MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 14, 3, 1964

POZNÁMKA K HOMOGÉNNYM EXPERIMENTOM S KONEČNÝMI AUTOMATMI

JÁN ČERNÝ, Žilina

1. ÚVOD

Riešeniu rôznych problémov, súvisiacich s konečnými automatmi, sa venuje čoraz väčšia pozornosť. Je to len pochopiteľné, pretože konečné automaty môžu slúžiť ako matematický model rôznych diskrétne pracujúcich zariadení, či už je to samočinný počítač, alebo reléová zabezpečovacia sústava.

V niektorých prácach, napríklad [1, 2], rieši sa otázka, či je možné pre daný konečný automat Mooreovho typu určiť taký homogénny experiment, t. j. konečnú postupnosť vstupných signálov, po ktorého vykonaní by bol jednoznačne určený konečný stav automatu, bez ohľadu na jeho stav počiatočný. V spomínaných prácach je daná odpoveď na túto otázku v tom prípade, ak sú všetky stavy daného automatu rozlíšiteľné. Pritom podstatnú úlohu tu zohrá porovnávanie vstupov a výstupov automatu pri experimente.

Snahou tejto poznámky je ukázať, že problém uvedeného typu možno riešiť i v prípade, ak (dajme tomu z technických príčin) nemôžeme výstupné odozvy sledovať. Ukazujú sa nutné a postačujúce podmienky pre existenciu experimentu žiadaných vlastností. V závere sa ohraničuje minimálna dĺžka takého experimentu, ak je známe, že existuje.

2. NIEKTORÉ POJMY

Konečným automatom nazývame trojicu $\mathscr{T} = (X, Y, g)$, kde X, Y sú neprázdne konečné množiny, g je zobrazenie $X \times Y$ do X; množinu X nazývame *množinou stavov*, Y *množinou vstupov* a g *prechodovým zobrazením* automatu $\mathscr{T}$.

V ďalšom, ak neurčíme inak, budeme pod daným automatom myslieť automat $\mathscr{T} = (X, Y, g)$. Množinu všetkých prirodzených čísel budeme označovať N a pre $n \in N$ budeme označovať $Y^n = \bigtimes_{j=1}^{n} Y$.

Ak f bude zobrazovať množinu $M_1 \times M_2$ do P, symbolom $f(., y)$ pre $y \in M_2$ budeme značiť zobrazenie množiny M_1 do P, ktoré vznikne po fixovaní $y \in M_2$.

Ak $n_i \in N$, $(i = 1, \dots, k)$,

$$y^{n_1} = (y_{11}, \dots, y_{1,n_1}) \in Y^{n_1},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{n_k} = (y_{k,1}, \dots, y_{k,n_k}) \in Y^{n_k},$$

tak budeme označovať

$$(y^{n_1}, \dots, y^{n_k}) = (y_{11}, \dots, y_{1n_1}, \dots, y_{k1}, \dots, y_{kn_k}).$$

Nech $n \in N$. Definujme zobrazenie g^n množín $X \times Y^n$ do X takto:

$$g^n(x, y^n) = g^n(x, y_1, \dots, y_n) = g(g(\dots g(x, y_1), y_2) \dots), y_n)$$

pre všetky $x \in X$ a $y^n = (y_1, \dots, y_n) \in Y^n$. Potom automat $\mathscr{T}^n = (X, Y^n, g^n)$ nazveme *n-'ou mocninou* $\mathscr{T}$.

Nech $x \in X$, $x_0 \in X$. Hovoríme, že x *je možné previesť do* x_0, ak existujú $n \in N$ a $y^n = (y_1, \dots, y_n) \in Y^n$také, že

$$g^n(x, y_1, \dots, y_n) = x_0. \tag{1}$$

Ak platí (1), potom hovoríme, že x je možné previesť do x_0 *pomocou* y^n.

Automat $\mathscr{T}$ nazývame *súvislým*, ak existuje $x_0 \in X$ také, že do neho môžeme previesť každé $x \in X$. $\mathscr{T}$ nazývame *silne súvislým*, ak pre ľubovoľné dva stavy $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ platí, že x_1 možno previesť do x_2.

Je zrejmé, že každý silne súvislý automat je i súvislý, ale nie každý súvislý automat je i silne súvislý.

Ak $X_1 \subset X$ a $y \in Y$, potom symbolom $g(X_1, y)$ budeme označovať množinu $\{x \in X\colon \text{existuje } \bar{x} \in X_1,\ g(\bar{x}, y) = x\}$.

Stav $x_0 \in X$ nazývame *spojným stavom* automatu $\mathscr{T}$, ak existujú $x \in X$, $\bar{x} \in X$, $y \in Y$ také, že

$$g(\{x, \bar{x}\}, y) = \{x_0\}.$$

Obvykle sa činnosť konečného automatu predpokladá taká, že na začiatku, v čase t_1 je automat v stave x_1. Na jeho vstup sa vtedy privedie y_1, čo spôsobí, že do času $t_2 = t_1 + \tau$ prejde automat do stavu $x_2 = g(x_1, y_1)$, takže v čase t_2 bude mať stav x_2. Súčasne príde vstup y_2 atď. Pritom sa predpokladá, že experimentátor pozná len vstupy $y_1, y_2, \dots$, kým stavy $x_1, x_2, \dots$ nemá možnosť sledovať (preto sa pre automat používa názov „čierna skrinka"). Niekedy sa tiež predpokladá, že je známe aj zobrazenie g, takže neznámymi zostávajú len stavy, cez ktoré automat prechádza.

Automat $\mathscr{T}$ môžeme znázorniť tabuľkou, alebo graficky.

Príklad. $X = \{1; 2; 3\}$, $Y = \{0; 1\}$;

Tabuľka pre prechodové zobrazenie g je na str. 210. Graficky je tento automat znázornený na obrázku 1.

Graficky znázorníme automat tak, že každému stavu automatu priradíme jeden krúžok. Potom krúžok x_1 spojíme s x_2 šípkou s označením y vtedy a len vtedy, ak platí $g(x_1, y) = x_2$.

Tabuľka pre g

y \ x	1	2	3
0	1	3	2
1	2	1	1

Automat z obr. 1 je zrejme silne súvislý s jedným spojným stavom 1.

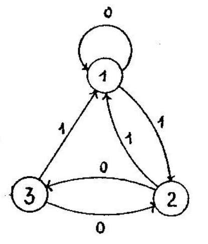
Na obr. 2 je znázornený známy klopný obvod. Je to silne súvislý automat bez spojného stavu.

Nech $\mathcal{T} = (X, Y, g)$ je automat. Hovoríme, že $\mathcal{T}$ je usmerniteľný, ak existujú $n \in N$, $x_0 \in X$, $y^n \in Y^n$ také, že

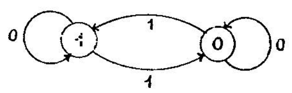
$$g^n(X, y^n) = \{x_0\}. \tag{2}$$

Ak je splnené (2), hovoríme, že $\mathcal{T}$ je usmerniteľný do stavu x_0.

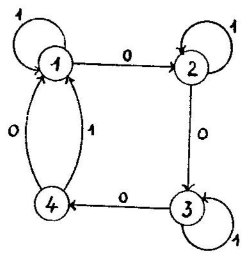
Je zrejmé, že ak je $\mathcal{T}$ usmerniteľný, je nutne súvislý. Ak je naviac silne súvislý, potom je usmerniteľný do ľubovoľného stavu $x_0 \in X$, pretože do jedného $x_0 \in X$ je isto usmerniteľný a vďaka silnej súvislosti možno tento stav previesť do hociktorého iného stavu automatu $\mathcal{T}$.



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

Veta 1. *Nech automat $\mathcal{T} = (X, Y, g)$ je usmerniteľný. Potom má aspoň jeden spojný stav.*

Dôkaz: Nepriamo. Nech $\mathcal{T}$ nemá spojných stavov. Potom pre ľubovoľné $y \in Y$ platí $g(X, y) = X$, pretože $g(., y)$ je prosté zobrazenie. Potom však pre ľubovoľné $y^n \in Y^n$ a ľubovoľné $n \in N$ platí

$$g^n(X, y^n) = X,$$

čo je v spore s (2). Tým je veta dokázaná.

Treba si uvedomiť, že existencia spojného stavu je pre usmerniteľnosť len podmienkou nutnou a nie postačujúcou, dokonca aj vtedy, ak ide o silne súvislý automat. Ako kontrapríklad nám môže poslúžiť automat z obr. 1. Je totiž hneď vidieť, že nech $n \in N$ a $y^n \in Y^n$ sú ľubovoľné, platí pre tento automat jeden z troch vzťahov:

$$g^n(X, y^n) = X; \quad g^n(X, y^n) = \{1; 2\}; \quad g^n(X, y^n) = \{1; 3\}.$$

Automat teda nie je usmerniteľný.

Veta 2. *Nech $\mathcal{T} = (X, Y, g)$ je daný automat. $\mathcal{T}$ je usmerniteľný vtedy a len vtedy, ak platí podmienka (D):*

K ľubovoľným dvom stavom $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ existuje $n \in N$, $y^n \in Y^n$ a stav $x_3 \in X$, do ktorého možno previesť x_1 aj x_2 pomocou y^n.

Dôkaz: Nech X má k prvkov. Prípad $k = 1$ je triviálny. Nech je teda $k > 1$ a nech:

1. $\mathcal{T}$ je usmerniteľný. Potom existujú $n \in N$, $x_3 \in X$, $y^n \in Y^n$ také, že $g^n(X, y^n) = \{x_3\}$. Z toho ale vyplýva, že pre ľubovoľné $x_1, x_2 \in X$ platí

$$g^n(\{x_1, x_2\}, y^n) = \{x_3\},$$

a teda x_1 aj x_2 možno previesť do x_3 pomocou y^n.

2. Nech platí (D). Zvoľme si ľubovoľne $x_1 \in X$, $\bar{x}_1 \in X$, $x_1 \neq \bar{x}_1$. K nim existujú $n_1 \in N$, $x_2 \in X$, $y^{n_1} = (y_{11}, \ldots, y_{1n_1}) \in Y^{n_1}$ také, že

$$g^{n_1}(\{x_1; \bar{x}_1\}, y^{n_1}) = \{x_2\},$$

z čoho vyplýva, že množina $g^{n_1}(X, y^{n_1})$ má nanajvýš $k - 1$ prvkov. Ak má len jeden prvok, sme hotoví. Ak má okrem prvku x_2 ešte nejaký prvok $\bar{x}_2$, $x_2 \neq \bar{x}_2$, existujú k nim $n_2 \in N$, $x_3 \in N$, $y^{n_2} = (y_{21}, \ldots, y_{2n_2})$ také, že platí

$$g^{n_2}(\{x_2; \bar{x}_2\}, y^{n_2}) = \{x_3\},$$

a teda množina $g^{n_1+n_2}(X, y^{n_1}, y^{n_2})$ má nanajvýš $k - 2$ prvkov. Je zrejmé, že po l krokoch získame konečnú postupnosť vstupov $y^n = (y^{n_1}, \ldots, y^{n_l})$, kde $n = \sum_{j=1}^{l} n_j$; $l < k$, pre ktorú platí, že množina $g^n(X, y^n)$ má len jeden prvok, do ktorého možno $\mathcal{T}$ usmerniť, čo bolo treba dokázať.

Poznámka. Nech $\mathcal{T} = (X, Y, g)$ je daný automat. Hovoríme, že automat $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{g})$ je združený k automatu $\mathcal{T}$ a označujeme ho $\overline{\mathcal{T}}$ vtedy a len vtedy, ak

1. $\bar{X} = X_1 \cup X_2$,

kde $X_1 = \{(x_1; x_2) : x_1 \in X, x_2 \in X, x_1 \neq x_2\}$; $X_2 = \{(x, x) : x \in X\}$;

2. $\bar{Y} = Y$.

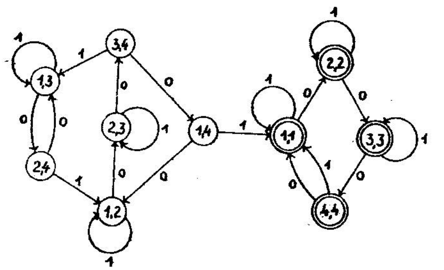
3. Pre všetky $(x_1; x_2) \in \bar{X}$ a všetky $y \in Y$ je $\bar{g}((x_1; x_2), y) = (g(x_1; y); g(x_2; y))$.

Ľahko sa zistí, že daný automat $\mathcal{T}$ je usmerniteľný vtedy a len vtedy, ak $\overline{\mathcal{T}}$ je súvislý.

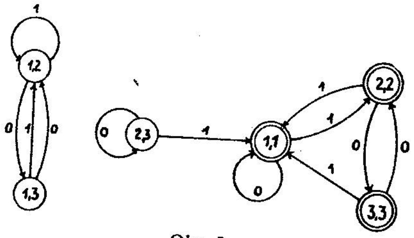
Táto vlastnosť nám môže poslúžiť ako pomôcka pri rozhodovaní, či je daný automat usmerniteľný, alebo nie.

Príklad. Majme automat, daný na obr. 3. Tento automat označme $\mathscr{U}_4$ (význam tohto označenia uvidíme neskôr). K nemu združený $\overline{\mathscr{U}}_4$ je na obr. 4, pričom stavy z X_2 sú v dvojitých krúžkoch. Vidno, že $\overline{\mathscr{U}}_4$ je súvislý, a teda $\mathscr{U}_4$ je usmerniteľný (dokonca do hocktorého stavu).

Príklad. Vytvorme si aj k automatu $\mathscr{T}$ na obr. 1 automat $\overline{\mathscr{T}}$ (obr. 5). Vidíme, že $\overline{\mathscr{T}}$ nie je súvislý, z čoho vyplýva nám už známy výsledok, že $\mathscr{T}$ nie je usmerniteľný.



Obr. 4.



Obr. 5.

3. RÝCHLOSŤ USMERNENIA

Označme Π_k množinu všetkých usmerniteľných automatov o k stavoch. Nech $k \in N$, $\mathscr{T} \in \Pi_k$. Označme

$$n(\mathscr{T}) = \min\{n \in N\text{: existuje } x_0 \in X, y^n \in Y^n\text{: } g^n(X, y^n) = \{x_0\}\},$$

$$n(k) = \sup_{\mathscr{T} \in \Pi_k} n(\mathscr{T}).$$

Keď predpokladáme, že činnosť automatu prebieha v pravidelných časových intervaloch, $n(k)$ vyjadruje hornú hranicu počtu časových intervalov, nevyhnutne potrebných k usmerneniu automatov z Π_k.

V ďalšom si zavedieme automaty $\mathscr{U}_k$ ($k = 2, 3, \ldots$), ktoré nám pomôžu zdola ohraničiť $n(k)$.

$$\mathscr{U}_k = (X_k, Y, g_k), \quad \text{kde} \quad X_k = \{1, \ldots, k\}, \quad Y = \{0; 1\};$$

$$x \in X_k, \quad x \neq k \Rightarrow g_k(x, 0) = x + 1,$$

$$g_k(x, 1) = x,$$

$$x = k \Rightarrow g_k(k, l) = 1; \quad (l = 0, 1).$$

Automat $\mathscr{U}_4$ máme graficky znázornený na obr. 3.

V nasledujúcich lemách si určíme niektoré vlastnosti automatov $\mathscr{U}_k$.

Lema 1. *Pre všetky* $k = 2, 3, \ldots$ *platí* $\mathscr{U}_k \in \Pi_k$ a $n(\mathscr{U}_k) = (k-1)^2$.

Dôkaz: Definujme

$$y_j = 1 \quad \text{pre} \quad j = 1 + l\,.\,k, \quad l = 0, \ldots, k-2,$$

$$y_j = 0 \quad \text{pre} \quad j \neq 1 + l\,.\,k, \quad j < 1 + k(k-2) = (k-1)^2.$$

Ukážeme si, že

$$g_k^{1+lk}(X, y_1, \ldots, y_{1+lk}) = \{1, \ldots, k-l-1\} \tag{4}$$

pre $l = 1, \ldots, k-2$.

Pre $l = 1$ (4) zrejme platí.

Nech je teraz $1 \leqq l \leqq k-3$ a nech pre l platí (4). Ukážeme si, že potom platí aj pre $l+1$. Naozaj potom

$$g_k^{(l+1)k}(X, y_1, \ldots, y_{(l+1)k} =$$
$$= g_k^{(l+1)k}(x, y_1 \ldots y_{1+lk}, 0, \ldots, 0) =$$
$$= g_k^{k-1}(\{1, \ldots, k-l-1\}, 0, \ldots, 0) = \{1, \ldots, k-l-2, k\},$$

z čoho

$$g_k^{1+(l+1)k}(X, y_1, \ldots, y_{1+(l+1)k}) =$$
$$= g_k(\{1, \ldots, k-l-2, k\}, 1) = \{1, \ldots, k-(l+1)-1\},$$

a tým je platnosť (4) dokázaná pre $l = 1, \ldots, k-2$, z čoho však vyplýva, že

$$g_k^{1+(k-2)k}(X, y_1, \ldots, y_{1+(k-2)k}) =$$
$$= g_k^{(k-1)^2}(X, y_1, \ldots, y_{(k-1)^2}) = \{1\},$$

a teda $\mathscr{U}_k \in \Pi_k$, pričom

$$n(\mathscr{U}_k) \leqq (k-1)^2. \tag{5}$$

Definujme teraz na množine X_k binárnu operáciu $\oplus$ takto:

$$x_1 \oplus x_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 \leqq k, \\ x_1 + x_2 - k \Leftrightarrow x_1 + x_2 > k \end{cases}$$

(táto operácia by zodpovedala sčítaniu, keby sme mali prvky usporiadané do kruhu).

Označme teraz pre všetky $X \subset X_k$, $X \neq \emptyset$

$$\delta(X) = \begin{cases} \max\limits_{\substack{x \in X \\ x \oplus 1 \in X_k - X}} (\max\{j \in N : x \oplus 1 \in X_k - X, \ldots, x \oplus j \in X_k - X\}) \Leftrightarrow X \neq X_k \\ 0 \Leftrightarrow X = X_k \end{cases}$$

($\delta(X)$ vlastne znamená počet prvkov v najväčšej medzere v množine X, ak si X_k predstavíme v kruhovom usporiadaní).

Utvorme pre všetky $x \in X_k$, $j \in N$, $j \leqq k$ množinu

$$M_{x,j} = \{x \oplus 1; \ldots; x \oplus j\}$$

a označme $\tilde{X}$ tú z množín $M_{x,j}$, ktorá je celá obsiahnutá v $X_k - X$ a má najväčší počet prvkov. Ľahko sa zistí, že počet prvkov v $\tilde{X}$ je rovný $\delta(X)$.

Zrejme platí $\delta(X_k) = 0$, $\delta(\{x\}) = k - 1$ pre všetky $x \in X_k$. Ďalej tiež platí $\delta(g_k(X, 0)) = \delta(X)$, ako sa možno presvedčiť z definície automatu $\mathscr{U}_k$ a funkcie δ.

Pre nás bude dôležité zistiť, kedy platí

$$\delta(g_k(X, 1)) = \delta(X) + 1.$$

Tento prípad môže nastať len vtedy, ak $\widetilde{g_k(X, 1)}$ má o jeden prvok viac ako $\tilde{X}$, t. j. ak $\tilde{X} = \{k - \delta(X), \ldots, k - 1\}$. Potom platí:

$$\widetilde{g_k(X, 1)} = \{k - \delta(X), \ldots, k - 1, k\}.$$

Nech $n = n(\mathscr{U}_k)$ a nech $y^n = (y_1, \ldots, y_n) \in Y^n$ je konečná postupnosť vstupov, pre ktorú platí $g_k^n(X_k, y^n) = \{x\}$, kde x je nejaký stav automatu $\mathscr{U}_k$. Zrejme musí byť $x = 1$ a tiež $y_1 = 1$.

Označme pre všetky $i \in N$, $i \leqq n$

$$X(i) = g_k^i(X_k, y_1, \ldots, y_i).$$

Uvažujme teraz, že pre niektoré $i, j \in N$ platí $\delta(X(i-1)) = j - 1$, $\delta(X(i)) = j$. V tomto prípade je $\widetilde{X(i)}$ zrejme určená jednoznačne a je tvaru $\{k - j + 1, \ldots, k\}$.

Ak teraz $\delta(X(i + l)) = j + 1$, je potom $l \geqq k$, pretože $k - 1$ núl je najkratšia konečná postupnosť vstupov, ktorá prevedie $\tilde{X}(i)$ do množiny $\{k - j; \ldots; k - 1\}$, aby vstup $y_{i+k} = 1$ zväčšil hodnotu δ o jednotku.

Platí teda, že

$$n = n(\mathscr{U}_k) \geqq 1 + (k - 2)\,k = (k - 1)^2. \tag{6}$$

Tým, ak (6) spojíme s (5), je lema dokázaná.

Dôsledok. $n(k) \geqq (k - 1)^2$, $k \in N$.

Lema 2. *Nech $k \in N$. Potom platí*

$$n(k) \leqq 2^k - k - 1.$$

Dôkaz. Zvoľme si ľubovoľné $k \in N$, $k > 2$, $\mathscr{T} = (X, Y, g) \in \Pi_k$. Nech $n = n(\mathscr{T})$ a nech $y^n = (y_1, \ldots, y_n) \in Y^n$ a $x \in X$ sú také, že $g^n(X, y^n) = \{x\}$. Označme pre všetky $i \in N$, $i \leqq n$

$$X(i) = g^i(X, y_1, \ldots, y_i).$$

Zrejme pre $i \leqq n$, $j \leqq n$, $i \neq j$ musí platiť $X(i) \neq X(j)$, pretože inak by y^n nebola minimálna usmerňujúca postupnosť pre $\mathscr{T}$ a neplatilo by $n = n(\mathscr{T})$.

Ďalej tiež pre všetky $i < n$ musí platiť že $X(i)$ má aspoň dva prvky a pre všetky $i < n$ majú $X(i)$ maximálne $k - 1$ prvkov. Množín $X(i)$ môže byť teda maximálne toľko, koľko je všetkých možných podmnožín množiny X, mimo množín X, $\emptyset$ a $k - 1$ jednobodových podmnožín, teda platí

$$n(\mathscr{T}) \leqq 2^k - k - 1.$$

Keďže však $\mathscr{T} \in \Pi_k$ sme volili ľubovoľne, je

$$n(k) \leqq 2^k - k - 1.$$

Pre $k = 1, 2$ je tvrdenie lemy splnené triviálne, a tým je dôkaz lemy ukončený.

Veta 3. *Nech k je ľubovoľné prirodzené číslo. Potom platí:*

$$(k - 1)^2 \leqq n(k) \leqq 2^k - k - 1.$$

Dôkaz. Tvrdenie vety priamo vyplýva z lemy 2 a dôsledku lemy 1.

Záverom si všimnime, že pri $k = 1, 2, 3$ je dolné ohraničenie pre $n(k)$ rovné hornému, a preto z vety 3 vyplýva, že $n(1) = 0$; $n(2) = 1$; $n(3) = 4$. Pre väčšie hodnoty k je však značný rozdiel medzi dolným a horným ohraničením, takže by ich bolo treba spresniť. Dá sa očakávať, že to bude možné najmä pri hornom ohraničení.

LITERATÚRA

[1] Moore E., *Gedanken-experiments on sequential machines*, Automata studies, Princeton 1956, 129–153.

[2] Ginsburg S., *On the length of the smallest uniform experiment which distinguishes the terminal states of a machine*, J. Assoc. Comput. Mach. 5 (1958), 266–280.

Došlo 9. 9. 1962.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Fakulty prevádzky a ekonomiky dopravy
Vysokej školy dopravnej
v Žiline

A NOTE ON HOMOGENEOUS EXPERIMENTS WITH FINITE AUTOMATA

Ján Černý

Summary

Some papers, e. g. [1, 2], are concerned with the question whether there exists, for a given equential machine, a homogeneous experiment which would bring it into a uniquely determined ate, not depending on the initial state of the machine. The problem was solved for Moore's machines ith distinguishable states.

In the present paper the corresponding problem is treated for autonomous automata (i. e., thout output). Necessary and sufficient conditions for the existence of such experiments are stated d estimates of their minimal length are established.