MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 14, 4, 1964

ЗАМЕТКА О РАДИКАЛАХ В ФАКТОРПОЛУГРУППАХ

РОБЕРТ ШУЛКА, Братислава

Настоящая статья является продолжением исследования работы [2], где введены понятия множества нильпотентных элементов относительно идеала полугруппы S и радикалов Клиффорда и Шварца относительно идеала полугруппы S. Обозначим множество нильпотентных элементов полугруппы S относительно идеала J полугруппы S через $N(S, J)$, радикал Клиффорда полугруппы S относительно идеала J полугруппы S через $R^*(S, J)$ и радикал Шварца полугруппы S относительно идеала J полугруппы S через $R(S, J)$.

Пусть S – полугруппа, а J – идеал в S. Обозначим через $\bar{S}$ факторполугруппу на полугруппе S, а через $\bar{J}$ факторполугруппу на полугруппе J, причем будем предполагать, что $\bar{J} \subseteq \bar{S}$. Пусть φ – натуральный гомоморфизм полугруппы S на факторполугруппу $\bar{S}$, $N(\bar{S}, \bar{J})$ – множество нильпотентных элементов факторполугруппы $\bar{S}$ относительно ее идеала $\bar{J}$, $R^*(\bar{S}, \bar{J})$ – радикал Клиффорда факторполугруппы $\bar{S}$ относительно ее идеала $\bar{J}$, а $R(\bar{S}, \bar{J})$ – радикал Шварца факторполугруппы $\bar{S}$ относительно ее идеала $\bar{J}$.

Лемма 1. $\bigcup_{\bar{x} \in N(\bar{S}, \bar{J})} \bar{x} = N(S, J)$.

Доказательство. Если $x \in \bigcup_{\bar{x} \in N(\bar{S}, \bar{J})} \bar{x}$, тогда существует такой класс $\bar{x}$, что $x \in \bar{x}$ и $\bar{x}$ нильпотентный класс относительно $\bar{J}$ $((\bar{x})^n \in \bar{J})$. Но тогда $(x^n \in J)$ x нильпотентный элемент относительно J и $x \in N(S, J)$.

Если $x \in N(S, J)$ $(x^n \in J)$, то класс $\bar{x}$, который содержит x, является нильпотентным элементом относительно $\bar{J}$ $((\bar{x})^n \in \bar{J})$ и $x \in \bar{x} \subseteq \bigcup_{\bar{x} \in N(\bar{S}, \bar{J})} \bar{x}$.

Для радикалов Клиффорда и Шварца получаем леммы 2 и 3.

Лемма 2. $\bigcup_{\bar{x} \in R^*(\bar{S}, \bar{J})} \bar{x} = R^*(S, J)$.

Доказательство. Если $x \in R^*(S, J)$, то x лежит в каком-нибудь нильидеале I полугруппы S относительно J. Тогда $\varphi(I)$ является нильидеалом в $\bar{S}$ относительно $\bar{J}$ и класс $\bar{x} = \varphi(x)$ принадлежит к $\varphi(I)$. Поэтому $x \in \bar{x} \subseteq \bigcup_{\bar{x} \in R^*(\bar{S}, \bar{J})} \bar{x}$.

Если $x \in \bigcup_{\bar{x} \in R^*(\bar{S}, \bar{J})} \bar{x}$, то существует такой класс $\bar{x}$, что $x \in \bar{x}$ и $\bar{x}$ является элементом нильидеала $\bar{I}$ в $\bar{S}$ относительно $\bar{J}$. Но тогда $\varphi^{-1}(\bar{I}) = I$ является нильидеалом в S относительно J и $x \in I$, поэтому $x \in R^*(S, J)$.

Лемма 3. $\bigcup_{\bar{x} \in R(\bar{S}, \bar{J})} \bar{x} = R(S, J)$.

Доказательство. Если $x \in R(S, J)$, то существует в S такой нильпотентный идеал I относительно J, что $x \in I$. Тогда $\varphi(I) = \bar{I}$ есть нильпотентным идеалом в $\bar{S}$ относительно $\bar{J}$, а поскольку $\varphi(x) = \bar{x} \in \bar{I}$, то $x \in \bar{x} \subseteq \bigcup_{\bar{x} \in R(\bar{S}, \bar{J})} \bar{x}$.

Если $x \in \bigcup_{\bar{x} \in R(\bar{S}, \bar{J})} \bar{x}$, то существует такой класс $\bar{x}$, что $x \in \bar{x}$ и $\bar{x}$ является элементом нильпотентного идеала $\bar{I}$ в $\bar{S}$ относительно $\bar{J}$. Но тогда $\varphi^{-1}(\bar{I}) = I$ является нильпотентным идеалом в S относительно J и $x \in I$, поэтому $x \in R(S, J)$.

Пусть S — полугруппа, J_i $(i = 1, 2)$ — идеал полугруппы S и $\bar{J}_i$ $(i = 1, 2)$ — факторполугруппа на J_i $(i = 1, 2)$. Пусть $\bar{S}_i$ $(i = 1, 2)$ — факторполугруппа на S, которая содержит факторполугруппу $\bar{J}_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда существует факторполугруппа на $J_1 \cap J_2$, классы которой являются непустыми пересечениями всегда одного класса из $\bar{J}_1$ и одного класса из $\bar{J}_2$ (смотри [1]). Эту факторполугруппу на $J_1 \cap J_2$ обозначаем через $\bar{J}_1 \sqcap \bar{J}_2$ и называем (согласно [1]) перерезом (чешск. průsek, нем. Durchdringung) факторполугрупп $\bar{J}_1$ и $\bar{J}_2$. Точно так же существует факторполугруппа на S, которая является перерезом факторполугрупп $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$. Мы будем обозначать ее $\bar{S}_1 \sqcap \bar{S}_2$.

Тогда из выше доказанных лемм 1, 2, 3 и из лемм 1, 4, 5 из работы [2], вытекают следующие теоремы:

Теорема 1. $N(\bar{S}_1, \bar{J}_1) \sqcap N(\bar{S}_2, \bar{J}_2) = N(\bar{S}_1 \sqcap \bar{S}_2, \bar{J}_1 \sqcap \bar{J}_2)$.

Теорема 2. $R^*(\bar{S}_1, \bar{J}_1) \sqcap R^*(\bar{S}_2, \bar{J}_2) = R^*(\bar{S}_1 \sqcap \bar{S}_2, \bar{J}_1 \sqcap \bar{J}_2)$.

Теорема 3. $R(\bar{S}_1, \bar{J}_1) \sqcap R(\bar{S}_2, \bar{J}_2) = R(\bar{S}_1 \sqcap \bar{S}_2, \bar{J}_1 \sqcap \bar{J}_2)$.

Доказательства всех трех теорем одинаковы. Приведем доказательство теоремы 3.

Доказательство (теоремы 3). Согласно леммы 3 $\bigcup_{\bar{x} \in R(\bar{S}_1, \bar{J}_1)} \bar{x} = R(S, J_1)$, $\bigcup_{\bar{y} \in R(\bar{S}_2, \bar{J}_2)} \bar{y} = R(S, J_2)$ и $\bigcup_{\bar{u} \in R(\bar{S}_1 \sqcap \bar{S}_2, \bar{J}_1 \sqcap \bar{J}_2)} \bar{u} = R(S, J_1 \cap J_2)$. Но с другой стороны, $\bigcup_{\bar{z} \in R(\bar{S}_1, \bar{J}_1) \sqcap R(\bar{S}_2, \bar{J}_2)} \bar{z} = R(S, J_1) \cap R(S, J_2) = R(S, J_1 \cap J_2)$ согласно леммы 5 из работы [2]. Следовательно, $R(\bar{S}_1 \sqcap \bar{S}_2, \bar{J}_1 \sqcap \bar{J}_2)$ и $R(\bar{S}_1, \bar{J}_1) \sqcap R(\bar{S}_2, \bar{J}_2)$ являются факторполугруппами на одном и том же множестве $R(S, J_1 \cap J_2)$ и имеют одни и те же классы, то есть $R(\bar{S}_1 \sqcap \bar{S}_2, \bar{J}_1 \sqcap \bar{J}_2) = R(\bar{S}_1, \bar{J}_1) \sqcap R(\bar{S}_2, \bar{J}_2)$, что и нужно было доказать.

Примечание. Теоремы 1, 2 и 3 нельзя распространить на бесконечное число идеалов, о чем свидетельствует следующий пример.

Пример. Замкнутый интервал $S = \langle 0, \frac{2}{3} \rangle$ с обыкновенным умножением как операцией является полугруппой. Замкнутые интервалы $J_n = \langle 0, 1/n \rangle$, $n = 2, 3, \ldots$ являются идеалами в S.

Пусть $\bar{S}$ — та факторполугруппа на полугруппе S, классами которой являются все одноэлементные множества $\{x\}$, где $x \in S$. Положим $\bar{S}_n = \bar{S}$ для $n = 2, 3, \ldots$ Дальше пусть для $n = 2, 3, \ldots$ $\bar{J}_n$ есть та факторполугруппа на полугруппе J_n, классами которой являются все одноэлементные множества $\{x\}$, где $x \in J_n$.

Тогда $N(\bar{S}_n, \bar{J}_n) = \bar{S}_n = \bar{S}$ для $n = 2, 3, \ldots$ и перерезом (¹) всех факторполугрупп $N(\bar{S}_n, \bar{J}_n)$ есть также $\bar{S}$. Если обозначим через $\prod_{n=2}^{\infty} \bar{S}_n$ перерез всех факторполугрупп $\bar{S}_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ и через $\prod_{n=2}^{\infty} \bar{J}_n$ перерез всех факторполугрупп $\bar{J}_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$, то получим $\prod_{n=2}^{\infty} \bar{S}_n = \bar{S}$ и $\prod_{n=2}^{\infty} \bar{J}_n = \{\{0\}\}$. Но тогда $N(\prod_{n=2}^{\infty} \bar{S}_n, \prod_{n=2}^{\infty} \bar{J}_n) = \{\{0\}\}$, а это отлично от $\bar{S} = N(\bar{S}_n, \bar{J}_n)$. Значит, теорема 1 не имеет места для бесконечного числа идеалов.

Поскольку S является коммутативной полугруппой, вследствие чего коммутативны и все ее факторполугруппы, и поскольку в коммутативной полугруппе S справедливо $N(\bar{S}, \bar{J}) = R^*(\bar{S}, \bar{J}) = R(\bar{S}, \bar{J})$ (смотри [2], теорему 7), то вышеприведенный пример показывает, что ни теорему 2, ни теорему 3 не можно распространить на бесконечное число идеалов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Borůvka O., *Základy teorie grupoidů a grup*, Praha 1962.

[2] Шулка Р., *О нильпотентных элементах, идеалах и радикалах полугруппы*, Matematicko-fyzikálny časopis *13* (1963), 209—222.

Поступило 11. 11. 1963.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Elektrotechnickej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej,
Bratislava

(¹) Под перерезом $\prod_{n=2}^{\infty} \bar{S}_n$ факторполугрупп $\bar{S}_n$ на (или в) полугруппе S нужно понимать факторполугруппу, классами которой есть все непустые пересечения классов $\bar{x}_n \in \bar{S}_n$, взятых по одному из каждой факторполугруппы $\bar{S}_n$.

A NOTE ON RADICALS IN FACTOR SEMIGROUPS

Robert Šulka

Summary

Let S be a semigroup and J a two-sided ideal in S. Let $\overline{S}$ be a factor semigroup on S, $\overline{J}$ a factor semigroup on J and $\overline{J} \subseteq \overline{S}$. The set of all nilpotent elements of the factor semigroup $\overline{S}$ with respect to the ideal $\overline{J}$ will be denoted by $N(\overline{S}, \overline{J})$; the Clifford radical of the factor semigroup $\overline{S}$ with respect to the ideal $\overline{J}$ will be denoted by $R^*(\overline{S}, \overline{J})$; the Schwarz radical of the factor semigroup $\overline{S}$ with respect to the ideal $\overline{J}$ will be denoted by $R(\overline{S}, \overline{J})$ (see [2]).

If $\overline{S}_1$ and $\overline{S}_2$ are two factor semigroups on (or in) S, we can form a new factor semigroup $\overline{S}_1 \sqcap \overline{S}_2$ on (or in) S, every class of which is a non-empty intersection of a class of $\overline{S}_1$ and a class of $\overline{S}_2$ (see [1]).

Let $\overline{S}_1$ and $\overline{S}_2$ be factor semigroups on S. $\overline{J}_1$ be an ideal in $\overline{S}_1$ and $\overline{J}_2$ an ideal in $\overline{S}_2$. Then we have

1) $N(\overline{S}_1, \overline{J}_1) \sqcap N(\overline{S}_2, \overline{J}_2) = N(\overline{S}_1 \sqcap \overline{S}_2, \overline{J}_1 \sqcap \overline{J}_2)$;

2) $R^*(\overline{S}_1, \overline{J}_1) \sqcap R^*(\overline{S}_2, \overline{J}_2) = R^*(\overline{S}_1 \sqcap \overline{S}_2, \overline{J}_1 \sqcap \overline{J}_2)$;

3) $R(\overline{S}_1, \overline{J}_1) \sqcap R(\overline{S}_2, \overline{J}_2) = R(\overline{S}_1 \sqcap \overline{S}_2, \overline{J}_1 \sqcap \overline{J}_2)$.