POZNÁMKA K JEDNÉMU ČLÁNKU J. SEDLÁČKA

ŠTEFAN ZNÁM, Bratislava

V článku [1] je riešený nasledujúci problém: udať štvorec v rovine tak, aby na jeho obvode ležalo i racionálnych bodov, kde $i = 0, 1, 2, 3, 4$. Ďalej je dokázaná veta: keď tri strany nejakého štvorca sú z M_1 (M_1 je množina všetkých priamok, ktoré obsahujú práve 1 racionálny bod), potom aj štvrtá strana je z M_1 a vzdialenosti racionálnych bodov protiľahlých strán sú rovnaké. V našej poznámke dokážeme túto vetu a riešime spomenutý problém *geometrickou cestou.*

Množinu priamok, ktoré obsahujú nekonečne mnoho racionálnych bodov, budeme značiť M_∞. Z našich úvah vynecháme priamky rovnobežné so súradnými osami. Majme priamku $\mathbf{p} \equiv y = kx + q$. Ľahko sa dokáže:

Lema. a) $\mathbf{p} \in M_\infty \Leftrightarrow k, q$ *sú racionálne;*
b) *ak k je racionálne a $\mathbf{p}$ obsahuje aspoň jeden racionálny bod, tak $\mathbf{p} \in M_\infty$.*

Zoberme v rovine tri rôzne racionálne body $R_1(x_1, y_1)$, $R_2(x_2, y_2)$, $R_3(x_3, y_3)$. Bodom R_2 veďme priamku, kolmú na R_1R_3. Na túto priamku nanesme z R_2 vzdialenosť R_1R_3. Môžeme to urobiť dvoma spôsobmi; koncové body týchto úsečiek označme $R'_4(x'_4, y'_4)$, resp. $R''_4(x''_4, y''_4)$. Z konštrukcie plynú vzťahy:

$$\begin{aligned} |x_3 - x_1| &= |y'_4 - y_2| = |y''_4 - y_2|, \\ |y_3 - y_1| &= |x'_4 - x_2| = |x''_4 - x_2|. \end{aligned} \tag{1}$$

Keďže $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ sú racionálne čísla, to isté platí aj o x'_4, x''_4, y'_4, y''_4, teda R'_4 a R''_4 sú racionálne body.

Veta. *Nech je daný štvorec $ABCD$. Nech priamky AB, BC, CD patria do M_1. Potom aj priamka DA patrí do M_1. Ak racionálne body priamok AB, BC, CD, DA sú R_1, R_2, R_3, R_4, tak*

$$R_1R_3 = R_2R_4, \qquad R_1R_3 \perp R_2R_4. \tag{2}$$

Dôkaz. Majme štvorec $ABCD$. Keď body R_1, R_2, R_3 ležia na priamkach AB, BC, CD, potom jeden z bodov R'_4 a R''_4 leží na priamke DA. DA však nemôže patriť do M_∞, lebo potom by bolo $BC \in M_\infty$ na základe lemy. Teda jediným racionálnym bodom DA je R'_4, resp. R''_4. Tým je dôkaz ukončený, lebo tieto body zrejme spĺňujú vzťahy (2).

Na základe tejto vety môžeme skonštruovať štvorce, na obvode ktorých leží i racionálnych bodov, kde $i = 0, \ldots, 4$. Zvoľme si v rovine 4 rôzne racionálne body R_1, R_2, R_3, R_4 tak, aby splňovali nasledujúce podmienky: a) $R_1R_3 = R_2R_4$; b) $R_1R_3 \perp R_2R_4$.

Na základe predošlých úvah je jasné, že R_i môžeme tak voliť. Veďme bodmi R_1 a R_3 priamky o smernici k (k je ľubovoľné iracionálne číslo) a bodmi R_2 a R_4 priamky o smernici $-1/k$. Z voľby bodov R_i plynie, že tieto priamky tvoria strany nejakého štvorca. Ľahko sa zistí, že vhodnou voľbou R_i a k dostaneme štvorce, na stranách ktorých leží i racionálnych bodov, kde $i = 0, \ldots, 4$. Pri $i = 0, 1, 2, 4$ môžeme R_i voliť tak, že sa úsečky R_1R_3 a R_2R_4 pretínajú, ale sa nerozpoľujú; pri $i = 3$ ich volíme tak, aby sa tieto úsečky nepretínali.

LITERATÚRA

[1] Sedláček J., *O racionálních bodech v rovině*, Mat. fyz. časopis *11* (1961), 256—262.

Došlo 24. 4. 1963.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Chemickej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej,
Bratislava

ЗАМЕТКА К ОДНОЙ СТАТЬЕ И. СЕДЛАЧЕКА

Штефан Знам

Резюме

В заметке дается геометрический вывод результатов работы [1].