

# О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ МЕТОДА КАТЕГОРИЙ В ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

АНТОН ЛЕГЕНЬ (ANTON LEGÉN), Братислава  
и ТИБОР ШАЛАТ (TIBOR ŠALÁT), Братислава

Существует несколько работ (смотри [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]), которые посвящены изучению свойств бесконечных рядов при помощи метрических пространств, причем часто употребляется метод категорий. Эта статья, вызванная работой [1], является вкладом в упомянутую проблематику.

## 1.

*Пространство всех последовательностей точек линейного метрического пространства*

Пусть  $(X, \varrho)$  обозначает линейное метрическое пространство, т. е.  $X$  является линейным векторным пространством над полем  $I$  всех комплексных (вещественных) чисел, причем метрика  $\varrho(\xi, \eta)$  обладает следующими свойствами:

- (а) для любых трех точек  $\xi, \eta, \zeta \in X$  выполняется  $\varrho(\xi + \eta, \zeta + \eta) = \varrho(\xi, \zeta)$ ,
- (б) если  $t_n, t \in I; \xi_n, \xi \in X, n = 1, 2, \dots$ , причем  $t_n \rightarrow t$  и  $\xi_n \rightarrow \xi$  (т. е.  $\varrho(\xi_n, \xi) \rightarrow 0$ ), то  $t_n \xi_n \rightarrow t\xi$  (т. е.  $\varrho(t_n \xi_n, t\xi) \rightarrow 0$ ) (смотри [8], стр. 41).

Теперь к пространству  $(X, \varrho)$  присоединим пространство  $s(X)$  всех последовательностей точек из  $X$ . Если  $x = \{\xi_i\}_1^\infty, y = \{\eta_i\}_1^\infty, x, y \in s(X)$  являются точками  $s(X)$ , определим метрику на  $s(X)$  аналогично метрике Фреше следующим образом:

$$\varrho'(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\varrho(\xi_i, \eta_i)}{1 + \varrho(\xi_i, \eta_i)}.$$

Сходимость в  $(s(X), \varrho')$  означает сходимость „по всем координатам“. Если определим сложение двух последовательностей  $x, y \in s(X)$  и умножение числом  $\lambda \in I$  следующим образом:  $x + y = \{\xi_i + \eta_i\}_1^\infty$  и  $\lambda x = \{\lambda \xi_i\}_1^\infty$ , тогда простым способом можно проверить, что при этом определении  $(s(X), \varrho')$  — линейное метрическое пространство.

В этой части работы мы будем изучать два вопроса:

(А) Пусть  $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$  является последовательностью чисел из поля  $T$ , содержащей бесконечно  $a_i \neq 0$ . Встает естественный вопрос обследования свойств множества всех тех  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in s(X)$ , для которых ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i$  сходится в пространстве  $(X, \varrho)$ . Требуется, чтобы  $a_i \neq 0$ , для бесконечно много  $i$ , является необходимым для исключения тривиального случая.

(Б) Пусть  $X$  — пространство Банаха,  $A$  — бесконечная нижняя треугольная матрица. Становится вопрос, какие свойства должны быть у матрицы  $A$  чтобы множество всех тех  $x \in s(X)$ , которые суммируемы матрицей  $A$  было множеством первой категории в пространстве  $(s(X), \varrho)$ .

Следующая теорема отвечает на вопрос (А).

**Теорема 1.1.** Пусть  $(X, \varrho)$  — линейное метрическое пространство, пусть  $(s(X), \varrho')$  имеет прежнее значение. Пусть  $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$  — последовательность чисел из поля  $T$ , содержащая бесконечно  $a_i \neq 0$ . Если обозначим через  $s'(X)$  множество всех тех  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in s(X)$ , для которых  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i$  сходится в  $(X, \varrho)$ , то  $s'(X)$  является множеством первой категории в  $(s(X), \varrho')$ .

**Замечание.** Если взять во внимание, что полное метрическое пространство является пространством второй категории на самом себе, то получаем следующие следствия:

**Следствие.** Пусть  $(X, \varrho)$  — полное линейное метрическое пространство, пусть  $s(X)$  имеет прежнее значение. Пусть  $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$  — последовательность чисел из поля  $T$ , содержащая бесконечно  $a_i \neq 0$ .

**Утверждение:** Множество  $s'(X)$  всех тех  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in s(X)$ , для которых ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i$  расходится в  $(X, \varrho)$ , является множеством второй категории в  $(s(X), \varrho')$ .

Показательство теоремы 1.1. Для каждого натурального  $n$  определим на множестве  $s'(X)$  ( $s'(X)$  считаем метрическим пространством с метрикой  $\varrho'$ ) функцию  $\sigma_n(X)$  следующим образом:

$$\text{если } x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in s'(X), \text{ тогда } \sigma_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i \cdot \sigma_n \text{ является отображением } s'(X)$$

в  $X$ . Покажем, что при фиксированном  $n$   $\sigma_n$  — непрерывное отображение на  $s'(X)$ . Пусть  $x^0 = \{\xi_i^0\}_{i=1}^{\infty} \in s'(X)$  и пусть  $x^{(l)} \rightarrow x^0$  в  $s'(X)$  ( $x^{(l)} = \{\xi_i^{(l)}\}_{i=1}^{\infty} \in s'(X)$ ;  $l = 1, 2, 3, \dots$ ). Потом для всех  $k = 1, 2, \dots, n$  справедливо:  $\xi_k^{(l)} \rightarrow \xi_k^0$  и  $a_k \xi_k^{(l)} \rightarrow a_k \xi_k^0$  в  $(X, \varrho)$ , т. е.  $\varrho(a_k \xi_k^{(l)}, a_k \xi_k^0) \rightarrow 0$ , если  $l \rightarrow \infty$ . Тогда

$$\varrho(\sigma_n(x^{(l)}), \sigma_n(x^0)) = \varrho\left(\sum_{i=1}^n a_i \xi_i^{(l)}, \sum_{i=1}^n a_i \xi_i^0\right) \leq \sum_{i=1}^n \varrho(a_i \xi_i^{(l)}, a_i \xi_i^0) \rightarrow 0.$$

Определим теперь на  $s'(X)$  функцию  $\sigma(x)$  следующим образом: если  $x =$

$= \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in s'(X)$ , то  $\sigma(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i$ ;  $\sigma$  является отображением  $s'(X)$  в  $X$  и  $\sigma(x) =$

$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x)$  для всех  $x \in s'(X)$ . Покажем, что  $\sigma$  является разрывным в каждой точке  $x \in s'(X)$ . Пусть  $x^0 = \{\xi_i^0\}_{i=1}^{\infty} \in s'(X)$  и возьмем  $\xi^0 \in X$ ,  $\xi^0 \neq 0$ . Положим  $\varepsilon_0 = \varrho(\xi^0, 0)$ . Достаточно показать, что во всякой сферической окрестности  $\mathcal{S}(x^0, \delta)$  точки  $x^0$  существует  $y = \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty} \in s'(X)$  такое, что  $\varrho(\sigma(x^0), \sigma(y)) = \varepsilon_0$ . Ввиду условий теоремы к числу  $\delta > 0$  можно найти такое число  $N$ , что  $a_N \neq 0$  и  $2^{-N} < \delta$ . Определим теперь последовательность  $y = \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$  следующим образом:

$$\eta_i = \xi_i^0 \quad \text{для} \quad i \neq N \quad \text{и} \quad \eta_N = \xi_N^0 + \frac{1}{a_N} \xi^0.$$

Для  $n > N$  есть  $\sigma_n(y) = \sigma_n(x^0) + \xi^0$  и

$$\varrho(\sigma_n(y), \sigma(x^0) + \xi^0) = \varrho(\sigma_n(x^0) + \xi^0, \sigma(x^0) + \xi^0) \rightarrow 0,$$

т. е.  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \eta_i$  сходится в  $X$  к сумме  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \xi_i^0 + \xi^0$ . Дальше

$$\varrho(x^0, y) = \frac{1}{2^N} \cdot \frac{\varrho(\xi_N^0, \eta_N)}{1 + \varrho(\xi_N^0, \eta_N)} < \delta, \quad \text{т. е.} \quad y \in \mathcal{S}(x^0, \delta).$$

Известно (смотри [9], стр. 185), что если  $f$  — отображение метрического пространства  $P$  в метрическое пространство  $Q$  и если для каждого  $x \in P$   $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ , причем  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность непрерывных отображений пространства  $P$  в  $Q$ , то множество точек разрыва отображения  $f$  в  $P$  является множеством первой категории в  $P$ . Из этого вытекает, что множество всех точек разрыва отображения  $\sigma$  в  $s'(X)$  является множеством первой категории в  $s'(X)$ , следовательно,  $s'(X)$  является множеством первой категории в  $s'(X)$  и даже первой категории в  $(s(X), \varrho')$ .

Таким образом доказательство теоремы закончено.

Далее мы докажем теорему, которая отвечает на вопрос (Б).

**Теорема 1.2.** Пусть  $X$  — пространство Банаха (норма  $\|x\| = \varrho(x, 0)$ ) над полем  $T$ , пусть  $(s(X), \varrho)$  имеет прежнее значение. Далее пусть  $A = (a_{nm})$  является бесконечной нижней треугольной матрицей комплексных (вещественных) чисел, удовлетворяющей следующим условиям:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm} = 0, \quad m = 1, 2, \dots;$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n a_{nm} = \beta, \quad \beta \neq 0.$$

Обозначим через  $s_1(X)$  множество всех тех  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty \in s(X)$ , которые суммируемые матрицей  $A$ .

Утверждение:  $s_1(X)$  — множество первой категории в  $(s(X), \varrho)$ .

Доказательство. Определим для каждого  $x \in s_1(X)$  и для каждого натурального  $n$  отображение  $\sigma_n$  пространства  $s_1(X)$  в  $X$  следующим образом:

$$\sigma_n(x) = \sum_{m=1}^n a_{nm} \xi_m.$$

Покажем, что  $\sigma_n$  является (при фиксировании  $n$ ) на  $s_1(X)$  непрерывным. Пусть  $x^0 = \{\xi_i^0\}_{i=1}^\infty \in s_1(X)$ ,  $x^m = \{\xi_i^m\}_{i=1}^\infty \in s_1(X)$  ( $m = 1, 2, \dots$ ), причем  $\lim_{m \rightarrow \infty} x^m = x^0$  в пространстве  $(s_1(X), \varrho)$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ . Поэтому что  $\xi_i^m \rightarrow \xi_i^0$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), то существует к числу  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{1 + \sum_{m=1}^n |a_{nm}|}$  такое число  $m_0$ , что для всех  $m > m_0$  есть  $\|\xi_i^m - \xi_i^0\| < \varepsilon' (k = 1, 2, \dots, n)$ . Тогда для  $m > m_0$  справедливо:

$$\begin{aligned} \|\sigma_n(x^m) - \sigma_n(x^0)\| &= \left\| \sum_{i=1}^n a_{ni} \xi_i^m - \sum_{i=1}^n a_{ni} \xi_i^0 \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_{ni} (\xi_i^m - \xi_i^0) \right\| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n |a_{ni}| \|\xi_i^m - \xi_i^0\| \leq \sum_{i=1}^n |a_{ni}| \cdot \varepsilon' < \varepsilon. \end{aligned}$$

Определим  $\sigma(x)$  для  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty \in s_1(X)$  следующим образом:  $\sigma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x)$ .  $\sigma$  является отображением пространства  $s_1(X)$  в  $X$ . Покажем, что  $\sigma$  разрывное в каждой точке  $x \in s_1(X)$ . Пусть  $x^0 = \{\xi_i^0\}_{i=1}^\infty \in s_1(X)$  и пусть  $0 < \varepsilon < 1$  и  $\delta > 0$ . Пусть  $N$  такое, что  $\sum_{n=N+1}^\infty 2^{-n} < \delta$ . Определим  $y = \{\eta_i\}_{i=1}^\infty$  следующим образом:  $\eta_i = \xi_i^0$  для  $i \leq N$  и  $\eta_i = \xi_i^0 + \xi_0$  для  $i > N$ , причем  $\xi_0 \in X$  есть такой элемент, что  $\|\xi_0\| = \frac{1}{|\beta|}$ . Тогда

$$\varrho(x^0, y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{\|\xi_n^0 - \eta_n\|}{1 + \|\xi_n^0 - \eta_n\|} \leq \sum_{n=1+N}^\infty \frac{1}{2^n} < \delta,$$

следовательно,  $y \in \mathcal{S}(x^0, \delta)$  и

$$\begin{aligned} \sigma(y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{m=1}^n a_{nm} \eta_m \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{m=1}^n a_{nm} \xi_m^0 + \sum_{m=1}^n a_{nm} \xi_0 - \sum_{m=1}^N a_{nm} \xi_0 \right] = \sigma(x^0) + \beta \xi_0^0. \end{aligned}$$

Значит,  $\|\sigma(y) - \sigma(x^0)\| = \|\beta \xi_0^0\| = 1 > \varepsilon$ .

Далее будем продолжать аналогично, как и в доказательстве теоремы 1.1.

Следствие. Пусть  $X$  — пространство Банаха над полем  $T$ . Пусть  $s(X)$  и  $A$  имеют прежние значения.

Утверждение: Множество  $s_2(X)$  всех тех  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty \in s(X)$ , которые не суммируемые матрицей  $A$ , является множеством второй категории в  $(s(X), \varrho)$ .

Замечание: Матрицу  $A$  называем регулярной тогда, когда из  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi$  следует  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n a_{nm} \xi_m = \xi$ .

По известной теореме Тейлора для регулярности матрицы  $A$  необходимо и достаточно одновременное выполнение этих условий:

(а) существует такое  $L$ , что  $\sum_{m=1}^n |a_{nm}| < L$  для всех  $n = 1, 2, 3, \dots$

(б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n a_{nm} = 1$ ,

(в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nm} = 0$  для всех  $m = 1, 2, 3, \dots$

Каждая регулярная нижняя треугольная матрица удовлетворяет условиям теоремы 1, 2, и, значит, множество всех последовательностей  $x \in s(X)$ , суммируемых регулярной матрицей, является множеством первой категории в  $(s(X), \varrho)$ .

Уже в 1911 году Штейнгауз показал [13], что к каждой регулярной бесконечной матрице существует последовательность чисел 0, 1, которая не суммируема этой матрицей. Теорема 1, 2 и ее следствие, сформулированное в замечании, представляет собой доказательство существования последовательности вещественных чисел, которая не суммируема данной регулярной матрицей и, кроме того, определенный более точный взгляд на систему всех этих последовательностей.

2.

О структуре пространства  $s$

Если в предыдущей части работы за пространство  $(X, \varrho)$  возьмем множество всех вещественных чисел с метрикой Эвклида, тогда  $s(X)$  тождественно с пространством всех последовательностей вещественных чисел (в этом случае пишем  $s(X) = s$ ) с метрикой Фреше. Сразу же получаем результат, который является непосредственным следствием теоремы 1.1:

Пусть  $a = \{\alpha_i\}_{i=1}^\infty$  является последовательностью вещественных чисел, причем  $\alpha_i \neq 0$  для бесконечно многих  $i$ . Потом для всех  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty \in s(X)$ , за исключением точек множества первой категории (в  $s$ ), справедливо: ряд  $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i \xi_i$  расходится.

В этой части докажем более сильный результат. Покажем, что справедлива теорема:

**Теорема 2.1.** Пусть  $a = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$  — последовательность вещественных чисел, причем  $a_i \neq 0$  для бесконечно многих  $i$ . Тогда для всех  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in s$ , за исключением точек множества первой категории ( $\in s$ ), справедливо:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i \xi_i = -\infty; \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i \xi_i = +\infty \quad (1)$$

**Следствие.** Если возьмем во внимание, что  $s$  является полным метрическим пространством, сразу получаем: Множество  $s''$  всех тех  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in s$ , для которых справедливо (1), есть множеством второй категории в  $s$ .

Прежде чем приступим к доказательству теоремы 2.1, приведем две леммы, нужные для доказательства.

**Лемма 2.1.** Пусть для  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in s$  и для натурального  $n$   $\sigma_n(x) = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i$ .

Пусть далее:

$$A = \mathcal{E}[x] = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in s; \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = +\infty,$$

$$A' = \mathcal{E}[x] = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in s; \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = -\infty.$$

**Утверждение:** Множества  $A, A'$  являются множествами типа  $G_\delta$  в  $s$ .

**Доказательство.** При натуральном  $K$  обозначим знаком  $A(K)$  множество всех  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in s$  с свойством: К последовательности  $x$  существует такое натуральное число  $n = n(x)$ , что  $\sigma_n(x) > K$ . Покажем, что  $A(K)$  является открытым множеством в  $s$ . Пусть  $x^0 = \{\xi_i^0\}_{i=1}^{\infty} \in A(K)$ . Следовательно, существует  $n = n(x^0)$  такое что  $\sigma_n(x^0) > K$ . Выберем  $\varepsilon > 0$  так чтобы  $\sigma_n(x^0) - \varepsilon > K$ . При  $n = n(x^0)$  выберем  $\delta > 0$  так, чтобы

$$\delta < \frac{1}{2^n}; \quad \frac{2^n \delta}{1 - 2^n \delta} \cdot \sum_{i=1}^n |a_i| < \varepsilon \quad (2)$$

Это вполне возможно. Теперь будем образовывать  $\mathcal{S}(x^0, \delta)$  (сферическую окрестность точки  $x^0$ ). Покажем, что  $\mathcal{S}(x^0, \delta) \subset A(K)$ . Пусть  $x \in \mathcal{S}(x^0, \delta)$ . Тогда

$$\varrho(x, x^0) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \xi_i^0|}{1 + |\xi_i - \xi_i^0|} < \delta,$$

и, таким образом, для каждого  $i = 1, 2, \dots, n(x^0)$

$$\frac{1}{2^n} \frac{|\xi_i - \xi_i^0|}{1 + |\xi_i - \xi_i^0|} \leq \frac{1}{2^i} \frac{|\xi_i - \xi_i^0|}{1 + |\xi_i - \xi_i^0|} < \delta,$$

откуда  $|\xi_i - \xi_i^0| < \frac{2^n \delta}{1 - 2^n \delta}$  для  $i = 1, 2, \dots, n$ . Потом согласно (2) мы имеем:

$$\sigma_n(x) = \sigma_n(x^0) + \sum_{i=1}^n a_i (\xi_i - \xi_i^0) > \sigma_n(x^0) - \frac{2^n \delta}{1 - 2^n \delta} \sum_{i=1}^n |a_i| > \sigma_n(x^0) - \varepsilon > K,$$

т. е.  $x \in A(K)$ .

Для окончания доказательства достаточно заметить, что  $A = \bigcap_{K=1}^{\infty} A(K)$ . И так,

$A$  является множеством типа  $G_\delta$  в  $s$ .

Вполне аналогично можно доказать утверждение, что множество  $A'$  является множеством типа  $G_\delta$  в  $s$ .

**Лемма 2.2.** Множество  $A \cap A'$  плотное в  $s$ .

**Доказательство.** Пусть  $x_1^0 = \{\xi_i^0\}_{i=1}^{\infty} \in s$  и пусть  $\delta > 0$ . Пусть натуральное  $N$  такое, что  $\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \delta$ . Определим  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$  следующим образом:  $\xi_i = \xi_i^0$  для  $i \leq N$  и  $\xi_i = \eta_i$  для  $i > N$ , где  $y = \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$  — такая последовательность вещественных чисел, для которой ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \eta_i$  является колеблющимся между  $-\infty$  и  $+\infty$ . Существование такой последовательности вытекает из условия теоремы 2.1. Легко показать, что  $x \in \mathcal{S}(x^0, \delta)$  и  $x \in A \cap A'$ .

**Доказательство теоремы 2.1.** Обозначим

$$s' = \mathcal{E}[x] = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in s; \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = +\infty, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = -\infty$$

и положим  $s' = s - s''$ . Таким способом получаем  $s'' = A \cap A'$ , следовательно,  $s''$  является множеством  $G_\delta$  в  $s$ , а  $s'$  является множеством типа  $F_\sigma$  в  $s$ , значит,  $s' = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ , где  $F_i$  — замкнутые множества в  $s$  для всех  $i = 1, 2, \dots$ . Потом согласно лемме 2.2 множество  $s'' = s - \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} (s - F_i)$  является плотным в  $s$ , значит, и подавно является плотным в  $s$  всякое из множеств  $s - F_i = s - \bar{F}_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), так что  $F_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) является нигде не плотным в  $s$ , следовательно,  $s$  является множеством первой категории в  $s$ .

Этим доказательство теоремы закончено.

Будем говорить, что бесконечная матрица  $A = (a_{nm})$  имеет свойство (B), когда к каждому  $n = 1, 2, \dots$  существует  $m_n$  такое, что  $a_{nm_n} \neq 0$  и  $a_{nm} = 0$  для всех  $m > m_n$ .

Обозначим при  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$   $\tau_n(x) = \sum_{m=1}^{m_n} a_{nm} \xi_m$ .

Следующая теорема исходит из теоремы 1.2.

**Теорема 2.2.** Пусть  $A$  является бесконечной матрицей, обладающей свойством (В), причем  $\limsup m_n = +\infty$ . Обозначим знаком

$$s_2' = \delta' [x = \{\xi_{i,1}^x\} \in s; \limsup \tau_n(x) = +\infty, \liminf \tau_n(x) = -\infty].$$

**Утверждение:** Множество  $s_2'$  является множеством второй категории в пространстве  $s$ .

Докажем это. Обозначим

$$A_1 = \delta' [x = \{\xi_{i,1}^x\} \in s; \limsup \tau_n(x) = +\infty]$$

$$A_2 = \delta' [x = \{\xi_{i,1}^x\} \in s; \liminf \tau_n(x) = -\infty]$$

Покажем, что множества  $A_1, A_2$  являются множествами типа  $G_\delta$  в  $s$ . Для натурального  $K$  обозначим

$$A_1(K) = \delta' [x = \{\xi_{i,1}^x\} \in s; \text{существует } n(x) \text{ так, что } \tau_n(x) > K]$$

Видно, что  $A_1 = \bigcap_{K=1}^{\infty} A_1(K)$ . Достаточно заметить, что  $A_1(K)$  есть в  $s$  открыто для каждого  $K = 1, 2, \dots$ . Пусть  $K$  фиксированное и пусть  $x^0 = \{\xi_{i,1}^{x^0}\} \in A_1(K)$ . Из условия  $x^0 \in A_1(K)$  вытекает существование  $n = n(x^0)$  такого, что  $\tau_n(x^0) > K$ . Выберем  $\varepsilon > 0$  так что  $\tau_n(x^0) - \varepsilon > K$ . Обозначим  $M = \max_{i=1,2,\dots,m_n} |a_{ni}| > 0$ . Выберем

$$\delta' > 0 \text{ так, что } M\delta' m_n < \varepsilon. \text{ Если положим } \delta = \frac{\delta'}{2^{m_n}(1+\delta')}, \text{ то при } x = \{\xi_{i,1}^x\} \in$$

$\mathcal{S}(x^0, \delta)$  есть  $|\xi_i - \xi_i^0| < \delta' \ (i = 1, 2, \dots, m_n)$ .

Оценим  $\tau_n(x)$  снизу:

$$\tau_n(x) = \tau_n(x^0) - (\tau_n(x^0) - \tau_n(x)) \geq \tau_n(x^0) - \tau_n(x^0) - M m_n \delta' > K,$$

значит,  $x \in A_1(K)$ , так что  $A_1(K)$  является открытым для всех  $K = 1, 2, \dots$ , и, следовательно,  $A_1$  является множеством типа  $G_\delta$  в  $s$  (подобным способом можно показать, что и  $A_2$  есть типа  $G_\delta$  в  $s$ ).

Покажем, что  $A_1 \cap A_2$  является плотным в  $s$ . Пусть  $x^0 = \{\xi_{i,1}^{x^0}\} \in s, \delta > 0$ .

Выберем  $N$  так, чтобы  $\sum_{i=N+1}^{\infty} 2^{-i} < \delta$ . Потому что  $\limsup m_n = +\infty$ , то существует последовательность  $N < n_1 < n_2 < \dots < n_l < \dots$  такая, что  $\lim m_{n_l} = +\infty$ .

Определим теперь  $x = \{\xi_i\} \in s$  следующим образом:  $\xi_i = \xi_i^0$  для  $i \neq m_{n_l} \ (l = 1, 2, \dots)$  и  $\xi_{m_{n_l}} \ (i = 1, 2, \dots)$  определим по индукции так:  $\xi_{m_{n_l}} = 0$ . Для  $i$  четного определим  $\xi_{m_{n_l}}$  так, чтобы было справедливо следующее  $a_{n_l m_{n_l}} \xi_{m_{n_l}} > i - \tau_{n_l-1}(x)$ , а для  $i$  нечетного,  $i > 1$ , таким образом, чтобы  $a_{n_l m_{n_l}} \xi_{m_{n_l}} < -i - \tau_{n_l-1}(x)$ . Это вполне возможно, и на первый взгляд видно, что  $x = \{\xi_{i,1}^x\} \in \mathcal{S}(x^0, \delta)$  и

$$\liminf \tau_n(x) = -\infty, \quad \limsup \tau_n(x) = +\infty,$$

следовательно,  $x = \{\xi_{i,1}^x\} \in A_1 \cap A_2$ . Дальше доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1.

### 3.

О структуре пространства  $\{r^p\} \ (p > 1)$

$\{r^p\} \ (p > 1)$  обозначает, как всегда, множество всех последовательностей вещественных чисел  $x = \{\xi_{i,1}^x\}$ , для которых  $\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n^x|^p < +\infty$ . Метрика в  $\{r^p\}$  определена, как обычно: если  $x, y \in \{r^p\}, x = \{\xi_{i,1}^x\}, y = \{\eta_{i,1}^y\}$ , то  $\rho(x, y) = (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^x - \eta_i^y|^p)^{1/p}$ .

В этой метрике  $\{r^p\}$  является полным линейным метрическим пространством. Обозначим далее знаком  $\rho'$  вещественное число, для которого  $1/\rho + 1/\rho' = 1$ , следовательно,  $\rho' > 1$ . Если  $a = \{\alpha_{i,1}\} \in \{r^{\rho'}\}$ , то для всех  $x = \{\xi_{i,1}^x\} \in \{r^p\}$

ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i^x$  сходится. Известно (теорема Ландау [10], стр. 9), что если  $a = \{\alpha_{i,1}\} \in \{r^{\rho'}\}$ , то существует  $x = \{\xi_{i,1}^x\} \in \{r^p\}$  такое, что ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i^x$  расходится.

В связи с этой теоремой и предварительными результатами возникает вопрос исследования структуры (виду пространства  $\{r^p\}$  множества всех  $x \in \{r^p\}$ , для которых ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i^x$  расходится, причем  $a = \{\alpha_{i,1}\} \notin \{r^{\rho'}\}$ . Ответ на этот вопрос дает теорема:

**Теорема 3.1.** Пусть  $a = \{\alpha_{i,1}\}$  является последовательностью вещественных чисел, пусть  $a \notin \{r^{\rho'}\}$ .

**Утверждение:** Для всех  $x = \{\xi_{i,1}^x\} \in \{r^p\}$ , за исключением точек множества первой категории, справедливо:

$$\liminf \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i^x = -\infty, \quad \limsup \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i^x = +\infty. \quad (3)$$

**Следствие.** Множество всех  $x \in \{r^p\}$ , для которых выполнено (3), является множеством второй категории в  $\{r^p\}$ .

**Следствие.** Если положим  $x_i = 1, \ (i = 1, 2, \dots)$ , то получаем такой результат: Множество всех  $x \in \{r^p\}$ , для которых ряд  $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i$  колеблется между  $-\infty$  и  $+\infty$ , является множеством второй категории в  $\{r^p\}$ . (Аналогичный результат вытекает из теоремы 2.1.)

Доказательство теоремы 3.1. Поскольку доказательство этой теоремы является подобным доказательству теоремы 2.1, проведем его в сокращенном

виде. Положим подобно, как и прежде,  $\sigma_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$ , если  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty \in l^{(p)}$ . Обозначим

$$C = \mathcal{S}[x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty \in l^{(p)}]; \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = +\infty], \\ C' = \mathcal{S}[x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty \in l^{(p)}]; \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = -\infty].$$

Легко можем показать, что множества  $C, C'$  являются множествами типа  $G_\delta$  в  $l^{(p)}$ . Покажем это для  $C$ . При  $K$  натуральном обозначим знаком  $C(K)$  множество всех тех  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty \in l^{(p)}$ , которые имеют свойство: Существует натуральное число  $n = n(x)$  такое, что  $\sigma_n(x) > K$ . Видно, что  $C = \bigcap_{K=1}^\infty C(K)$ . Таким образом, достаточно показать, что  $C(K)$  является открытым в  $l^{(p)}$ . Пусть  $x^0 \in C(K)$ ,  $x^0 = \{\xi_i^0\}_{i=1}^\infty$ . Существует  $n = n(x^0)$  такое, что  $\sigma_n(x^0) > K$ . Выберем  $\varepsilon > 0$  так, чтобы  $\sigma_n(x^0) - \varepsilon > K$ . К числу  $\varepsilon > 0$  при фиксированном  $n = n(x^0)$  найдем положительное  $\delta$  так, чтобы  $\delta \sum_{i=1}^n |\alpha_i| < \varepsilon$ . Пусть теперь  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty \in \mathcal{S}(x^0, \delta)$ . Потом из условия  $\varrho(x^0, x) < \delta$  вытекает для всех  $i = 1, 2, \dots, n(x^0)$  неравенство  $|\xi_i - \xi_i^0| < \delta$ . Тогда

$$\sigma_n(x) = \sigma_n(x^0) - (\sigma_n(x^0) - \sigma_n(x)) > \sigma_n(x^0) - \delta \sum_{i=1}^n |\alpha_i| > \sigma_n(x^0) - \varepsilon > K,$$

значит,  $\mathcal{S}(x^0, \delta) \subset C(K)$  так что  $C(K)$  открытое в  $l^{(p)}$ .

Подобным способом можно показать, что  $C'$  является множеством типа  $G_\delta$  в  $l^{(p)}$ .

По предположению  $a = \{\alpha_i\}_{i=1}^\infty \notin l^{(p')}$ , из теоремы Ландау вытекает, что (при подходящем выборе знаков) существует  $x' = \{\xi_i'\}_{i=1}^\infty \in l^{(p')}$  такое, что ряд  $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i \xi_i'$  является колеблющимся между  $-\infty$  и  $+\infty$ . Положим  $l_2^{(p')} = C \cap C'$ . По предположению  $l_2^{(p')}$  есть множеством  $G_\delta$  в  $l^{(p')}$ . Покажем, что  $l_2^{(p')}$  является плотным в  $l^{(p')}$ . Пусть  $x^0 = \{\xi_i^0\}_{i=1}^\infty \in l^{(p')}$ , пусть  $\delta > 0$ . Выберем  $x' = \{\xi_i'\}_{i=1}^\infty \in l^{(p')}$  так, что ряд  $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i \xi_i'$  является колеблющимся между  $-\infty$  и  $+\infty$ . Выберем натуральное  $N$  так, чтобы

$$\sum_{i=N+1}^\infty |\xi_i^0|^p < \left(\frac{\delta}{2}\right)^p, \quad \sum_{i=N+1}^\infty |\xi_i^0|^p < \left(\frac{\delta}{2}\right)^p.$$

Определим теперь  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty$  следующим образом:  $\xi_i = \xi_i'$  для  $i > N$  и  $\xi_i = \xi_i^0$  для  $i = 1, 2, \dots, N$ . Очевидно, что  $x \in l^{(p')}$ , и на основе неравенства Гильдера получаем:

$$\varrho(x^0, x) = \left(\sum_{i=1}^\infty |\xi_i - \xi_i^0|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^\infty |\xi_i^0|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1+N}^\infty |\xi_i'|^p\right)^{1/p} < \delta.$$

Итак,  $x \in \mathcal{S}(x^0, \delta)$  и ряд  $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i \xi_i$ , очевидно, является колеблющимся между  $-\infty$  и  $+\infty$ .

В следующем постулате так, как в доказательстве теоремы 2.1.

Потому что для каждого  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty \in l^{(p)}$  справедливо  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$ , то является

естественным вопросом о быстрой сходимости к нулю последовательностей из  $l^{(p)}$ . На этот вопрос отвечает следующая теорема, в которой показываем, что „большинство“ последовательностей  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty \in l^{(p)}$  сходится к нулю очень медленно.

**Теорема 3.2.** Пусть  $\{p_n\}_{n=1}^\infty$  является последовательностью положительных вещественных чисел, пусть  $\limsup_{n \rightarrow \infty} p_n = +\infty$ . Тогда для всех  $x \in l^{(p)}$ , за исключением точек множества первой категории, справедливо:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} p_n \xi_n = -\infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} p_n \xi_n = +\infty. \quad (4)$$

Доказательство. Обозначим

$$A_1 = \mathcal{S}[x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty \in l^{(p)}]; \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} p_n \xi_n = +\infty], \\ A_2 = \mathcal{S}[x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty \in l^{(p)}]; \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} p_n \xi_n = -\infty].$$

Подобным способом, как и в предыдущей теореме докажем, что  $A_1$  и  $A_2$  являются множествами типа  $G_\delta$  в  $l^{(p)}$ . Это утверждение докажем для  $A_1$  (для  $A_2$  доказательство аналогично). Для натурального  $K$  положим

$$A_1(K) = \mathcal{S}[x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty \in l^{(p)}]; \quad \text{существует } n = n(x) \text{ такое, что } p_n \xi_n > K].$$

Очевидно, что  $A_1 = \bigcap_{K=1}^\infty A_1(K)$ . Поэтому достаточно заметить, что  $A_1(K)$  ( $K = 1, 2, \dots$ ) является открытым множеством.

Пусть  $K$  является фиксированным и  $x^0 = \{\xi_i^0\}_{i=1}^\infty \in A_1(K)$ . Таким образом, существует  $n = n(x^0)$  такое, что  $p_n \xi_n^0 > K$ . Выберем  $\varepsilon > 0$  так, чтобы  $\xi_n^0 - \frac{\varepsilon}{p_n} > \frac{K}{p_n}$ .

Положим  $\delta = \frac{\varepsilon}{p_n}$ . Покажем, что  $\mathcal{S}(x^0, \delta) \subset A_1(K)$ . Пусть  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^\infty \in \mathcal{S}(x^0, \delta)$ , тогда  $|\xi_n - \xi_n^0| \leq \varrho(x, x^0) < \frac{\varepsilon}{p_n}$ , значит,  $\xi_n = \xi_n^0 - (\xi_n^0 - \xi_n) > \frac{K}{p_n}$ . Отсюда

$$p_n \xi_n > K, \text{ значит, } x \in A_1(K).$$

Далее покажем, что  $A_1 \cap A_2$  является плотным в  $l^{(p)}$ . Пусть  $x^0 = \{\xi_i^0\}_{i=1}^\infty$ ,  $x \in l^{(p)}$ ,  $\delta_1 > 0$ . Выберем натуральное  $N$  так, чтобы  $\sum_{n=1+N}^\infty |\xi_n^0|^p < \delta_1^p$ . Определим  $y^0 = \{\eta_i^0\}_{i=1}^\infty$  следующим образом:  $\eta_i^0 = \xi_i^0$  для  $i \leq N$  и  $\eta_i^0 = 0$  для  $i > N$ . Тогда

$\varrho(x^0, y^0) < \delta_1$ . Положим  $\delta_2 = \delta_1 - \varrho(x^0, y^0)$ , так что  $\mathcal{S}(x^0, \delta_1) \supset \mathcal{S}(x^0, \delta_2)$ . По предположению теоремы существует возрастающая последовательность натуральных чисел  $N < n_1 < n_2 < \dots < n_l < \dots$  такая, что  $\lim_{l \rightarrow \infty} P_{n_l} = +\infty$ . Выберем натуральное  $r$  так, чтобы  $2^{\frac{r+1}{r}} < \delta_2$ . Выберем  $l_1 \geq 1$  так, чтобы  $P_{n_{l_1}} > 2^{\frac{r+1}{r}}$ , и если уже были выбраны  $l_1 < l_2 < \dots < l_{j-1}$  так, что  $P_{n_{l_j}} < i \cdot 2^{\frac{r+1}{r}}$  ( $i = 1, 2, \dots, j-1$ ), то выберем  $l_j > l_{j-1}$  так, чтобы  $P_{n_{l_j}} > j \cdot 2^{\frac{r+1}{r}}$ . Ввиду того, что  $\lim_{l \rightarrow \infty} P_{n_l} = +\infty$ , является предыдущая конструкция вполне возможной.

Из предыдущих неравенств получаем

$$\left(\frac{j}{P_{n_{l_j}}}\right)^r < \frac{1}{2^{r+j}} \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (5)$$

Определим теперь  $x = \{\xi_i\}_1^\infty$  следующим образом:  $\xi_i = \eta_i^0$  для  $i \leq N$  и  $\xi_i = 0$  для  $i > N$ ,  $i \neq n_l$ , ( $j = 1, 2, \dots$ ) и, наконец,  $\xi_{n_{l_j}} = (-1)^j \frac{j}{P_{n_{l_j}}}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Из неравенств (5) вытекает, что  $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l^{(p)}$ . Дальше есть  $P_{n_{l_j}} \cdot \xi_{n_{l_j}} = (-1)^j j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), значит,  $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in A_1 \cap A_2$  и  $\varrho(x, y^0) = \left(\sum_{j=1}^\infty |\xi_{n_{l_j}}|^p\right)^{1/p} < \delta_2$ . Следовательно,  $\mathcal{S}(x^0, \delta_1) \cap (A_1 \cap A_2) \neq \emptyset$ , а из этого тем же самым способом, как в доказательстве теоремы 2.1, покажем, что  $l^{(p)} \cdot A_1 \cap A_2$  является множеством первой категории в  $l^{(p)}$ .  $A_1 \cap A_2$  является, однако, множеством всех тех  $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l^{(p)}$ , для которых справедливо (4).

#### 4.

##### О структуре пространства $l$

$l$ , как обычно, обозначает множество всех последовательностей вещественных чисел  $x = \{\xi_i\}_1^\infty$ , для которых ряд  $\sum_{i=1}^\infty |\xi_i|$  сходится. Определим в  $l$  метрику  $\varrho$ , как обычно: если  $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l$ ,  $y = \{\eta_i\}_1^\infty \in l$ , тогда

$$\varrho(x, y) = \sum_{i=1}^\infty |\xi_i - \eta_i|.$$

Если теперь  $a = \{\alpha_i\}_1^\infty$  является ограниченной последовательностью вещественных чисел, то, очевидно, для всех  $x \in \{\xi_i\}_1^\infty \in l$  ряд  $\sum_{i=1}^\infty \alpha_i \xi_i$  (даже абсолютно) сходится. В случае неограниченной последовательности  $a = \{\alpha_i\}_1^\infty$  можно дока-

зать теорему, которая приносит результаты, аналогичный предшествующим результатам этой работы.

**Теорема 4.1.** Пусть  $a = \{\alpha_i\}_1^\infty$  является последовательностью вещественных чисел, пусть  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n| = +\infty$ .

**Утверждение:** Для всех  $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l$ , за исключением точек множества первой категории, справедливо:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i = -\infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i = +\infty \quad (6)$$

Раньше, чем приступим к доказательству теоремы, приведем эту вспомогательную теорему:

**Лемма 4.1.** Пусть  $0 < p_1 < p_2 < \dots < p_n < \dots < p_n \rightarrow \infty$ , тогда существуют последовательности  $a' = \{\alpha'_i\}_1^\infty \in l$ ,  $\alpha'_i > 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , такая, что  $\sum_{n=1}^\infty \alpha'_n p_n = +\infty$ .

**Доказательство.** Положим  $\alpha'_n = \frac{p_{n+1} - p_n}{p_n p_{n+1}}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Потом  $\{\alpha'_n\}_1^\infty \in l$  (мы можем сразу убедиться) и  $\sum_{n=1}^\infty \alpha'_n p_n = \sum_{n=1}^\infty \frac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+1}}$ . Если  $n$  является натуральным числом и  $k \geq 1$ , то ввиду предположения леммы получаем

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+1}} + \frac{p_{n+2} - p_{n+1}}{p_{n+2}} + \dots + \frac{p_{n+k} - p_{n+k-1}}{p_{n+k}} &\geq \\ \geq \frac{(p_{n+1} - p_n) + (p_{n+2} - p_{n+1}) + \dots + (p_{n+k} - p_{n+k-1})}{p_{n+k}} &= 1 - \frac{p_n}{p_{n+k}}. \end{aligned}$$

Из этого видно, что к каждому натуральному  $n$  существует  $k \geq 1$  такое, что

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+1}} + \frac{p_{n+2} - p_{n+1}}{p_{n+2}} + \dots + \frac{p_{n+k} - p_{n+k-1}}{p_{n+k}} > \frac{1}{2},$$

значит, для ряда  $\sum_{n=1}^\infty \alpha'_n p_n$  не выполнено условие Коши-Больцано, поэтому

$$\sum_{n=1}^\infty \alpha'_n p_n = \sum_{n=1}^\infty \frac{p_{n+1} - p_n}{p_{n+1}} = +\infty.$$

**Доказательство теоремы 4.1.** Обозначим  $a_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i$  для  $x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l$

и положим

$$C = \mathcal{E}[x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l; \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = +\infty]$$

$$C' = \mathcal{E}[x = \{\xi_i\}_1^\infty \in l; \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n(x) = -\infty].$$



# ÜBER EINIGE ANWENDUNGEN DER KATEGORIEMETHODE IN DER THEORIE DER RÄUME VON FOLGEN

Anton Legtñ und Tibor Šalát

## Zusammenfassung

In der Arbeit untersucht man die Struktur einiger bekannter Räume von Folgen  $(s, l^{(p)}, l)$  mit Anwendung der Kategoriemethode. Die Hauptergebnisse der Arbeit sind die folgenden Sätze.

**Satz 1.** Es sei  $(X, \varrho)$  ein linearer metrischer Raum,  $(s(X), \varrho')$  bedeute den Raum aller Folgen von Elementen des Raumes  $X$ , wenn  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ ,  $y = \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ ,  $x, y \in s(X)$ , dann setzen wir

$$\varrho'(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{\varrho(\xi_i, \eta_i)}{1 + \varrho(\xi_i, \eta_i)}.$$

$a = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$  sei eine Folge von reellen Zahlen, wobei  $\alpha_i \neq 0$  für unendlich viele  $i$ . Dann ist die Menge  $s'(X)$  aller derjenigen  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ ,  $x \in s(X)$ , für die die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$  konvergiert (in  $X$ ), eine Menge von erster Kategorie in  $s(X)$ .

Der folgende Satz knüpft an das klassische Ergebnis von H. Steinhaus [13] über die Limitierbarkeit von Folgen an und vertieft dieses Ergebnis im gewissen Sinne in einen speziellen Fall.

**Satz 2.** Es sei  $(X, \varrho)$  ein Banachscher Raum [mit der Norm  $\|x\| = \varrho(x, 0)$ ], es habe  $(s(X), \varrho')$  dieselbe Bedeutung wie im Satz 1. Es sei  $A = (a_{n,m})$  eine reguläre Matrix,  $a_{n,m} = 0$  für  $m > n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Es bedeute  $s_0(X)$  die Menge aller derjenigen  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in s(X)$ , die mit der Matrix  $A$  nicht limitierbar sind und wir setzen  $s_1(X) = s(X) - s_0(X)$ . Dann ist  $s_0(X)$  eine Menge von zweiter Kategorie [in  $s(X)$ ] und  $s_1(X)$  ist eine Menge von erster Kategorie [in  $s(X)$ ].

Wenn  $X$  die Menge aller reellen Zahlen ist und  $\varrho(\xi, \eta) = |\xi - \eta|$ , dann ist  $s(X)$  identisch mit dem Raum  $s$  aller Folgen von reellen Zahlen mit Frechetischer Metrik. Das Ergebnis des Satzes 2 kann man in diesem Fall folgendermaßen vertiefen.

**Satz 3.**  $a = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty}$  sei eine Folge von reellen Zahlen, es sei  $\alpha_i \neq 0$  für unendlich viele  $i$ . Dann gilt für alle  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in s$  bis auf eine Menge von erster Kategorie,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i = -\infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i = +\infty.$$

Im Zusammenhang mit dem bekannten Satz von Landau (siehe [10], S. 9), nach dem zu jedem  $a = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \notin l^{(p)}$ ,  $(1/p + 1/p' = 1)$  wenigstens eine solche Folge  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^{(p)}$  existiert, daß die Reihe  $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i$  divergiert, beweist man das folgende (zum Satz 3) analogische Ergebnis.

**Satz 4.** Wenn  $a = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^{(p)}$  ( $1/p + 1/p' = 1$ ) dann ist für alle  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^{(p)}$ , bis auf eine Menge von erster Kategorie,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i = -\infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i = +\infty.$$

Für jede Folge  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^{(p)}$  ( $p > 1$ ) ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0.$$

Der folgende Satz zeigt, daß bei der Mehrheit (im Sinne der Kategorie der Mengen) der Folgen  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^{(p)}$  die Schnelligkeit der Konvergenz von (1) klein ist.

**Satz 5.**  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  sei eine Folge von positiven reellen Zahlen, es sei  $\limsup_{n \rightarrow \infty} p_n = +\infty$ . Dann gilt für alle  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} \in l^{(p)}$  bis auf eine Menge von erster Kategorie,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} p_n \xi_n = -\infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} p_n \xi_n = +\infty.$$

An die Struktur des Raumes  $l$  ( $l$  ist der Raum aller derjenigen Folgen von reellen Zahlen  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ , für die  $\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i| < +\infty$  ist, die Metrik in  $l$  ist durch die Beziehung  $\varrho(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|$  definiert) knüpft der folgende Satz an.

**Satz 6.**  $a = \{\alpha_i\}_{i=1}^{\infty} \in l$ , bis auf eine Menge von erster Kategorie, es sei  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |\alpha_n| = +\infty$ . Dann gilt für alle  $x = \{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i = -\infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \xi_i = +\infty.$$