu setzen und das Glied mit dem über K erstreckten Integral hat den Wert

$$2\pi\sigma \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi \, d\psi = 2\pi\sigma\sigma.$$

Infolge (38) gilt dann aber wieder $U_{pq}' + iU_{p-1, q+1}' = H$, d. h. die Formel (24). Aus der Gültigkeit der letzteren für das innere Gebiet folgt jedoch, daß das durch

die Beziehungen (33) und (34) ausgedrückte verallgemeinerte Mehlersche Theorem für Prismen ebenfalls nicht nur für das äußere, sondern auch für das innere Gebiet gilt.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Hubbert M. K., *A line-integral method of computing the gravimetric effects of two-dimensional masses*, *Geophysics* 13 (1948).
 - [2] Talwani M., Worzel J. L., Landisman M., *Rapid gravity computations for two-dimensional bodies with application to the Mendocino subnarine fracture zone*, *Journ. Geophys. Res.* 1959, 1.
 - [3] Kolbenheyer T., *Zur Darstellung des Gravitationsfeldes homogener Körper durch Flächenintegrale*, *Mathematisch-physikalische Zeitschrift* 13 (1963), 223—237.
 - [4] Jung K., *Schwerkraftvermögen in der angewandten Geophysik*, Leipzig 1961.
 - [5] Сорокин Л. В., *Гравиметрия и гравиметрическая разведка*, Москва 1953.
- Eingereicht am 7. 1. 1964.

*Katedra banského metáštva a geofyziky
Vanskéj fakulty
Vysoké školy technické,
Košice*

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ ДВУХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ С ПОМОЩЬЮ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Тибор Колбенхейер

Резюме

В работе [3] автор разработал теоретические основы метода решения прямой задачи гравитаведки, базирующейся на представлении гравитационного поля любого однородного трехмерного тела с помощью интегралов по его поверхности. В предлагаемой работе разработаны теоретические основы представления полей однородных двухмерных тел с помощью интегралов по их контуру. Используемая теорема Остроградского—Гаусса, автор приводит прежде всего к соотношениям (6) и (7), где комплексная величина N представляет собой напряженность гравитационного поля, κ — постоянная тяготения, σ — плотность тела, w — переменная точка комплексной плоскости. Значение остальных символов как и символов, выступающих в дальнейших формулах, становится ясным из рисунков. Далее простыми преобразованиями выводятся другие формулы, между ними также и формула Хубберта. Для бесконечных призм справедливо соотношение (12), совсем аналогичное теореме Мелера в трехмерном случае для многогранников. Формула (15) выражает напряженность поля с помощью криволинейного интеграла, в котором интегралом является радиональная функция переменных интегрирования. Из этой формулы выводится ряд таких случаев, в которых интегрирование можно провести в конечном виде с помощью элементарных функций. С помощью криволинейных интегралов формулами (24), (25) и (30) выражаются и высшие производные потенциала, для которых имеет место обобщение теоремы Мелера, представленное соотношениями (32), (33) и (34). В заключении работы доказываются справедливость упомянутых основных формул, которые первоначально доказывались лишь для внешней области, и для поля внутри притягивающего тела.