MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK 14 1964 ČÍSLO 3

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES MULTITREILLIS VI

(CONTRIBUTIONS À LA THÉORIE DES STRUCTURES ALGÉBRIQUES ORDONNÉES)

MICHAËL BENADO, Bucarest

Hommage à la mémoire de l'Académicien Siméon Stoïlov

INTRODUCTION

Depuis une dizaine d'années environ, la théorie des structures algébriques ordonnées a pris un grand essor, grâce surtout aux efforts de l'École française. Il faut rattacher l'intérêt des recherches qui s'y rapportent, surtout aux tentatives d'une „elementfreie Begründung" de la théorie des idéaux (cf. les travaux [1–6, 13]) encore que les recherches sur les treillis multiplicatifs du type de ceux, qu'on rencontre dans certaines parties de la théorie des groupes et des algèbres de Lie, et où vaut la loi d'associativité de M. Philip Hall [7], y soient également, largement représentées, cf. par exemple, les travaux [7–12]. Il y a lieu, d'ailleurs, d'y signaler aussi quoique un peu moins spécifiquement arithmétiques ou algébriques, les recherches ayant pour objet l'étude des structures algébriques ordonnées par les méthodes de la théorie générale des demigroupes [14] et de l'ordre partiel [28] (telles les recherches concernant les problèmes de plongement (Einbettung), sur les théorèmes de point fixe, cf. par exemple [15].

Or, l'intérêt de toutes ces investigations, tient aussi à ce qu'on puisse régir la structure interne des groupoïdes (au sens du livre de M. Borůvka [24]) partiellement ordonnés requis moyennant des suppositions arithmétiques ou algébriques, suggérées par les théories classiques. C'est le point de vue que j'ai adopté dans le présent travail, qu'on peut regarder comme un développement du § 8, alinéa V de mon rapport [16], et où j'ai entrepris d'analyser certaines parties de la théorie classique des idéaux, dans les groupoïdes partiellement ordonnés où, à côté d'une multiplication non nécessairement associative, ni commutative, seules sont requises, parmi les suppositions fondamentales, la condition des chaînes ascendantes ou la condition (affaiblie) des chaînes descendantes (ou les deux à la fois), ce qui entraîne en particulier, que le groupoïde partiellement ordonné sousjacent n'est plus nécessairement un treillis mais un *multitreillis* (= multistructure), dont j'ai introduit la notion dans mon travail [17], 1.1.

C'est ainsi que j'ai étudié, à ce point de vue, les questions suivantes:

(1) *Les théorèmes de décomposition* 1,2 *et* 4 *d'Emmy* Noether;

(2) *Le théorème fondamental de la divisibilité de* Dékékind;

(3) *Le théorème d'existence des séries principales;*

(4) *Le théorème* d'Akizuki-Grell-Cohen, *concernant les relations mutuelles entre les deux conditions de chaîne;*

(5) *La distributivité du groupoïde partiellement ordonné sousjacent* (en tant que multitreillis!).

En fait, il y a déjà longtemps, que l'on s'est avisé de ce, que certaines notions et propriétés dans la théorie des idéaux (telles, la notion d'idéal premier, et le théorème d'Akizuki-Grell-Cohen, pour ne parler que de ceux-ci) se laissent définir et formuler dans les seules termes de la multiplication et de l'ordre partiel, sans y supposer, d'ailleurs, que la multiplication soit associative, ni commutative, ni que l'ordre partiel définisse un treillis (encore que ce soit toujours le contraire qui arrive dans la théorie classique), mais quant à démontrer ces propriétés, ce n'est ordinairement qu'en supposant l'associativité (et la commutativité) de la multiplication ainsi que la réticulation de l'ordre partiel (elias l'axistence du *pgcd* et du *ppcm*, pour employer la terminologie alassique), – qu'on l'accomplit.

Ce n'est que récemment qu'apparaît, le souci de s'affranchir de la supposition de l'existence du *pgcd* et *ppcm* à propos, notamment, du théorème fondamental de la divisibilité dans les holoïdes. Cf. à cet égard les recherches de M. Bruno Bosbach (cf. [18] et les références subséquentes) pour le cas commutatif et [19], § 1, alinéa 2 pour le cas des demigroupes non-commutatifs (mieux: souscommutatifs). Dans ces recherches l'existence du *pgcd* ou du *ppcm* n'est pas présupposée, ni ne résulte à posteriori des décompositions requises, si non que pour certaines couples spéciaux d'éléments de l'ensemble sousjacent.

Quoi qu'il en soit, c'est dans le présent travail que pour la première fois, pareilles questions sont étudiées *par les méthodes de la théorie des multitreillis.*

Il y s'agit notamment de l'étude des questions sous (1)–(3) ci-dessus, les autres questions, particulièrement, l'analyse du théorème d'Akizuki-Grell-Cohen, fera l'objet de la partie VII de mes *Remarques sur la théorie des multitreillis.*

Voici maintenant un bref aperçu sur la matière du présent travail.

Pour ce qui est des théorèmes de décomposition d'Emmy Noether ce n'est que pour le dernier que j'ai pu résoudre et la question d'existence et celle d'unicité des décompositions requises. Quant aux théorèmes 1 et 2 d'Emmy Noether, je n'ai pu résoudre que la question d'existence des décompositions qui y sont requises, moyennant notamment la construction transfinie que j'ai donnée dans le § 2 de mon travail [22].

Les difficultés de la question d'unicité dans la cas du théorème 1 d'Emmy Noether (*alias* théorème Kurosch-Ore) tiennent essentiellement à la définition des éléments

$\wedge\!\!\wedge$-réductibles, respectivement $\wedge\!\!\wedge$-irréductibles (cf. le § 3 du présent travail). Or, il y a ici en réalité, des degrés (Stufen) de réductibilité et d'irréductibilité des éléments, et qui correspondent à la chaîne (transfinie) d'opérations $\wedge\!\!\wedge^{\beth}$, qui se laisent construire à partir de l'opération $\wedge$ du $\wedge$-demimultitreillis complet sousjacent selon [22], § 2, et dont seule la dernière, $\wedge\!\!\wedge$, est univoque est associative au sens des alinéas 3.1, 3.2 du présent travail, ce n'est, d'ailleurs, que dans le cas des treillis que ces opérations coïncident avec l'opération $\wedge$ du treillis. Or, il semble bien que la solution de la question d'unicité dépend essentiellemnt de l'opération $\wedge$ du $\wedge$-demi-multitreillis fondamental, alors que l'existence des décompositions requises se rattache naturellement aux opérations $\wedge\!\!\wedge^{\beth}$. Des recherches sont encore nécessaires pour élucider cette difficile et complexe question, sur laquelle j'espère pouvoir revenir dans un avenir prochain.

D'un autre côté, le théorème 2 d'Emmy Noether (alias théorème Lasker-Noether) exige ici le remplacement de la notion ordinaire de radical par la notion de radical algébrique au sens défini à 4.8, 4.9 lequel est une fonction généralement multivoque de son argument, ainsi que le remplacement de la notion d'élément primaire par celle d'élément quasiprimaire ou partiellement primaire (8.5, 8.4).

Ici encore, la complexité de la structure interne du domaine divisionnaire sousjacent (5,1) exige des recherches ultérieures quant à la question d'unicité des décompositions requises.

Quant au théorème fondamental de la divisibilité, comme aussi du théorème d'existence des séries principales (§§ 7,10) du présent travail, je me suis contenté d'indiquer seulement les résultats, j'y reviendrai dans la suite de ce travail. Je mentionne, cependant, que le théorème d'existence des séries principales, tel que je l'entends ici, y est formulé sans nulle supposition d'associativité de la multiplication.

À propos des recherches précitées de M. Bosbach, je mentionne égallement le fait, que le théorème fondamental de la divisibilité tel, qu'il est formulé dans le présent travail (7.1), n'est pas comparable au résultat correspondent de M. Bosbach (l. c., cas des décompositions en produit d'éléments *premiers*), – sauf dans le cas associatif et commutatif, où le résultat de M. Bosbach est plus général que le mien. Par ailleurs, le théorème 7.1 est aussi indépendant de celui de [19] (endroit précité), sauf dans le cas associatif, où ce dernier est, lui-aussi, plus général que le mien.

Toutes ces questions exigent l'intervention de deux conditions, dont l'importance dans la théorie des treillis multiplicatifs résidués a déjà été établie par les recherches précitées de M. M. Kerstan, Lesieur, Croisot, il s'agit notamment de la condition (A) des éléments essentiels à gauche et de la condition (B) des éléments principaux à droite. Ces conditions se laissent facilement reformuler dans les termes de la théorie des multitreillis et jouent ici un rôle tout-à-fait analogue à celui qu'elles détiennent dans les travaux des Auteurs précités.

En outre, la validité du théorème fondamental de la divisibilité dépend d'une certaine condition (Φ''), plus faible que la condition (Φ') au sens de [31], page 221, et qui, dans les domaines divisionnaires, équivaut à la propriété de décomposition de F. Riesz (*alias* axiome **G3'** du présent travail).

Au reste, les développements des §§ 2,6 du présent travail sont encore requis dans la suite de ce travail, particulièrement par une étude préliminaire sur les multitreillis géométriques. Prenant pour point de départ mes recherches antérieures sur les multitreillis semimodulaires (cf. [17], 4.7–4.742), je fais notamment valoir ici pour les multitreillis certains critériums de semimodularité donnés par M. Croisot dans sa Thése [23] pour le cas des treillis.

Quant aux techniques du présent travail, ce sont, généralement, les techniques ordinaires, cf. les travaux [4–6]. Je me permets, cependant, de signaler le rôle distingué qu'y joue l'axiome **G3**, dont l'importance dans certaines parties de la théorie des idéaux a été depuis longtemps signalée, mais dont la puissance unificatrice et simplificatrice apparaît ici pour la première fois, je crois, en tant que telle. Cet axiome **G3**, qui est une trace de la propriété d'interpolation de F. Riesz (cf. par exemple [21], p 52), joue ici à la place de la loi distributive (*) de 5.5, théorème 2, laquelle n'est pas requise dans le présent travail (sauf à 8.9 et 10.1), mais qui entraîne la loi d'isotonie **G1**. Au reste, l'auxiome **G3** est toujours vérifié par les domaines divisionnaires (cf. théorème 5.3).

Les matières sont disposées comme suit:

§1. RAPPEL DE QUELQUES NOTATIONS ET PROPRIÉTÉS

§ 1.

1.1. Majuscules latines ou gotiques dénotent ensembles et sous-ensembles, dont les éléments sont notés par minuscules latines. L'ensemble vide est noté par $\emptyset$. Le symbôle $\{a, b, c, \ldots\}$ dénote l'ensemble, non nécessairement dénombrable, dont les éléments son $a, b, c, \ldots$. Les symbôles $\cup$, $\cap$, $\subseteq$ ($\supseteq$) dénotent respectivement l'union, l'intersection l'inclusion au sens de la théorie générale des ensembles.

1.2. Soit $\mathscr{P}$ un ensemble partiellement ordonné par une relation $\geqq$ ou $\leqq$ ([21], Chap. I. § 1). Pour $a, b \in \mathscr{P}$, on écrit $a > b$ si et seulement si $a \geqq b$ et $a \neq b$. La notation $a \succ b$ (lire: *a couvre b*) signifie $a > b$ et pour chauqe $x \in \mathscr{P}$ tel que $a \geqq x \geqq b$, on a ou bien $x = a$, ou bien $x = b$. Enfin, pour $a, b \in \mathscr{P}$ tels que $a \geqq b$, j'entends par a/b le *quotient* de a par b, c'est-à-dire, l'ensemble de tous les $x \in \mathscr{P}$ tels que $a \geqq x \geqq b$ ([21], Chap. I. § 1).

1.3. Au cas où $\mathscr{P}$ est un multitreillis au sens de mon travail [17], 1.1, je dénote par $(a \vee b)_u$ l'ensemble de tous les $d \in \mathscr{P}$ satisfaisant à l'axiome $\mathfrak{M}1$ (l. c.), attendu que $a, b, u \in \mathscr{P}$ soient tels que $a \leqq u$, $u \geqq b$. Et pour $a, b, v \in \mathscr{P}$ tels que $v \leqq a$, $v \leqq b$, je dénote par $(a \wedge b)_v$ l'ensemble de tous les $m \in \mathscr{P}$ satisfaisant à l'axiome $\mathfrak{M}2$ (l. c.). En outre, je pose, pour $a, b \in \mathscr{P}$,

$$a \vee b = \bigcup_{\substack{u \geqq a \\ u \geqq b}} (a \vee b)_u, \qquad a \wedge b = \bigcup_{\substack{v \leqq a \\ v \leqq b}} (a \wedge b)_v$$
$$(u \in \mathscr{P},\ v \in \mathscr{P}).$$

1.4. Au cas où $\mathscr{P}$ est un multitreillis complet au sens de mon travail [22], 1.4, les notations $(\bigvee \mathscr{A})_u$, $(\bigwedge \mathscr{A})_v$, $\bigvee \mathscr{A}$, $\bigwedge \mathscr{A}$ pour $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}$ et $u, v \in \mathscr{P}$ ont un sens analogue aux précédentes (1.3).

1.5. Je rappelle ici, pour des références futures, les propriétés simples suivantes, ayant lieu dans tout multitreillies $\mathfrak{M}$ (ainsi que leurs duales):

1.5.1. *Pour tous les $a, b, d, d' \in \mathfrak{M}$ tels que $d \in a \vee b$, $d' \in a \vee b$ et $d \geqq d'$*, on a $d = d'$. Cf. [17], 2.1, lemme 1.

1.5.2. *Pour tous les $a, a_1, b, d \in \mathfrak{M}$ tels que $d \in a \vee b$ et $d \geqq a_1 \geqq a$, on a $d \in a_1 \vee b$.* Cf. [17], 3.21, lemme 1.

1.5.3. *Pour tous les $a, b, c \in \mathfrak{M}$ tels que $a \geqq b$ et $c \vee a \neq \emptyset$ et pour chaque $x \in c \vee a$, il existe un $x' \in c \vee b$ tel que $x \geqq x'$.* Cf. [17], 2.1, lemme 6.

1.5.4. *Tout ensemble partiellement ordonné $\mathfrak{M}$ satisfaisant à la condition des chaînes ascendantes (descendantes), est un demimultitreillis complet par rapport à* $\wedge$ (par rapport à $\vee$. Si les deux conditions de chaîne sont à la fois en puissance, $\mathfrak{M}$ est un multitreillis complet, donc *à fortiori* un multitreillis (tout court).

1.6. Toutes les fois que, dans la suite, il sera question d'un (demi-)multitreillis conçu en tant qu'ensemble partiellement ordonné satisfaisant à l'une ou à l'autre, ou à toutes les deux à la fois, des deux conditions de chaîne, il s'agira toujours de celui, dont on parle à 1.5.4.

Si bien que, toutes les fois que, dans la suite, un ensemble partiellement ordonné, satisfaisant à l'une ou à l'autre, ou à toutes les deux à la fois, des deux conditions de chaîne, sera dit satisfaire à telle ou telle propriété, ayant ordinairement un sens pour les seuls (demi-)multitreillis (donc pouvant y être vraie ou fausse), — c'est toujours en tant que (demi-)multitreillis au sens de 1,5.4, qu'il sera entendu, qu'il y satisfait.

2.1. Définition. *Je dirai qu'un multitreillis* $\mathfrak{M}$ *est*

2.2.1. *Semimodulaire au sens de M. M. Mac Lane et Croisot* ([29], [23]) *ou encore* [MLC]*-semimodulaire, lorsque*

[MLC] *Pour tous les* $a, a', b, d, m \in \mathfrak{M}$ *tels que* $d \in a \vee b$, $m \in a \wedge b$, $d > a \geqq a' > m$, *il existe un élément* $b' \in \mathfrak{M}$ *tel que* $b \geqq b' > m$ *et tel que pour chaque* $x' \in a' \vee b'$ (cf. 1.3) *on ait* $a' \in a \wedge x'$.

2.1.2. (S)*-semimodulaire, lorsque*

(S) *Pour tous les* $a, a', b, d, m \in \mathfrak{M}$ *tels que* $d \in a \vee b$, $m \in a \wedge b$, $d > a \geqq a' > m$, *il existe des éléments* $b', x' \in \mathfrak{M}$, *tels que* $b \geqq b' > m$, $x' \in (a' \vee b')_d$ (cf. encore 1.3.1) *et tels que* $a' \in a \wedge x'$.

2.1.3. *Primitivement (d'en base) semimodulaire ou encore* (π')*-semimodulaire, lorsque*

(π') *Pour tous les* $a, b \in \mathfrak{M}$ *tels que* $a \vee b \neq \emptyset \neq a \wedge b$, *si l'on a* $b \succ m$ *pour quelque* $m \in a \wedge b$, *on a aussi* $d \succ a$ *pour chaque* $d \in a \vee b$.

2.1.4. *Semimodulaire au sens de M. Garrett Birkhoff ou encore* (σ')*-semimodulaire, lorsque:*

(σ') *Pour tous les* $a, b \in \mathfrak{M}$ *tels que* $a \vee b \neq \emptyset \neq a \wedge b$, *si l'on a* $a \succ m$ *et* $b \succ m$ *pour quelque* $m \in a \wedge b$, *on a aussi* $d \succ a$ *et* $d \succ b$ *pour chaque* $d \in a \vee b$.

2.2. Les définitions 2.1.3 et 2.1.4, je les déjà envisagées, sous une forme un peu différente, mais rigoureusement équivalente, dans mon travail [17], 4.7.

La condition (S), découverte dans le cas des treillis par M. Mac Lane (l. c.), a été proposée par M. Croisot (l. c.) pour définition générale des treillis semimodulaires.

La condition (MLC) diffère de (S), entre autres, en ce que l'élément x' qui y figure, appartient à $a' \vee b'$, mais non nécessairement à $(a' \vee b')_d \subseteq a' \vee b'$. Ce renforcement de la condition (S) m' a été suggéré par une remarque de M. Ján Jakubík (lettre à l'auteur), concernant une certaine forme de modularité dans les groupes multiréticulés.

Je fais remarquer, enfin, que les définitions 2,1.1, 2.1.2, se laissent renforcer d'une manière évidente, au sens et moyennant la propriété suivante, ayant lieu dans tout multitreillis $\mathfrak{M}$:

Pour tous les $a, a', b, b', m, x \in \mathfrak{M}$ tels que

$$d \in a \vee b, \quad m \in a \wedge b,$$
$$a \geqq a' > m, \quad b \geqq b' > m,$$
$$x \in a' \vee b',$$

il existe des éléments $a'', b'' \in \mathfrak{M}$ tels que

$$a \geqq a'' > m, \quad b \geqq b'' > m,$$
$$x \in a'' \vee b'',$$
$$a'' \in a \wedge x, \quad b'' \in b \wedge x.$$

2.3. Théorème. *Dans tout multitreillis* $\mathfrak{M}$ *on a les implications logiques suivantes.*

$$(\mathrm{MLC}) \Rightarrow (\mathrm{S}) \Rightarrow (\pi') \Rightarrow (\sigma'). \tag{1}$$

Démonstration. La première implication est évidente; quant à $(\pi') \Rightarrow (\sigma')$, cf. mon travail [17], 4.73. Reste à prouver que $(\mathrm{S}) \Rightarrow (\pi')$.

Soient, à cet effet, $a, b \in \mathfrak{M}$ tels que $a \vee b \neq \emptyset \neq a \wedge b$ et tels que pour quelque $m \in a \wedge b$ on ait $b \succ m$; il s'agit de prouver que la condition (S) entraîne alors $d \succ a$ pour chaque $d \in a \vee b$.

Supposons que le contraire ait lieu et soit $a_1 \in \mathfrak{M}$ tel que

$$d > a_1 > a \tag{2}$$

(pour quelque $d \in a \vee b$). Il en résulte, d'après la définition des multitreillis, qu'il existe un $b' \in \mathfrak{M}$, tel que $b' \in (a_1 \wedge b)_m$. Alors, puis que $b \succ m$, de deux choses, l'une: ou bien on a $b' = b$, ou bien on a $b' = m$. Or, si l'on avait $b' = b$, on en déduirait $b \leqq a_1$ et, comme on a aussi $a_1 > a$ (cf. les ((2)), il en résulte, par la définition des multitreillis, $d \leqq a_1$, ce qui par rapport à (2) est une contradiction (1.5.1).

D'autre part, si l'on avait $b' = m$, on en déduirait $m \in a_1 \wedge b$ et, comme d'après (2) et d'après 1.5.2, on a aussi $d \in a_1 \vee b$, il en résulterait d'après la condition (S), qu'il existe $b^*, x \in \mathfrak{M}$ tels que $b \geqq b^* > m$ et $x \in (a \vee b^*)_d$ et tels que $a \in a_1 \wedge x$. Or, puisque $b \succ m$, on a surément $b^* = b$ et, par conséquent, d'après la définition des multitreillis, $x = d$; ainsi $a \in a_1 \wedge d = \{a_1\}$ (d'après (2)) et, finalement, $a = a_1$, ce qui, toujours d'après (2), est une contradiction.

De toute façon, l'existence d'un $a_1 \in \mathfrak{M}$ satisfaisant aux (2), entraîne une contradiction, ce qui démontre que $(\mathrm{S}) \Rightarrow (\pi')$ et, partant, les (1).

2.4. Lemme. *Dans tout multitreillis* $\mathfrak{M}$, *la condition* (π') *entraîne la propriété suivante:*

(S*) *Pour tous les* $a, b \in \mathfrak{M}$ *tels que* $a \vee b \neq \emptyset \neq a \wedge b$ *et tous les* $a', d, m \in \mathfrak{M}$ *tels que* $d \in a \vee b$, $m \in a \wedge b$, $a \geqq a' > m$, $b \succ m$, *on a* $a' \in a \wedge b_1$ *pour chaque* $b_1 \in a' \vee b$.

Démonstration. En effet, on a, d'une part, $b_1 \in a' \vee b$ et, d'autre part, d'après 1.5.2 (forme duale!), on a $m \in a' \wedge b$. Il en résulte, d'après la condition (π') et d'après $b \succ m$, qu'on a

$$b_1 \succ a' \tag{3}$$

pour chaque $b_1 \in a' \vee b$. D'ailleurs

$$b_1 > b \tag{3'}$$

sans quoi, on aurait $b_1 = b$ donc $a' \leqq b$ et $m < a' \leqq a$ ce qui par rapport à $m \in a \wedge b$ est une contradiction.

Or, d'après la définition des multitreillis, il existe un $a'' \in \mathfrak{M}$ tel que $a'' \in (a \wedge b_1)_{a'}$ et, par suite, $a' \leqq a'' \leqq b_1$, d'où l'on tire, compte tenu de (3), qu'on a ou bien

$a'' = b_1$ ou bien $a'' = a'$. Or, si l'on avait $a'' = b_1$, il en résulterait évidemment $b_1 \leqq a$ et, comme on a aussi $b_1 \in a' \vee b$, donc $b_1 \geqq b$, on en conclurait à $a \geqq b$, donc $m = b$ pour chaque $m \in a \wedge b$, contrairement à $b \succ m$. Ainsi, on a bien $a'' = a'$, cela veut dire $a' \in a \wedge b_1$ pour chaque $b_1 \in a' \vee b$, ce qui achève la démonstration.

2.5. Théorème. *Dans tout multitreillis $\mathfrak{M}$, dont les chaînes bornées sont finies, la condition (σ') entraîne la condition* (**MLC**):

$$(\sigma') \Rightarrow (\mathbf{MLC}).$$

Démonstration. Sous les suppositions du théorème, la condition (σ') entraîne toujours la condition (π'), cf. mon travail [17], 4.73.

Pour démontrer le théorème, il suffit donc de prouver, qu'on a

$$(\pi') \Rightarrow (\mathbf{MLC}).$$

Or, les chaînes bornées de $\mathfrak{M}$ étant finies, il existe des chaînes maximales d'éléments de $\mathfrak{M}$ reliant tout $x \in \mathfrak{M}$ à tout $y \in \mathfrak{M}$ tel que $y < x$ et, d'après mon travail [17], 4.71–4.73, toutes les chaînes maximales aux extrémités communes ont même longueur (condition Jordan-Dédekind pour les chaînes). Nous alons, dès lors, appliquer un raisonement inductif relativement à la longueur $\| x/y \|$ d'une chaîne maximale (quelconque) allant de x à y.

Soient, à cet effet, $a, a', b, d, m \in \mathfrak{M}$ tels que

$$d \in a \vee b, \qquad m \in a \wedge b,$$
$$d > a \geqq a' > m$$

et l'on a alors aussi, comme il est facile de s'en convaincre, $d > b > m$. Si donc $\| b/m \| = 1$, cela veut dire, si l'on a $b \succ m$, le théorème est déjà démontré, car il coïncide en ce cas avec la propisition (**S***) ci-dessus, cf. 2.4.

Supposons donc que $\| b/m \| = r > 1$ et que le théorème eût déjà été démontré pour tous les $r' < r$. Considérons un $b^* \in b/m$ tel que $\| b/b^* \| = 1$ (donc tel que $b \succ b^*$(1)); il y en a toujours, d'après la condition des chaînes bornées finies). Par conséquent, on aura $\| b^*/m \| = r - 1$ et aussi $m \in a \wedge b^*$, d'après 1.5.2 (forme duale). Cela posé, soit $d^* \in a \vee b^*$ (il y en a toujours d'après la définitions des multitreillis) et appliquons la supposition inductive au quadrilatère irréductible $(a, b^*; d^*, m)$. Il en résulte l'existence d'un $b' \in \mathfrak{M}$ tel que $b^* \geqq b' > m$ et tel que pour chaque $x' \in a' \vee b'$ on ait $a' \in a \wedge x'$. Or, $b \succ b^* \geqq b' > m$ entraîne $b \geqq b' > m$ (même $b > b' > m$) et ceci achève la démonstration du théorème.

---

(1) Et naturellement aussi, tel que $b^* > m$ selon l'hypothèse inductive, car on raisonne sur les éléménts des chaînes allant de b à m!

2.5.1. **Corollaire.** *Dans tout multitreillis dont les chaînes bornées sont finies, les conditions* (**MLC**), (**S**), (π') *et* (σ') *sont logiquement équivalentes*

$$(\mathbf{MLC}) \Leftrightarrow (\mathbf{S}) \Leftrightarrow (\pi') \Leftrightarrow (\sigma').$$

Démonstration. Résulte de 2.3 et 2.5.

2.6. Définition. *J'appellerai semimodulaire (au sens général) tout multitreillis satisfaisant à la condition* (**MLC**) *de* 2.1.1.

Cette définition revient évidemment à celle de M. Croisot [23], au cas, où le multitreillis est un treillis.

2.7. Théorème. *Dans tout multitreillis semimodulaires $\mathfrak{M}$ (2.6) pour tous les $a, b \in \mathfrak{M}$ tels que $a \succ b$ et chaque $c \in \mathfrak{M}$ tel que $c \vee a \neq \emptyset$, on peut, pour chaque $u \in c \vee a$, trouver un $v \in c \vee b$ tel qu'on ait $u = v$ ou $u \succ v$.*

Démonstration. D'après 1.5.3, pour chaque $u \in c \vee a$, il existe au moins un $v \in c \vee b$, tel que $u \geqq v$ et je vais prouver que si $u \neq v$, alors, on a nécessairement $u \succ v$.

En effet, puisque $v \in c \vee b$, on a $v \geqq b$ et comme $a \succ b$, il y aura, d'après la définition des multitreillis, un élément $x \in a \wedge v$ tel que $x \geqq b$. De la sorte, on a même $a \geqq x \geqq b$ et, d'après la supposition $a \succ b$, il y aura alors deux cas à distinguer:

(1) Ou bien $x = a$, auquel cas il s'ensuit $v \geqq a$ et, comme on a aussi $v \geqq c$ et $v \leqq u \in c \vee a$, il en résulte d'après la définition des multitreillis (et d'après 1.5.1), l'égalité $u = v$, contrairement à $u \neq v$.

(2) Ou bien $x = b$, auquel cas $b \in a \wedge v$ et, comme on a aussi $u \in a \vee v$ (appliquer simplement 1.5.2.), il s'ensuit d'après la condition (π') (cf. 2.3) et d'après $a \succ b$, la relation à démontrer $u \succ v$.

2.8. Lemme. *Dans tout multitreillis semimodulaire $\mathfrak{M}$ (2.6), pour deux éléments $a, a_1 \in \mathfrak{M}$ tels que $a < a_1$, les deux propriétés suivantes sont logiquement équivalentes:*

$$(\mathbf{P}_1) \quad a_1 \vee x \neq \emptyset, \qquad a \in a_1 \wedge x, \qquad x \in \mathfrak{M} \Rightarrow x = a,$$
$$(\mathbf{P}_2) \quad a_1 \vee x \neq \emptyset, \qquad a \geqq m \in a_1 \wedge x, \qquad x, m \in \mathfrak{M} \Rightarrow x \leqq a.\text{(2)}$$

(Cf. [6], lemme 7.1 et aussi [5], 7.1).

Démonstration. Il est évident que $(\mathbf{P}_2) \Rightarrow (\mathbf{P}_1)$ quel que soit d'ailleurs le multitreillis $\mathfrak{M}$. Supposons maintenant que $\mathfrak{M}$ soit semimodulaire (2.6) et montrons que

---

(2) La condition $a_1 \vee x \neq \emptyset$ y aurait pu être omise, si l'on avait supposé que $\mathfrak{M}$ soit filtrant d'en haut. En tout cas, l'implication logique $(\mathbf{P}_2) \Rightarrow (\mathbf{P}_1)$ n'en dépend nullement, ce n'est que l'implication $(\mathbf{P}_1) \Rightarrow (\mathbf{P}_2)$ qui en dépend.

$(\mathbf{P}_1) \Rightarrow (\mathbf{P}_2)$, cela veut dire, que tout couple a, $a_1 \in \mathfrak{M}$,$a_1 > a$, satisfaisant à la propriété $(\mathbf{P}_1)$, satisfait aussi à la propriété $(\mathbf{P}_2)$. En effet, on tire des suppositions de $(\mathbf{P}_2)$ et de $a_1 > a$, les inégalités suivantes

$$a_1 > a \geqq m \tag{4}$$

lesquelles entraînent, d'ailleurs, toujours d'après les suppositions de $(\mathbf{P}_2)$ et d'après 1.5.2, la relation

$$m \in a \wedge x. \tag{5}$$

Maintenant, je dis que dans les (4), on a certainement

$$a = m. \tag{6}$$

Sans quoi, on aurait $a > m$ et alors, d'après la semimodularité (appliqué au quadrilatère irréductible $(a_1, x; d, m)$,(3) $d \in a_1 \vee x$), il y aurait un $x' \in \mathfrak{M}$ tel que $x \geqq x' > m$ et tel que pour chaque $y \in a \vee x'$, on ait

$$a \in a_1 \wedge y \tag{7}$$

où l'on peut d'ailleurs supposer que

$$a_1 \vee y \neq \emptyset, \tag{7'}$$

car on peut toujours choisir $y \in a \vee x'$ de façon que $y \leqq d$ (appliquer simplement la définition des multitreillis), ce qui vis-à-vis de $a_1 \leqq d$ (*alias* $a_1 < d$(3)), montre qu'on a bien (7').

Les relation (7), (7') entraînent maintenant, d'après la propriété $(\mathbf{P}_1)$, l'égalité $y = a$, laquelle, compte tenu de $y \in a \vee x'$, entraîne à son tour, $a \geqq x'$. Cette dernière et $x \geqq x'$ (cf. plus haut), entraînent, d'après la définition des multitreillis, l'existence d'un $m^* \in a \wedge x$ tel que $m^* \geqq x'$. Or, $x' > m$ (cf. plus haut), donc $m^* > m$, ce qui d'après (5) et d'après 1.5.1 (forme duale) donne une contradiction.

Ainsi, on ne saurait avoir $a > m$, ce qui prouve qu'on a bien la (6). Or, ceci entraîne, d'après la propriéte $(\mathbf{P}_1)$, l'égalité $x = a$.

Donc, dans tous les cas, $(\mathbf{P}_1) \Rightarrow (\mathbf{P}_2)$ et ceci achève la démonstration.

§ 3.

§ 3. LE THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION KUROSCH—ORE

3.1. Notations. Soit $\mathfrak{M}$ un $\wedge$-demimultitreillis complet avec dernier élément 1 (donc tel que $x \leqq 1$ pour tout $x \in \mathfrak{M}$), cf. mon travail [22], 1.4, axiome $\mathfrak{MC}$ 2.

(3) Où l'on peut, du reste, supposer $d > a_1$, sans quoi on aurait $d = a_1$, ce qui entraînerait $a_1 \geqq x$, c'est-à-dire, d'après les suppositions de $(\mathbf{P}_2)$, $a \geqq m = x$, et il n'y aurait alors plus rien à démontrer. D'ailleurs, l'inégalité $d > a_1$ et les (4), entraînent que $a_1 \ngeqq x \ngeqq a_1$, donc aussi $x > m$.

À chaque partie (même vide) $\mathscr{G} \subseteq \mathfrak{M}$, on peut, d'après la construction duale de celle que j'ai donnée dans [22], 2.3—2.5, associer un opérateur de fermeture $\varphi_{\mathscr{G}}(a)$, $a \in \mathfrak{M}$, tel que $\varphi_{\mathscr{G}}(a) = a$, si et seulement si, $a \in [\mathscr{G}]^\wedge$, cf. [22] 2.1 et dualité, puis Ibid. 2.4.2 et dualité. Or, il suit aisément des considérations de l'alinéa 2.3 de [22], qu'on a ici (par dualité)

$$\varphi_{\mathscr{G}}(a) = \varphi_{\mathscr{G} \cap (1/a)}(a), \qquad a \in \mathfrak{M}. \tag{8}$$

Cela étant, je pose, en dualisant toujours les termes et les notations de [22], 2.1 et 4.2,

$$\Lambda\!\!\Lambda_a \mathscr{G} = \varphi_{\mathscr{G}}(a), \qquad a \in \mathfrak{M} \tag{9}$$

d'où il suit, d'après (8), qu'on a encore

$$\Lambda\!\!\Lambda_a \mathscr{G} = \Lambda\!\!\Lambda_a(\mathscr{G} \cap (1/a)) \geqq a, \qquad a \in \mathfrak{M}. \tag{9'}$$

3.1.1. Au cas où $\mathscr{G} = \{a_i, i \in \mathscr{I}\}$, j'écrirai

$$\Lambda\!\!\Lambda_a \mathscr{G} = \underset{i \in \mathscr{I}}{\Lambda\!\!\Lambda_a}\, a_i, \qquad a \in \mathfrak{M}. \tag{9''}$$

Mais, en ce cas, je supposerai ordinairement, qu'on a $a_i \geqq a$, $i \in \mathscr{I}$, ce qui, d'après (9') est toujours réalisable, pourvu que $\mathscr{G} \cap (1/a) \neq \emptyset$. Or, si l'on a $\mathscr{G} \cap (1/a) = \emptyset$, alors $\varphi_{\mathscr{G}}(a) = 1$.

3.1.2. Au cas où $\mathscr{G}$ ou, au moins, $\mathscr{G} \cap (1/a)$, est un ensemble fini, soit $\mathscr{G} \cap (1/a) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (n nombre naturel quelconque, $x_i \in \mathfrak{M}$, $i = 1, 2, \ldots, n$) j'écrirai ordinairement.

$$\Lambda\!\!\Lambda_a(\mathscr{G} \cap (1/a)) = x_1 \Lambda\!\!\Lambda_a x_2 \Lambda\!\!\Lambda_a \ldots \Lambda\!\!\Lambda_a x_n. \tag{9'''}$$

3.1.3 Au cas où $\mathfrak{M}$ est au $\wedge$-demimultitreillis complet, on retrouve les notions et notations ordinaires.

Les notations (9''), (9''') sont justifiées par la proposition suivante:

3.2. Lemme. (Loi d'associativité de l'opération $\Lambda\!\!\Lambda$). *Dans tout $\wedge$-demimultitreillis complet $\mathfrak{M}$, les relations*

$$a = \underset{i \in \mathscr{I}}{\Lambda\!\!\Lambda_a}\, a_i, \tag{10}$$

$$a_i = \underset{j_i \in \mathscr{I}_i}{\Lambda\!\!\Lambda_{a_i}}\, a_{ij_i}, \qquad i \in \mathscr{I} \tag{10'}$$

où $a, a_i, a_{ij_i} \in \mathfrak{M}$, $i \in \mathscr{I}$, $j_i \in \mathscr{I}_i$ ($\mathscr{I}$, $\mathscr{I}_i$ ensembles non vides mais, par ailleurs, arbitraires, d'indices), — entraînent la relation

$$a = \underset{\substack{i \in \mathscr{I} \\ j_i \in \mathscr{I}_i}}{\Lambda\!\!\Lambda_a}\, a_{ij_i}. \tag{10''}$$

Démonstration. L'assertion du lemme est essentiellement une conséquence de la remarque que voici:

Pour tous les $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}^* \subseteq \mathfrak{M}$ et tout $a \in \mathfrak{M}$, on a

$$\mathsf{M}_{\mathsf{M}_a\mathcal{G}}\mathcal{G}^* = \mathsf{M}_a\mathcal{G}. \tag{11}$$

Or, ceci est une conséquence immédiate de la deuxième partie de Folgesatz 2.4.2 de mon travail [22] moyennant les notations (9), (9′).

Posons maintenant

$$\mathcal{G}_{\mathcal{I}} = \{a_i, i \in \mathcal{I}\}, \tag{12}$$

$$\mathcal{G}_{\mathcal{I}i} = \{a_{ij_i}, j_i \in \mathcal{I}_i\}, \qquad i \in \mathcal{I}. \tag{12′}$$

$$\mathcal{G}^* = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{G}_{\mathcal{I}i}. \tag{12″}$$

On a alors successivement, compte tenu des (9), (9′)

$$\varphi_{\mathcal{G}_{\mathcal{I}}}(a) = \mathsf{M}_a\mathcal{G}_{\mathcal{I}} = a, \tag{13}$$

(d'après (10))

$$\varphi_{\mathcal{G}_{\mathcal{I}_i}}(a_i) = \mathsf{M}_{a_i}\mathcal{G}_{\mathcal{I}_i} = a_i, \qquad i \in \mathcal{I}, \tag{13′}$$

(d'après (10′))

$$\varphi_{\mathcal{G}^*}(a_i) = \mathsf{M}_{a_i}\mathcal{G}^* = \mathsf{M}_{\mathsf{M}_{a_i}\mathcal{G}_{\mathcal{I}_i}}\mathcal{G}^*,$$

(d'après (13′))

$$= \mathsf{M}_{a_i}\mathcal{G}_{\mathcal{I}_i},$$

(d'après (12″) et (11))

$$= a_i, \qquad i \in \mathcal{I},$$

(d'après (13′))
cela veut dire

$$\varphi_{\mathcal{G}^*}(a_i) = \mathsf{M}_{a_i}\mathcal{G}^* = a_i, \qquad i \in \mathcal{I}. \tag{13″}$$

Or, d'après la première partie du Folgesatz 2.4.2 de [22], il résulte des (13), (13″) les relations suivantes:

$$a \in [\mathcal{G}_{\mathcal{I}}]^{\wedge}, \tag{14}$$

$$a_i \in [\mathcal{G}^*]^{\wedge}, \qquad i \in \mathcal{I}, \tag{14′}$$

où $[\mathcal{G}_{\mathcal{I}}]^{\wedge}$, $[\mathcal{G}^*]^{\wedge}$ ont *mutatis mutandis*, la signification de [22], 2.1. Or, $[\mathcal{G}]^{\wedge}$ étant un $\wedge$-sous demimultitreillis complet de quatrième espèce de $\mathfrak{M}$ (quel que soit d'ailleurs $\mathcal{G} \subseteq \mathfrak{M}$, cf. toujours [22], 1.7, 2.1), il suit évidemment des (14), (14′), de (12) et de la définition de $[\mathcal{G}]^{\wedge}$ ([22], 2.1 et dualité), qu'on a ici $[\mathcal{G}_{\mathcal{I}}]^{\wedge} \subseteq [\mathcal{G}^*]^{\wedge}$ ce qui, toujours d'après (14), entraîne $a \in [\mathcal{G}^*]^{\wedge}$, cela veut dire, d'après la première partie du Folgesatz 2.4.2 de [22], $\varphi_{\mathcal{G}^*}(a) = a$, donc enfin, d'après (9), (12″), justement la relation à démontrer (10″).

3.3. Définitions. *L'ensemble $\mathfrak{M}$ étant toujours un $\wedge$-demimultitreillis complet (avec dernier élément* 1*), je dirai qu'un élément $a \in \mathfrak{M}$, $a < 1$ est M-réductible, s'il existe un ensemble fini $\mathcal{F} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ d'éléments de $\mathfrak{M}$ (n nombre naturel $\geqq 2$) tels que $1 \geqq x_i > a$, $i \in \mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$ et tels que on ait*

$$a = \mathsf{M}_a\mathcal{F} = x_1\mathsf{M}_a x_2\mathsf{M}_a x_3\mathsf{M}_a \ldots \mathsf{M}_a x_n.$$

En ce cas je dirai aussi que $a \in \mathfrak{M}$ est représentable comme *multiintersection (itérée)* ou encore comme *M-intersection* d'un nombre fini d'éléments de $\mathfrak{M}$, – ses M-composants.

3.3.1. Un élément $a \in \mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ comme à 3.3), tel qu'il n'y ait aucun sousensemble fini de $\mathfrak{M}$ satisfaisant aux conditions de 3.3, sera dit *M-irréductible.*

Tel est, par exemple, l'élément $1 \in \mathfrak{M}$ et tel est aussi tout élément $a \in \mathfrak{M}$ couvert par 1 donc tel que $a \prec 1$.

3.4. Théorème. *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble partiellement ordonné avec dernier élément* 1 *et satisfaisant à la condition des chaînes ascendantes. Alors chaque élément $a \in \mathcal{P}$, $a < 1$, est représentable comme M-intersection d'un nombre fini d'éléments M-irréductibles de $\mathcal{P}$* (1.5.4).

Démonstration (inductive par rapport aux diviseurs). Le théorème est évidemment vrai pour les éléments M-irréductibles de $\mathfrak{M}$ et, en particulier, pour 1.

Supposons-le déjà démontré pour tous les diviseurs véritables de quelque $a \in \mathfrak{M}$, $a < 1$ et M-réductible (donc pour tous les $x \in \mathfrak{M}$ tels que $1 \geqq x > a$), et démontrons-le pour a lui-même; il n'y aurait plus alors que d'appliquer le principe d'induction relatif aux diviseurs (cf. par exemple [21] p. 38) pour achever la démonstration.

On a en effet

$$a = x_1\mathsf{M}_a x_2\mathsf{M}_a x_3 \ldots \mathsf{M}_a x_n, \qquad x_i \in \mathfrak{M} \tag{15}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$ (n nombre naturel $\geqq 2$) où les $x_i \in \mathcal{P}$ sont tels que

$$1 \geqq x_i > a, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Si donc, tous les x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ dans (15), sont M-irréductibles, le théorème est démontré; si non, on a, d'après la supposition inductive,

$$x_i = x_{i1}\mathsf{M}_{x_i}x_{i2}\mathsf{M}_{x_i} \ldots \mathsf{M}_{x_i}x_{in_i} \tag{15′}$$

pour tous les $i \in \mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$ et certains x_{ij_i}, tels que

$$1 \geqq x_{ij_i} > x_i, \qquad i \in \mathcal{I}', \qquad j_i = 1, 2, \ldots, n_i \tag{16′}$$

et M-irréductibles. Les (15), (15′) et le lemme 3.2 entraînent

$$a = x_{11}\mathsf{M}_a \ldots \mathsf{M}_a x_{1n_1}\mathsf{M}_a x_{21}\mathsf{M}_a \ldots \mathsf{M}_a x_{2n_2}\mathsf{M}_a \ldots$$

où tous les composants x_{ik} (dont certains peuvent égaler certains éléments x_i, $i \in \mathcal{I}$, du fait de M-irréductibilité eventuelle de ces derniers) sont M-irréductibles. Ceci achève la démonstration, compte tenu des (16), (16′).

4.1. Définition. *Par groupoïde partiellement ordonné j'entends, comme à l'ordinaire, un ensemble non vide $\mathfrak{G}$ muni d'une opération (.) univoque et universelle et appelée multiplication et d'une relation d'ordre partiel $\geqq$ ou $\leqq$ satisfaisant à la condition suivante d'isotonie:*

G1. *Pour tous les $a, b, c \in \mathfrak{G}$ tels que $a \geqq b$, on a $ac \geqq bc$ et $ca \geqq cb$.*

4.2. Définition. *Par domaine noethérien j'entends tout groupoïde partiellement ordonné* (4.1), *satisfaisant aux deux conditions suivantes de quasiintégrité et de divisibilité Noether-Krull:*

G2. *Pour tous les $a, b \in \mathfrak{G}$ on a $ab \leqq a$ et $ab \leqq b$ (Quasiintégrité).*

G3. *Pour tous les $a, b, c \in \mathfrak{G}$ tels que $c \geqq ab$, il existe des éléments $a^*, b^* \in \mathfrak{G}$ tels que $a^* \geqq a$, $a^* \geqq c$, $b^* \geqq b$, $b^* \geqq c$ et $c \geqq a^*b^*$ (Propriété de divisibilité Noether-Krull).*

4.2.1. S'il y a un dernier élément, que je noterai toujours 1, le domaine noethérien $\mathfrak{G}$ sera dit *entier* et la condition **G2** aura pour énoncé:

G2'. *Pour tous les $a \in \mathfrak{G}$, on a $1a \leqq a$ et $a1 \leqq a$.*

Un domaine noethérien est donc complètement caractérisé par les axiomes **G1 – G3** (où G2'vaut à la place de **G2**, si **G** est entier).

Je fais remarquer encore, que les groupoïdes réticulés au sens de [31], page 127, sont toujours des domaines noethériens au sens de 4.2 ci-dessus.

4.3. Définition. *Soit $\mathfrak{G}$ un domaine noethérien (entier ou non), un élément $p \in \mathfrak{G}$ sera dit:*

Premier, lorsque pour tous $a, b \in \mathfrak{G}$ tels que $p \geqq ab$, on a $p \geqq a$ ou $p \geqq b$.

Multiplicativement réductible, ou encore (.)-réductible, lorsqu'il existe $a, b \in \mathfrak{G}$ tels que $p = ab$, $p < a$ et $p < b$.

Multiplicativement irréductible ou encore (.)-irréductible, lorsqu'il n'est pas (.)-réductible. (Cf. [18], la notion de halbprim.)

S-*élément (élément de Sono), lorsque pour tous les $a, b \in \mathfrak{G}$ tels que $p \geqq ab$, $a \geqq p$, $b \geqq p$, on a $p = ab$ ou $p^2 = ab$.*

Maximal, lorsque $1 \succ p$ (1.2), *attendu que $\mathfrak{G}$ soit entier* (4.2.1).

4.4. Notations. Je désigne:

Par $\mathscr{P}$ l'ensemble de tous les éléments premiers de $\mathfrak{G}$,
par $\mathscr{I}$ l'ensemble de tous les éléments (.)-irréductibles de $\mathfrak{G}$,
par $\mathscr{S}$ l'ensemble de tous les éléments de Sono, de $\mathfrak{G}$,
par $\mathscr{M}$ l'ensemble de tous les éléments maximaux de $\mathfrak{G}$.

On a, comme on sait

$$\mathscr{P} \subseteq \mathscr{I}. \tag{17}$$

Une condition suffisante pour que (17) soit une égalité, est que le domaine $\mathfrak{G}$ soit rieszien au sens de la définition suivante:

4.5. Définition. *Par domaine rieszien j'entends un domaine noethérien où l'axiome* **G3** *est remplacé par cet autre, plus fort (propriété de décomposition de F. Riesz):*

G3'. *Pour tous les $a, b, c \in \mathfrak{G}$ tes que $c \geqq ab$, il existe des éléments $a^*, b^* \in \mathfrak{G}$ tels que $a^* \geqq a$, $b^* \geqq b$ et $c = a^*b^*$.*

Dans le cas général, vaut la propriété suivante:

4.6. Lemme. *L'ensemble $\mathfrak{G}$ étant un domaine noethérien entier, on a*

(1) $\mathscr{M} - (1/1^2) \subseteq \mathscr{P}$ (1.2).

(1') *Si l'on a $1 = 1^2$, alors $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{P}$.*

(2) $\tilde{\mathscr{P}} \cap \mathscr{S} \cap \mathscr{I} \subseteq \mathscr{P}$ *où $\tilde{\mathscr{P}}$ est l'ensemble des éléments multiplicativement premiers de $\mathfrak{G}$ (supposé entier ou non), au sens suivant:*

Pour tout $p \in \mathscr{P}$ et tous les $a, b, x, y \in \mathfrak{G}$ tels que $px = ab$ et $yp = ab$, on a $p \geqq a$ ou $p \geqq b$.

Démonstration. L'assertion (1') étant une conséquence immédiate de (1), laquelle, d'ailleurs, interviendra seule dans la suite, je me borne à démontrer cette dernière.

Soit, à cet effet, $p \in \mathscr{M} - (1/1^2)$ ce qui équivaut à $1 \succ p \ngeqq 1^2$ (4.3) et soient $a, b \in \mathfrak{G}$ tels que $p \geqq ab$. L'application de l'axiome **G3** donne

$$p \geqq a^*b^*, \tag{18}$$

$$a^* \geqq a, \quad a^* \geqq p, \tag{18'}$$

$$b^* \geqq b, \quad b^* \geqq p \tag{18''}$$

pour quelques $a^*, b^* \in \mathfrak{G}$. Comme $p \prec 1$, on aura d'après (18') ou bien $a^* = 1$ ou bien $a^* = p$. Si $p = a^*$, on aura, toujours d'après (18'), $p \geqq a$ ce qui achéverait la démonstration. Sinon, on aura, d'après (18), $p \geqq 1b^*$ ce qui entraîne $b^* = p$, sans quoi, on aurait, d'après (18'') et $1 \succ p$, $b = 1$, donc $p \geqq 1^2$ ce qui n'est pas. Ainsi, on a bien $p = b^*$, donc d'après (18''), $p \geqq b$ ce qui achève la démonstration. (Cf. [25], II-ème partie, Chap. I, § 2, alinéa 2).

4.7. Théorème. *Dans tout domaine noethérien entier $\mathfrak{G}$, satisfaisant à la condition des chaînes ascendantes, tout élément $a \in \mathfrak{G}$ possède un nombre fini de diviseurs premiers $p_i \in \mathfrak{G}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (n nombre naturel $\geqq 1$)*

$$1' \geqq p_i \geqq a, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{19}$$

tels qu'on ait, à une association des facteurs p_i près (4)

$$a \geqq [p_1 p_2 \cdots p_n]. \tag{20}$$

Au cas où $a < 1$, on a pour les p_i des (19), (20)

$$1 \geqq p_i > a, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{19'}$$

Au cas où $\mathfrak{G}$ est à élément unité (donc $1a = a = a1$ pour tout $a \in \mathfrak{G}$) et que $a < 1$, on a pour les p_i des (19), (20)

$$1 > p_i > a, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Démonstration. Si l'on a $a = 1$, le théorème est vérifié, car 1 est premier. Si, par contre $a < 1$ et est non premier, il existe des éléments $x, y \in \mathfrak{G}$ tels que

$$a \geqq xy, \qquad a \ngeqq x, \qquad a \ngeqq y, \tag{21}$$

d'où l'on tire, d'après l'axiome **G**3, qu'il existe également $x^*, y^* \in \mathfrak{G}$ tels que

$$\begin{gathered} x^* \geqq x, \qquad x^* \geqq a, \\ y^* \geqq y, \qquad y^* \geqq a, \\ a \geqq x^* y^*, \end{gathered} \tag{21'}$$

où à cause des (21), on a même

$$x^* > a, \qquad y^* > a.$$

Si donc $x^* = y^* = 1$, le théorème est démontré; si non, on applique le principe d'induction selon les diviseurs ([21], Chap. III. § 4) et la démonstration s'achève comme à l'ordinaire. D'ailleurs, au cas où il y a un élément unité, on a nécessairement $x^* < 1$ et $y^* < 1$, car autrement les suppositions $a < 1$ ou (21) seraient en défaut, comme cela résulte aisément des (21').

4.7.1. Remarque. Lorsque l'axiome **G**3' (4.5) est en puissance (à la place de l'axiome **G**3) on a le théorème suivant, qu'on démontre de la même manière:

Dans tout domaine rieszien entier, satisfaisant à la condition des chaînes ascendantes, chaque élément est produit(4) *d'un nombre fini de facteurs premiers.*

4.8. Définition. *Soit $\mathfrak{G}$ un domaine noethérien entier satisfaisant à la condition des chaînes ascendantes et soit $a \in \mathfrak{G}$. J'appelle radical algébrique de a et je dénote par $\varrho(a)$ la fonction (généralement multivoque)*

$$\varrho(a) = \bigwedge (\mathscr{P} \cap (1/a)), \qquad a \in \mathfrak{G}, \tag{22}$$

cf. 1.5.4 et 4.4.

(4) J'attire, une fois pour toutes, l'attention du lecteur au fait que la multiplication dans $\mathfrak{G}$ n'étant pas nécessairement associative (ni commutative), les produits de n facteurs, $n \geqq 3$, ne sont déterminés qu'à une certaine association des facteurs près; c'est le sens de la notation $[x_1 x_2 \ldots x_n]$, $x_i \in \mathfrak{G}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geqq 3$, que j'emplois dans le texte et que j'utiliserai partout, dans le cas non nécessairement associatif.

4.8.1. Par *radical impropre* de $a \in \mathfrak{G}$ j'entends la fonction (toujours multivoque, en général)

$$\tilde{\varrho}(a) = \left(\bigwedge (\mathscr{P} \cap (1/a))\right)_a, \qquad a \in \mathfrak{G}. \tag{22'}$$

Le radical algébrique (4.8) est complétement caracterisé par les propriétés suivantes.

4.9. Définition. *L'ensemble $\mathfrak{G}$ étant un domaine noethérien arbitraire, j'appellerai radical algébrique de $a \in \mathfrak{G}$ toute fonction $\sigma(a)$ (généralement multivoque, aux arguments et) aux valeurs dans $\mathfrak{G}$, jouissant des trois propriétés suivantes:*

(1) *Pour tous les $r, r' \in \sigma(a)$ tels que $r' \leqq r$, on a $r' = r$.*

(2) *Pour chaque $r \in \sigma(a)$ on a $[rr\ldots r] \leqq a$ pour un nombre fini de facteurs, tous égaux à r* (4).

(3) *Il existe une partie $\Sigma(a) \subseteq \mathfrak{G}$ telle que $\varrho(a) \subseteq \Sigma(a) \subseteq \mathscr{P}(a)$ et telle, que pour tout $x \in \Sigma(a)$ il existe $r \in \sigma(a)$ satisfaisant a $x \leqq r$ (Ici $\mathscr{P}(a)$ dénote l'ensemble de tous les $x \in \mathfrak{G}$ tels que $[xx\ldots x] \leqq a$* (4)) (Cf. 4.11, (1), (2)).

4.10. Remarques. 1. L'ensemble $\varrho(a)$ défini à (22) n'est jamais vide; il en est de même de l'ensemble $\tilde{\varrho}(a)$ défini à (22') et l'on a $\tilde{\varrho}(a) \subseteq \varrho(a)$ pour tout $a \in \mathfrak{G}$.

Au cas où l'ensemble $\varrho(a)$, $a \in \mathfrak{G}$, n'a qu'*un seul* élément, on dira, que a est un *élément à radical* ou *R-élément*, dont les éléments quasiprimaires (cf. plus loin 8) fournissent un important exemple.

Au cas, enfin, où c'est l'ensemble $\tilde{\varrho}(a)$, $a \in \mathfrak{G}$, qui a un seul élément, on dira que a est à *radical restreint*.

2. Si $\mathfrak{G}$ est un $\wedge$-demitreillis complet, la formule (22) coïncide, à très peu près, avec l'une des définitions bien connues de la notion classique de radical, cf. par exemple [5], § 11.

3. Les propriétés (1)–(3) de 4.9 rappellent la définition ordinaire de la notion classique de radical, sauf que $r \in \sigma(a)$, n'est plus ici, en général, élément maximum mais seulement élément maximal parmi les $x \in \mathfrak{G}$ satisfaisant à (3) de 4.9

4. Je fais remarquer enfin que, dans les définitions 4.8, 4.8.1 on aurait pu se passer de la supposition des chaînes ascendantes, moyennant la supposition moins exigeante, que $\mathfrak{G}$ soit u $\wedge$-demimultitreillis complet. Mais alors nombre de propriétés importantes du radical $\varrho(a)$, particulièrement celles-là qui rapproche le plus cette notion du radical au sens classique, seraient apparemment en défaut; en tout cas, les techniques suivantes (4.11) et qui y conduisent, ne sont plus applicables. Cf. toutefois 6.15.

Le théorème suivant donne les principales propriétés des fonctions $\varrho(a)$, $\tilde{\varrho}(a)$, $\sigma(a)$, $a \in \mathfrak{G}$.

4.11. Théorème. *Soit $\mathfrak{G}$ un domaine noethérien entier, satisfaisant à la condition des chaînes ascendantes. Alors:*

(1) *La fonction $\varrho(a)$, $a \in \mathfrak{G}$ jouit des propriétés* (1)–(3) *de* **4.9.**

(2) *Pour chaque radical algébrique $\sigma(a)$, $a \in \mathfrak{G}$, on a $\sigma(a) = \varrho(a)$ quel que soit $a \in \mathfrak{G}$.*

(3) *Pour tout $a \in \mathfrak{G}$ il existe un $r \in \varrho(a)$, tel que $a \leqq r$. En fait, on a $a \leqq r$ pour chaque $r \in \tilde{\varrho}(a) \subseteq \varrho(a)$.*

(4) *Pour tout $a \in \mathfrak{G}$ il existe un $r \in \mathscr{S}(a)$ tel que $\varrho(r) = \varrho(a)$.*

(5) *Pour tous les $a, b \in \mathfrak{G}$ tels que $a \geqq b$ et chaque $y \in \varrho(b)$, il existe un $x \in \varrho(a)$ tel que $x \geqq y$.*

(6) *Pour tous les $a, b, c, r \in \mathfrak{G}$ tels que $ab \leqq r$, $a \nleqq r$, $b \nleqq r$, $r \in \tilde{\varrho}(c)$, il existe des éléments $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{G}$ tels que $\overline{ab} \leqq c$, $\bar{a} > r$, $\bar{b} > c$, pourvu, toutefois, que la multiplication soit associative. (Par contre, l'associativité de la multiplication n'est pas requise par les (1)–(5) ci-dessus.)*

Démonstration. Ad (1). La propriété (1) de 4.9 vaut pour la fonction $\varrho(a)$, $a \in \mathfrak{G}$, comme cela résulte immédiatement de la définition (22) et de la définition des $\wedge$-demimultitreillis complets.

La propriété (2) de 4.9 vaut également pour la fonction $\varrho(a)$, $a \in \mathfrak{G}$. En effet, d'après le théorème 4.7, il existe un nombre fini de diviseurs premiers de $a \in \mathfrak{G}$ (supposé < 1, car autrement, la dite propriété est trivialement vérifié)

$$1 \geqq p_i > a, \qquad i = 1, 2, \ldots, k \tag{23}$$

tels que [4]

$$[p_1 p_2 \ldots p_k] \leqq a. \tag{23'}$$

Les (23), (23') entraînent d'après la définition (22) et d'après l'axiome **G1** (l'isotonie!) qu'on a

$$[rr\ldots r] \leqq a \tag{24}$$

pour chaque $r \in \varrho(a)$, attendu que les k facteurs égaux r sont associés dans (24) exactement de la même manière que les facteurs p_i le sont dans (23'). Pour vérifier la propriété (3) de 4.9, soit $x \in \mathfrak{G}$ tel que

$$[xx\ldots x] \leqq a \qquad (k \text{ facteurs } x)\ [4]$$

et soit $p \in \mathscr{P} \cap (1/a)$. Il en résulte qu'on a

$$[xx\ldots x] \leqq p$$

et, par conséquent, $x \leqq p$, pour chaque $p \in \mathscr{P} \cap (1/a)$ [5]. Ceci entraîne à son tour, d'après la définition des $\wedge$-demimultitrillis complets ([22], 1.4, axiome $\mathfrak{MC}2$ et

[5] On applique ici la propriété bien connue suivante des éléments premiers d'un groupoïde partiellement ordonné et qui, dans le cas non-associatif résulte inductivement par „clivages" du produit divisé par p:

$$p \geqq [a_1 a_2 \ldots a_n] \text{ entraîne } p \geqq a_i \text{ pour au moins un } i = 1, 2, \ldots, n.$$

alinéa 1.5.4 du présent travail), qu'on a

$$x \leqq r \in (\wedge \mathscr{P} \cap (1/a))_x \subseteq \varrho(a)$$

(cf. 1.4) et ceci achève la vérification par $\varrho(a)$ des propriétés (1)–(3) de 4.9.

Ad (2). Soit $r \in \sigma(a)$, $a \in \mathfrak{G}$. D'après la propriété (2) de 4.9, il existe un nombre naturel k tel que $[rr\ldots r] \leqq a$ (k facteurs égaux à r). Il en résulte (exactement comme ci-dessus pour $x \in \mathfrak{G}$) qu'on a

$$r \leqq r^* \qquad \text{pour un certain} \quad r^* \in \varrho(a). \tag{25}$$

Or, puisque, d'après ce qu'on vient de démontrer (cf. Ad (1) ci-dessus, (24)) la fonction $\varrho(a)$ vérifie la propriété (2) de 4.9, il y aura un nombre naturel k^* tel que

$$[r^* r^* \ldots r^*] \leqq a \qquad (k^* \text{ facteurs } r^*)$$

ce qui, *d'après la propriété* (3) *de* 4.9 entraîne l'existence d'un $r' \in \sigma(a)$ tel que $r^* \leqq r'$, ce qui, d'après (25) donne

$$r \leqq r^* \leqq r' \tag{26}$$

pour chaque $r \in \sigma(a)$ et pour certains $r^* \in \varrho(a)$ et $r' \in \sigma(a)$, dépendant de $r \in \sigma(a)$.

Comme les (26) entraînent $r \leqq r'$, on tire de la propriété (1) de 4.9 l'égalité $r = r'$, laquelle réduit les (26) à $r = r^* = r'$. Ainsi, tout $r \in \sigma(a)$ est un $r \in \varrho(a)$, cela veut dire $\sigma(a) \subseteq \varrho(a)$, $a \in \mathfrak{G}$, comme cela devait être. On montre, de même, que $\varrho(a) \subseteq \sigma(a)$, donc finalement $\varrho(a) = \sigma(a)$.

Ad (3). C'est trivial.

Ad (4). Je vais faire voir d'abord, qu'on a toujours

$$\mathscr{P} \cap (1/r) = \mathscr{P} \cap (1/a), \qquad a \in \mathbf{G}, \qquad r \in \tilde{\varrho}(a) \tag{27}$$

et vérifier, à cet effet, la formule

$$P(a) = (\mathscr{P} \cap (1/a))^+ \tag{28}$$

où $P(a)$ est l'ensemble de tous les $x \in \mathfrak{G}$ vérifiant la propriété (3) de 4.9, alors que $(\mathscr{P} \cap (1/a))^+$ signifie l'ensemble de tous les minorants de $\mathscr{P} \cap (1/a)$. [6]

Or, soit $x \in P(a)$, cela veut dire $[xxx\ldots x] \leqq a$ donc $x \leqq p$ pour chaque $p \in \mathscr{P} \cap (1/a)$, cf. ci-dessus. Ainsi:

$$P(a) \subseteq (\mathscr{P} \cap (1/a))^+. \tag{28'}$$

Réciproquement, $x \in (\mathscr{P} \cap (1/a))^+$ signifie $x \leqq p$ pour chaque $p \in \mathscr{P} \cap (1/a)$, $1 \geqq p \geqq a$. D'après 4.7, on a d'autre part

$$a \geqq [p_1 p_2 \ldots p_k]$$

[6] On a toujours $a \in P(a)$ et $a \in (\mathscr{P} \cap (1/a))^+$, $a \in \mathfrak{G}$.

pour quelques $p_i \in \mathscr{P} \cap (1/a)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ en nombre fini. Il en résulte d'après $x \leqq p$, $p \in \mathscr{P} \cap (1/a)$, et daprès l'axiome **G1**, l'inégalité $a \geqq [xx\ldots x]$, laquelle prouve qu'on a bien

$$(\mathscr{P} \cap (1/a))^+ \subseteq P(a). \tag{28''}$$

Les (28′), (28″) entraînent la (28).

Je démontre maintenant la (27). On a évidemment.

$$\mathscr{P} \cap (1/a) \supseteq \mathscr{P} \cap (1/r), \qquad r \in \tilde{\varrho}(a). \tag{27'}$$

Réciproquement, on a

$$\mathscr{P} \cap (1/a) \subseteq \mathscr{P} \cap (1/r), \qquad r \in \tilde{\varrho}(a). \tag{27''}$$

En effet, on a $\varrho(a) \subseteq (\mathscr{P} \cap (1/a))^+ = P(a)$, $a \in \mathfrak{G}$, donc $a \geqq [rr\ldots r]$ pour chaque $r \in \varrho(a)$ et par suite ([5]) $p \geqq r$ pour chaque $p \in \mathscr{P} \cap (1/a)$. Ainsi tout $p \in \mathscr{P} \cap (1/a)$ est un $p \in \mathscr{P} \cap (1/r)$, $r \in \varrho(a)$, ce qui n'est que la (27″). En prenant $r \in \tilde{\varrho}(a)$ dans les (27′), (27″) on obtient la (27). Cette dernière entraîne maintenant, d'après (22), $\varrho(r) = \varrho(a)$, $r \in \tilde{\varrho}(a) \subseteq \varrho(a)$, $a \in \mathfrak{G}$, et c'est précisément ce qu'il fallait démontrer.

Ad (5). Il suffit de remarquer que $a, b \in \mathfrak{G}$ tels que $a \geqq b$, entraînent $(1/a) \subseteq (1/b)$ donc aussi $\mathscr{P} \cap (1/a) \subseteq \mathscr{P} \cap (1/b)$, donc $(\mathscr{P} \cap (1/b))^+ \subseteq (\mathscr{P} \cap (1/a))^+$ cela veut dire, d'après (28), $P(b) \subseteq P(a)$. Or, $\varrho(b) \subseteq P(b)$ donc $\varrho(b) \subseteq P(a)$. Pour chaque $y \in \varrho(b)$, on aura donc $y \in P(a) = (\mathscr{P} \cap (1/a))^+$ et par conséquent, il y aura, d'après la définition des $\wedge$-demimultitreillis complets, un $x \in \varrho(a) = \bigwedge(\mathscr{P} \cap (1/a))$, tel que $x \geqq y$.

Ad (6). On a, d'après l'axiome **G3**,

$$\begin{gathered} a^* \geqq a, \qquad a^* \geqq r, \\ b^* \geqq b, \qquad b^* \geqq r, \\ a^*b^* \leqq r, \end{gathered} \tag{29}$$

où, à cause des $a \nleqq r$ et $b \nleqq r$, on doit prendre

$$a^* > r, \qquad b^* > r, \tag{30}$$

ce qui entraîne, en particulier, vu que $r \in \tilde{\varrho}(c)$, les inégalités

$$a^* > c, \qquad b^* > c. \tag{30'}$$

Or, d'après la troisième ligne des (29), il y aura un nombre naturel $k > 1$ tel que (la multiplication étant associative)

$$(a^*b^*)^k \leqq c, \qquad (a^*b^*)^{k-1} \nleqq c. \tag{31}$$

(Au cas où $k = 1$, on obtiendra la conclusion requise, en posant simplement $\bar{a} = a^*$, $\bar{b} = b^*$).

On aura alors

$$a^*b^*(a^*b^*)^{k-1} \leqq c \tag{32}$$

et l'on pourra distinguer deux cas selon que

$$b^*(a^*b^*)^{k-1} \nleqq c \tag{32'}$$

ou que

$$b^*(a^*b^*)^{k-1} \leqq c. \tag{32''}$$

Si l'on a la (32′), alors, en posant

$$y = b^*(a^*b^*)^{k-1}$$

on aura évidemment, d'après (32), (32′)

$$a^*y \leqq c, \qquad y \leqq b^*, \qquad y \nleqq c. \tag{33}$$

Si, par contre, on a (32″), alors, en posant

$$x = (a^*b^*)^{k-1}$$

on aura, d'après la deuxième des (31),

$$b^*x \leqq c, \qquad x \leqq a^*, \qquad x \nleqq c. \tag{33'}$$

Dans tous les cas, on aura de la sorte, déterminé deux éléments $a^{**}, b^{**} \in \mathfrak{G}$ tels que d'après les (33) ou les (33′), on ait, compte tenu aussi des (30),

$$a^{**}b^{**} \leqq c, \qquad a^{**} > r, \qquad b^{**} \nleqq c. \tag{34}$$

(On a notamment $a^{**} = a^*$ et $b^{**} = y$ dans le cas (32′) et $a^{**} = b^*$ et $b^{**} = x$ dans le cas (32″)).

On tire maintenant des (34), moyennant l'axiome **G3**, les inégalités

$$\begin{gathered} \bar{a}\bar{b} \leqq c, \\ \bar{a} \geqq a^{**}, \qquad \bar{a} \geqq c, \\ \bar{b} \geqq b^{**}, \qquad \bar{b} \geqq c \end{gathered}$$

lesquelles fournissent, moyennant les (34), la conclusion désirée. Ceci achève la démonstration du théorème 4.11.

§ 5. THÉORIE DES RÉSIDUELS, PREMIÈRE PARTIE

5.1. Définition. *J'appelle domaine divisionnaire tout groupoïde partiellement ordonné quasientier* (4.1, *axiome* **G1** *et* 4.2, *axiome* **G2**), *satisfaisant à l'axiome suivant de résiduation:*

G3*. *Pour tous les* $a, b \in \mathfrak{G}$ *il existe un élément* $q^+ = a \mathbin{\dot{.}} b \in \mathfrak{G}$ *(le résiduel à droite de* a *par* b*) et un élément* $q^- = a \mathbin{\dot{}\!.} b \in \mathfrak{G}$ *(le résiduel à gauche de* a *par* b*)*

tels que: (1) $bq^+ \leqq a$ *et* $q^- b \leqq a$, (2) *Pour chaque* $x \in \mathfrak{G}$ *tel que* $bx \leqq a$ $(xb \leqq a)$, *on a* $x \leqq q^+$ $(x \leqq q^-)$.

5.1.1. Un domaine divisionnaire est donc caractérisé par les axiomes G1, G2, G3*.

Un domaine divisionnaire sera dit *entier*, si l'axiome G2′ (4.2.1) est en puissance (à la place de G2).

5.2. Définition. *Je dirai qu'un domaine divisionnaire jouit de la propriété* (Φ'') *à droite, lorsque pour tous les* $a, b \in \mathfrak{G}$ *tels que* $a \leqq b$, *il existe des éléments* $\bar{b}, c \in \mathfrak{G}$ *tels que* $b \leqq \bar{b} \leqq a \,{}^{\cdot}\!.\, (a \,.\!{}^{\cdot}\, b)$ *et* $a = \bar{b}c$.

Pareillement pour *propriété* (Φ'') *à gauche.*

Cette propriété (Φ'') à droite ou à gauche généralise une propriété classique bien connue, cf. par exemple [5] page 183, propriété (Φ''). Par ailleurs, la propriété (Φ''), comme je vais le montrer un peu plus loin, est intimement liée à la propriété de décomposition de F. Riesz (4.5, axiome G3′).

5.3. Théorème. *Tout domaine divisionnaire est un domaine noethérien.*

Démonstration. Il s'agit de prouver que l'axiome G3 (4.2) y est en puissance. Soit donc $\mathfrak{G}$ un domaine divisionnaire et soient $a, b, c \in \mathfrak{G}$ tels que $c \geqq ab$. On en tire, d'après l'axiome G3*, $c \,{}^{\cdot}\!.\, b \geqq a$ et, en posant

$$c \,{}^{\cdot}\!.\, b = a^*, \tag{35}$$

on aura d'après le propriétés élémentaires des résiduels (cf., par exemple, [31], II-ème partie, Chap. II)

$$a^* \geqq a, \qquad a^* \geqq c. \tag{36}$$

De (35) je tire encore, toujours par les propriétés élémentaires des résiduels

$$c \,.\!{}^{\cdot}\, a^* = c \,.\!{}^{\cdot}\, (c \,{}^{\cdot}\!.\, b) \geqq b$$

et, en posant

$$c \,.\!{}^{\cdot}\, a^* = b^* \tag{35'}$$

j'aurai encore

$$b^* \geqq b, \qquad b^* \geqq c \tag{36'}$$

ainsi que

$$c \geqq a^* b^* \tag{37}$$

que je tire de (35′).

Les relations (36), (36′), (37) (ensemble avec (35), (35′)) prouvent l'assertion de théorème.

5.4. Théorème. *Dans tout domaine divisionnaire la propriété* (Φ'') *à droite équivaut à l'axiome* G3′ (4.5).

Démonstration. Je prouve d'abord que

$$\text{G3}' \Rightarrow (\Phi''). \tag{38}$$

Soit donc $\mathfrak{G}$ un domaine divisionnaire où l'axiome G3′ est en puissance et soient $a, b \in \mathfrak{G}$ tels que $a \leqq b$. J'en déduis, d'après G3*, qu'on a $a \geqq b(a \,.\!{}^{\cdot}\, b)$, d'où je tire, en appliquant l'axiome G3′, l'existence d'éléments $\bar{b}, c \in \mathfrak{G}$ tels que

$$\bar{b} \geqq b, \qquad c \geqq a \,.\!{}^{\cdot}\, b, \tag{39}$$

$$a = \bar{b}c. \tag{39'}$$

Or, la (39′) donne, toujours d'après G3*

$$\bar{b} \leqq a \,{}^{\cdot}\!.\, c \leqq a \,{}^{\cdot}\!.\, (a \,.\!{}^{\cdot}\, b)$$

(d'après la deuxième des (39), compte tenu des propriétés élémentaires des résiduels).

Ainsi les relations $a, b \in \mathfrak{G}$, $a \leqq b$, entraînent l'existence d'éléments $\bar{b}, c \in \mathfrak{G}$ tels que $b \leqq \bar{b} \leqq a \,{}^{\cdot}\!.\, (a \,.\!{}^{\cdot}\, b)$, $a = \bar{b}c$; c'est dire qu'on a (38).

Je prouve maintenant que

$$(\Phi'') \Rightarrow \text{G3}'. \tag{40}$$

Soient donc $a, b, c \in \mathfrak{G}$ tels que $c \geqq ab$. J'en déduis d'après 5.3, les relations

$$a^* \geqq a, \qquad a^* \geqq c,$$

$$b^* \geqq b, \qquad b^* \geqq c, \qquad c \geqq a^* b^*,$$

où $a^*, b^* \in \mathfrak{G}$ sont définis par les (35), (35′).

Or, de $c \leqq a^*$ je tire, en appliquant la propriété (Φ''), l'existence d'éléments $\bar{a}, f \in \mathfrak{G}$ tels que

$$a^* \leqq \bar{a} \leqq c \,{}^{\cdot}\!.\, (c \,.\!{}^{\cdot}\, a^*), \tag{41}$$

$$c = \bar{a}f. \tag{41'}$$

Les (41) entraînent, d'après les propriétés élémentaires des résiduels,

$$c \,.\!{}^{\cdot}\, a^* = c \,.\!{}^{\cdot}\, \bar{a} \tag{41''}$$

d'où je tire, compte tenu de (35′), $b^* = c \,.\!{}^{\cdot}\, \bar{a}$, ce qui entraîne

$$c \geqq \bar{a} b^*. \tag{42}$$

Maintenant, je dis qu'on a

$$b^* \geqq f. \tag{43}$$

En effet, d'après (41′), on a $f \leqq c \,.\!{}^{\cdot}\, \bar{a}$ donc, d'après (41″) et (35′), on aura bien la (43). On en déduit, compte tenu des (41′), (42)

$$c \geqq \bar{a} b^* \geqq \bar{a} f = c$$

c'est-à-dire

$$c = \bar{a} b^*$$

où, *d'après* (41) *et* (36), on a $\bar{a} \geqq a$ et où, *d'après* (36′), on a $b^* \geqq b$. Ceci achève la démonstration de (40).

Les (38), (40) prouvent l'assertion du théorème.

5.4.1. **Corollaire.** *Dans tout domaine divisionnaire la propriété* (Φ'') *à droite équivaut à la propriété* (Φ'') *à gauche.*

Démonstration. C'est que chacune de ces propriétés (Φ'') équivaut d'après 5.4, à la propriété de décomposition de F. Riesz (alias axiome **G3**').

C'est pourquoi, je ne distinguerai plus, désormais, entre la propriété (Φ'') à droite et la propriété (Φ'') à gauche.

5.4.2. **Corollaire.** *Dans tout domaine divisionnaire entier* (5.1.1), *satisfaisant à la propriété* (Φ'') *et à la condition des chaînes ascendantes, vaut le théorème de décomposition* 4.7.1. *Si, de plus, la multiplication est associative et commutative, il y a un élément unité* (= *l'élément 1 du domaine*).

Démonstration. La première partie du corollaire résulte de 5.4, la deuxième résulte de la proposition suivante, que je me contente de formuler sans démonstration:

Lemme. *Soit* $\mathfrak{G}$ *un domaine divisionnaire entier, satisfaisant à la propriété* (Φ''). *Pour chaque élément premier* (4.3) $p \in \mathfrak{G}$ *on a alors* $1p = p$ *ou* $p1 = p$.

5.4.3. *Plus généralement, dans tout domaine divisionnaire entier et satisfaisant à la condition des chaînes ascendantes,* vaut le théorème de divisibilité 4.7, – comme cela résulte de 5.3.

5.5. Pour clore ce §, je mentionne encore, toujours sans démonstration, les propriétés suivantes, bien connues dans le cas des treillis résidués:

Théorème 1. *Si le domaine divisionnaire* $\mathfrak{G}$ *est un* $\wedge$*-demimultitreillis* ([17], 1.1, *axiome* **M2**) *et si* $a, b, c \in \mathfrak{G}$ *sont tels que* $a \wedge b \neq \emptyset$, *on a alors aussi* $(a \mathbin{.^{\cdot}} c) \wedge \wedge (b \mathbin{.^{\cdot}} c) \neq \emptyset$ *et* $(a \mathbin{.^{\cdot}} c) \wedge (b \mathbin{.^{\cdot}} c) \subseteq (a \wedge b) \mathbin{.^{\cdot}} c$ (*attendu que* $(a \wedge b) \mathbin{.^{\cdot}} c$ *soit l'ensemble de tous les* $x \mathbin{.^{\cdot}} c$ *pour* $x \in (a \wedge b)$.

Théorème 2. *Si le domaine divisionnaire* $\mathfrak{G}$ *est un multitreillis tel que pour tous les* $x, y, z \in \mathfrak{G}$ *satisfaisant à* $x \vee y \neq \emptyset$, *on ait*

(*) $\emptyset \neq zx \vee zy \subseteq z(x \vee y)$, $\quad \emptyset \neq xz \vee yz \subseteq (x \vee y)\, z$,

alors, pour tous les $a, b, c \in \mathfrak{G}$ *tels que* $a \vee b \neq \emptyset$, *on a* $(c \mathbin{.^{\cdot}} a) \wedge (c \mathbin{.^{\cdot}} b) \neq \emptyset$ *et* $(c \mathbin{.^{\cdot}} a) \wedge (c \mathbin{.^{\cdot}} b) \subseteq c \mathbin{.^{\cdot}} (a \vee b)$, – *attendu que* $c \mathbin{.^{\cdot}} (a \vee b)$ *soit l'ensemble de tous les* $c \mathbin{.^{\cdot}} x$ *pour* $x \in a \vee b$.

Théorème 3. *Si le domaine divisionnaire entier* $\mathfrak{G}$ *est un multitreillis satisfaisant à loi* (*) *ci-dessus, alors, pour chaque couple* $a, b \in \mathfrak{G}$, *il y a un* $d \in a \vee b$ *et un* $m \in a \wedge b$ *tels que* $a \mathbin{.^{\cdot}} d = m \mathbin{.^{\cdot}} b = a \mathbin{.^{\cdot}} b$. [7]

[7] On a toujours $a \vee b \neq \emptyset$, car $\mathfrak{G}$ est entier, et comme tel, a un dernier élément 1 (cf. l'axiome **G2**'), et l'on a également $a \wedge b \neq \emptyset$, car $\mathfrak{G}$ est quasientier (axiome **G2**).

6.1. Définition. *Soit* $\mathfrak{G}$ *un domaine divisionnaire quelconque et* $a, b \in \mathfrak{G}$. *Le résiduel* $a \mathbin{.^{\cdot}} b$ (*où* $a \mathbin{^{\cdot}.} b$) *sera dit propre, lorsque* $a \ngeq b$. Cf. [5], I.

6.2. Un domaine divisionnaire $\mathfrak{G}$ sera dit *associatif à droite,* lorsque l'axiome suivant y est en puissance.

G4. Pour tous les $a, b, c \in \mathfrak{G}$ on a $ab \,.\, c \leqq a \,.\, bc$. [8]

De même pour associatif a gauche. Un domaine divisionnaire qui est associatif à droite et à gauche, est associatif au sens ordinaire du mot.

Tout domaine divisionnaire associatif à droite, qui est commutatif, est par là-même, associatif à gauche, donc associatif.

Les deux propriétés suivantes, ainsi que leurs démonstrations subsistent pour tout domaine divisionnaire, cf. [5], propriété 1.1 et lemme 1.1:

6.3. Lemme. *Dans tout domaine divisionnaire* $\mathfrak{G}$:

(1) *Pour que* $x \in \mathfrak{G}$ *soit résiduel à droite propre de* $a \in \mathfrak{G}$, *il faut et il suffit qu'on ait* $x = a \mathbin{.^{\cdot}} (a \mathbin{^{\cdot}.} x)$ *et* $a \mathbin{^{\cdot}.} x > a$. *De même, pour que* $x \in \mathfrak{G}$ *soit résiduel à gauche propre de* $a \in \mathfrak{G}$, *il faut et il suffit que* $x = a \mathbin{^{\cdot}.} (a \mathbin{.^{\cdot}} x)$ *et* $a \mathbin{.^{\cdot}} x > a$.

(2) *Si la condition* (*affaiblie, cf.* [5], *Introduction*) *des chaînes descendantes est satisfaite par* **G**, *toute chaîne ascendante de résiduels (à droite) d'un même élément* $a \in \mathfrak{G}$, *n'a qu'un nombre fini de termes.* Pareillement pour „à gauche".

6.4. Définition. *Je dirai qu'un domaine divisionnaire* $\mathfrak{G}$ *satisfait à la condition* (**RPP**) *à gauche, lorsqu'on a*

(**RPP**) *Chaque élément* $a \in \mathfrak{G}$, $a < 1$, *admet au moins un résiduel à gauche propre* (6.1), *premier* (*c'est-à-dire, qui, en tant qu'élément de* $\mathfrak{G}$, *y est premier* (4.3)).

Je vais indiquer plus loin des cas importants où l'axiome d'existence (**RPP**) est vérifié.

6.5. Lemme. *Dans tout domaine divisionnaire* $\mathfrak{G}$ *associatif à droite, on a* $(a \mathbin{.^{\cdot}} b) \mathbin{.^{\cdot}} c \leqq \leqq a \mathbin{.^{\cdot}} bc$ *pour tous les* $a, b, c \in \mathfrak{G}$.

Démonstration. D'après l'axiome **G4** il vient en effet

$$(bc)\,((a \mathbin{.^{\cdot}} b) \mathbin{.^{\cdot}} c) \leqq b[c((a \mathbin{.^{\cdot}} b) \mathbin{.^{\cdot}} c)] \leqq b(a \mathbin{.^{\cdot}} b) \leqq a,$$

d'où l'assertion du lemme.

[8] Cette notion a évidemment un sens pour tout groupoïde partiellement ordonné.

Je fais remarquer ici, que des lois d'associativité, plus faibles que l'associativité ordinaire, ont été déjà depuis longtemps proposées par différents Auteurs, cf. par exemple [9], pour la théorie des anneaux généralisés et [20], pour la théorie des quasi-anneaux. Cependant, aucune de ces lois n'est requise, ni ne saurait s'insérer d'une manière naturelle dans le présent travail, car ces lois, aussi bien que les techniques qu'elles engendrent, font essentiellement intervenir les éléments de l'anneau généralisé (du quasi-anneau) fondamental.

6.5.1. En fait, l'assertion du lemme est rigoureusement équivalente à l'axiome **G4**, cf. à ce sujet Molinaro [13].

6.6. Nous allons dorénavant supposer, sauf avis exprès du contraire, que $\mathfrak{G}$ est un domaine divisionnaire *entier* (5.1.1, 4.2.1), *associatif à droite* (6.2), satisfaisant à la *condition* **(RPP)** *à gauche* (6.4) et à la *condition (affaiblie) des chaînes descendantes.*

6.7. Lemme. *Sous les suppositions de* 6.6, *chaque élément* $a \in \mathfrak{G}$, $a < 1$, *admet au moins un résiduel à droite, propre premier.*

Démonstration. L'enseble des résiduels à droite propre de a n'est pas vide, car, puisque $a < 1$, $a \,.^{\cdot}\, 1$ en est un tel. D'après 6.3, (2), il y aura donc aussi au moins un résiduel à droite, propre, maximal de a, soit $p = a \,.^{\cdot}\, b$, $a \not\geqq b$ (6.1), il s'agit de prouver que $p \in \mathfrak{G}$ est premier.

Si, en effet, p n'était pas premier, il y aurait $x, y \in \mathfrak{G}$ tels que $p \geqq xy$, $p \not\geqq x$, $p \not\geqq y$. Comme $p \,.^{\cdot}\, x \geqq p$, il faut que $p \,.^{\cdot}\, x > p$, sans quoi, on aurait déjà $p \,.^{\cdot}\, x = p$, ce qui, d'après $p \,.^{\cdot}\, x \geqq y$ et $p \not\geqq y$, ne peut être. Or, on a $p < p \,.^{\cdot}\, x = (a \,.^{\cdot}\, b) \,.^{\cdot}\, x \leqq$ $\leqq a \,.^{\cdot}\, bx$ (d'après 6.5), donc

$$p < a \,.^{\cdot}\, bx \tag{44}$$

et je dis que $a \,.^{\cdot}\, bx$ est un résiduel propre de a. Car, à supposer que $a \geqq bx$, on en tirerait $p = a \,.^{\cdot}\, b \geqq x$, ce qui n'est pas.

D'après la (44), $p = a \,.^{\cdot}\, b$, $a \not\geqq b$, ne serait donc pas maximal, ce qui est une contradiction.

6.8. Lemme. *Chaque résiduel à gauche, propre, premier de* $a \in \mathfrak{G}$, $a < 1$, *soit* p *un tel, est encore résiduel à gauche, propre, premier de* $a \,.^{\cdot}\, b$, *attendu que* $p \not\geqq b$ *(les suppositions pour* $\mathfrak{G}$ *étant celles de* 6.6).

Démonstration. Je définis, d'après M. Lesieur [5], § I,

$$x = (a \,.^{\cdot}\, b) \,{}^{\cdot}.\, ((a \,.^{\cdot}\, b) \,.^{\cdot}\, p)$$

et j'en tire, par les propriétés élémentaires des résiduels, l'inégalité

$$x \geqq p \tag{45}$$

puis, par la même raison, l'égalité

$$(a \,.^{\cdot}\, b) \,.^{\cdot}\, x = (a \,.^{\cdot}\, b) \,.^{\cdot}\, p. \tag{45'}$$

Or, d'après 6.5, on a

$$(a \,.^{\cdot}\, b) \,.^{\cdot}\, x \leqq a \,.^{\cdot}\, bx$$

et, d'après les propriétés élémentaires des résiduels, on a également

$$(a \,.^{\cdot}\, b) \,.^{\cdot}\, p \geqq a \,.^{\cdot}\, p \qquad \text{(vu que } a \,.^{\cdot}\, b \geqq a!);$$

il viendra donc, compte tenu de la (45')

$$a \,.^{\cdot}\, bx \geqq a \,.^{\cdot}\, p$$

ce qui entraîne, toujours par les propriétés élémentaires des résiduels:

$$bx \leqq a \,{}^{\cdot}.\, (a \,.^{\cdot}\, bx) \leqq a \,{}^{\cdot}.\, (a \,.^{\cdot}\, p)$$

donc enfin, d'après 6.3, (1),

$$p \geqq bx.$$

On en tire, puisque p est premier et que $p \not\geqq b$ (par hypothèse),

$$p \geqq x,$$

ce qui, vis-à-vis de (45), prouve que $x = p$ c'est-à-dire que p est un résiduel à gauche de $a \,.^{\cdot}\, b$.

Je dis que ce dernier est propre. C'est que l'inégalité

$$(a \,.^{\cdot}\, b) \,.^{\cdot}\, p \geqq a \,.^{\cdot}\, b$$

est toujours stricte, c'est-à-dire, qu'on a

$$(a \,.^{\cdot}\, b) \,.^{\cdot}\, p > a \,.^{\cdot}\, b.$$

Car, si l'on avait $(a \,.^{\cdot}\, b) \,.^{\cdot}\, p = a \,.^{\cdot}\, b$, on en déduirait par les propriétés élémentaires des résiduels et d'après 6.3, (1)

$$a \,.^{\cdot}\, b = (a \,.^{\cdot}\, b) \,.^{\cdot}\, p \geqq a \,.^{\cdot}\, p \qquad \text{(vu que } a \,.^{\cdot}\, b \geqq a!)$$
$$b \leqq a \,{}^{\cdot}.\, (a \,.^{\cdot}\, b) \leqq a \,{}^{\cdot}.\, (a \,.^{\cdot}\, p) = p$$

ce qui, par rapport à $p \not\geqq b$, est une contradiction.

6.9. Lemme. *Sous les suppositions de* 6.6, *chaque élément* $a \in \mathfrak{G}$, $a < 1$, *n'a qu'un nombre fini de résiduels à gauche, propres, premiers.*

Démonstration. Désignons par $[a \,{}^{\cdot}.]$ l'ensemble de tous les résiduels à gauche, propres, premiers de a; d'après la condition **(RPP)** à gauche, cet ensemble n'est pas vide et, d'après le lemme 6.3, (2), il a au moins un élément maximal $p_1 \in [a \,{}^{\cdot}.]$(9). Posons

$$a_1 = a \,.^{\cdot}\, p_1 \tag{46}$$

donc, d'après 6.3, (1), on aura

$$a < a_1. \tag{47}$$

Cela posé, si $[a \,{}^{\cdot}.] - \{p_1\} = \emptyset$, le lemme est démontré, sinon, on a, puisque p_1 est maximal dans $[a \,{}^{\cdot}.]$, $p \not\geqq p_1$, pour chaque $p \in [a \,{}^{\cdot}.] - \{p_1\}$ ce qui, compte tenu

(9) Lequel ne saurait être nécessairement un résiduel (à gauche, propre) maximal, en tant que résiduel à gauche propre, encore que l'ensemble de cas derniers, n'étant pas vide, ait, lui-aussi toujours d'après 6.3, (2), d'éléments maximaux.

de lemme 6.8, entraîne

$$[a\,^{\cdot}.] - \{p_1\} \subseteq [a_1\,^{\cdot}.]. \tag{48}$$

Si donc p_2 est maximal dans $[a\,^{\cdot}.] - \{p_1\}$ (6.3, (2)), on aura, d'après le lemme 6.3, (1)

$$a_1 < a_1 \,.^{\cdot}\, p_2 \tag{49}$$

puis, compte tenu de 6.5 et de (46), on aura encore

$$a_1 \,.^{\cdot}\, p_2 = (a \,.^{\cdot}\, p_1) \,.^{\cdot}\, p_2 \leqq a \,.^{\cdot}\, p_1p_2.$$

En posant alors

$$a_2 = a \,.^{\cdot}\, p_1p_2 \tag{46'}$$

il viendra, d'après (49)

$$a_1 < a_2. \tag{47'}$$

Si donc $[a\,^{\cdot}.] - p_1p_2 = \emptyset$, la démonstration s'achève, sinon, on a $p \ngeqq p_1p_2$ pour chaque $p \in [a\,^{\cdot}.] - \{p_1, p_2\}$. Car, si l'on avait $p \geqq p_1p_2$ pour quelque $p \in [a\,^{\cdot}.] - \{p_1, p_2\}$, il en résulterait $p \geqq p_1$, ou $p \geqq p_2$, ce qui ne peut être, car p_1 est maximal dans $[a\,^{\cdot}.]$, et $p \neq p_1$, alors que p_2 est maximal dans $[a\,^{\cdot}.] - \{p_1\} \supseteq [a\,^{\cdot}.] - \{p_1, p_2\}$ et $p \neq p_2$. On en déduit, d'après 6.8,

$$[a\,^{\cdot}.] - \{p_1, p_2\} \subseteq [a_2\,^{\cdot}.]. \tag{48'}$$

Je considère alors p_3 maximal dans $[a\,^{\cdot}.] - \{p_1, p_2\}$ et je tire du lemme 6.3, (1),

$$a_2 < a_2 \,.^{\cdot}\, p_3 \tag{49'}$$

puis, compte tenu de 6.5 et de (46'),

$$a_2 \,.^{\cdot}\, p_3 = (a \,.^{\cdot}\, p_1p_2) \,.^{\cdot}\, p_3 \leqq a \,.^{\cdot}\, (p_1p_2)p_3.$$

Je pose donc

$$a_3 = a \,.^{\cdot}\, (p_1p_2)p_3 \tag{46''}$$

et j'obtiens, d'après (49'),

$$a_2 < a_3. \tag{47''}$$

Et ainsi de suite. Cette construction peut se faire tant que l'ensemble $[a\,^{\cdot}.] - \{p_1, p_3, \ldots, p_n\}$, n nombre naturel arbitraire, n'est pas vide, et est tel que p_i, $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ soit maximal dans $[a\,^{\cdot}.] - \{p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}\}$, attendu que p_1 soit maximal dans dans $[a\,^{\cdot}.]$ (cf. ci-dessus). Et l'on obtient de la sorte une chaîne (véritablement) ascendante de résiduels à droite (propres) de a

$$(a <)\, a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_i < \ldots$$

$$a_i = a \,.^{\cdot}\, (\ldots((p_1p_2)p_3)p_4 \ldots)p_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

laquelle aurait certainement une infinité de termes distincts deux à deux, si l'ensemble

$[a\,^{\cdot}.] - \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ n'était jamais vide, ce qui d'après 6.3, (2) conduirait à une contradiction. Ceci achève la démonstration.

6.10. Théorème. *Sous les suppositions de 6.6, chaque élément $a \in \mathfrak{G}$, $a < 1$ admet un nombre fini de résiduels à gauche, propres, premiers $p_i \in \mathfrak{G}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (n nombre naturel $\geqq 1$), tels que*

$$a \geqq [\ldots((p_1p_2)p_3)p_4 \ldots]p_n,$$

$$1 \geqq p_i \geqq a, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Démonstration. Conséquence immédiate du lemme 6.9.

Je mentionne enfin, sans démonstration, la proposition suivante dont je n'aurai pas à faire usage dans la suite:

6.11. Lemme. *Sous les suppositions de 6.6, pour que l'on ait $a\,^{\cdot}.\, b = a$ (c'est-à-dire, pour que b soit relativement premier à gauche avec a; $a, b \in \mathfrak{G}$), il faut et il suffit qu'on ait $p \ngeqq b$ pour chaque résiduel à droite propre maximal p de a.*

6.12. La théorie précedente s'applique dans les trois cas suivants, dont le dernier est particulièrement important pour les développements de la partie VII de cette série.

Premier cas. L'ensemble $\mathfrak{G}$ est un domaine divisionnaire entier, associatif et satisfaisant à la condition (affaiblie) des chaînes descendantes.

C'est de cas de la théorie de M. Lesieur [5], sauf que, chez M. Lesieur, $\mathfrak{G}$ est, de plus, supposé réticulé, ce qui n'est d'aucune utilité dans cette théorie. Cf. aussi [6], page 90, Remarque.

Deuxième cas. L'ensemble $\mathfrak{G}$ est un domaine divisionnaire entier, associatif à droite (6.2, axiome **G4**), satisfaisant à la condition affaiblie des chaînes descendantes et à l'axiome suivant:

(LI) (Loi d'itération des résiduels à gauche). *Pour tous les $a, x, y, z \in \mathfrak{G}$ tels que $a \geqq (xy)z$ et $a \ngeqq yz$, il existe un $t \in \mathfrak{G}$ tel que $a \ngeqq t$ et $a \geqq xt$.*

Il s'ensuit aisément, que **(LI)*** *pour tous les $a, b, c \in \mathfrak{G}$ tels que $a \ngeqq cb$, il existe un $d \in \mathfrak{G}$ tel que $a \ngeqq d$ et $(a\,^{\cdot}.\, b)\,^{\cdot}.\, c \leqq a\,^{\cdot}.\, d$,* ce qui suffit pour la vérification de la condition **(RPP)** à gauche (6.4): appliquer simplement la technique de 6.5, en changeant $.^{\cdot}$ contre $^{\cdot}.$ et en y faisant usage de **(LI)***.

Pour décrire le troisième cas, où la théorie précédente s'applique, il faut avoir recours à la notion d'élément essentiel.

6.13. Définition. *Soit $\mathfrak{G}$ un domaine divisionnaire, qui soit en même temps un $\vee$-demimultitreillis* ([17], 1.1, *axiome* $\mathfrak{M}$1). *Je dirai qu'un élément $a \in \mathfrak{G}$ est essentiel à gauche, lorsque pour tous les $x, y, z \in \mathfrak{G}$ tels que $(xa \vee z) \cap (ya \vee z) \neq \emptyset$, on a aussi $(x \vee (z\,^{\cdot}.\, a)) \cap (y \vee (z\,^{\cdot}.\, a)) \neq \emptyset$.*

Pareillement pour „essentiel à droite". Cf. [5], § IX.

6.13.1. **Définition.** *Soit $\mathfrak{G}$ un domaine divisionnaire, qui soit en même temps un $\vee$-demimultitreillis complet* ([22], 1,4, *axiome* $\mathfrak{MC}$1). *Je dirai que le domaine $\mathfrak{G}$ satisfait* *à la condition des éléments essentiels à gauche (condition* (A)*pour abréger), lorsque pour chaque* $x \in \mathfrak{G}$ *il existe un ensemble non vide d'éléments essentiels à gauche* (6,13), $a_i \in \mathfrak{G}$, $i \in \mathcal{I}$ *tels que* $x \in \bigvee_{i \in \mathcal{I}} a_i$ (1.4).

Au cas, où $\mathfrak{G}$ satisfait à la condition (affaiblie) des chaînes descendantes, il est, par là-même, un $\vee$-demimultitreillis complet et la définition 6.13.1 s'y applique toujours, au sens de 1.5.4, 1.6.

6.12.1. Voici maintenant la description du troisième cas annoncé à 6.12.

Troisième cas. L'ensemble $\mathfrak{G}$ est un domaine divisionnaire entier, associatif à droite, satisfaisant à la condition (affaiblie) des chaînes descendantes et à la condition (A) (6.13.1, 1.5.4, 1.6), et tel que $I^2 = I$.

Il s'agit de faire voir que la condition (**RPP**) est alors vérifiée. Soit, à cet effet, $a \in \mathfrak{G}$, $a < I$. D'après la condition affaiblie des chaînes descendantes, il existe $b \in \mathfrak{G}$ tel que $I \geqq b \succ a$. Or, puisque $\mathfrak{G}$ satisfait à la condition (A), on aura

$$b \in \bigvee_{i \in \mathcal{I}} e_i \tag{50}$$

où $e_i \in \mathfrak{G}$, $i \in \mathcal{I}$, sont essentiels à gauche, l'ensemble $\mathcal{I}$ d'indices dépendant de l'élément $b \in \mathfrak{G}$.

Or, je dis qu'il y a un $i_c \in \mathcal{I}$ tel que

$$a \ngeqq e_{i_0}, \tag{51}$$

car, si l'on avait $a \geqq e_i$ pour chaque $i \in \mathcal{I}$, on en déduirait, puisque $\mathfrak{G}$ est un $\vee$-demimultitreillis complet, l'existence d'un $d \in \mathfrak{G}$ te que $a \geqq d \in \bigvee_{i \in \mathcal{I}} e_i$, ce qui par rapport à (50) est une contradiction (cf. [22], 1.4 axiome $\mathfrak{MC}1$).

J'écris $e_{i_0} = e$ pour abréger, et je considère le résiduel à gauche $p = a \,\dot{\cdot}\, e$ (propre, d'après (51)). Or, je dis, que si $p \neq I$, on a

$$I \succ p \tag{52}$$

(si l'on avait $p = I$, p serait déjà premier et il n'y aurait plus rien à démontrer).

En effet, d'après la condition affaiblie des chaînes descendantes, il existe un $x \in \mathfrak{G}$ tel que

$$I \geqq x \succ p \tag{52'}$$

et tout revient à montrer qu'on a

$$x = I. \tag{52''}$$

Or, d'après (50), on a $b \geqq e$ $(= e_{i_0})$, donc $b \geqq xb \geqq xe$ c'est-à-dire $b \geqq xe$ et, comme on a aussi $b \succ a$ et que $\mathfrak{G}$ est un $\vee$-demimultitreillis (même complet), on en déduit l'existence d'un $d \in \mathfrak{G}$ tel que $b \geqq d \in a \vee xe$, ce qui entraîne $b \geqq d \geqq a$. Donc, puisque $b \succ a$, on a ou bien $d = b$, ou bien $d = a$. Si l'on avait $d = a$, on en déduirait $a \geqq xe$ donc $a \,\dot{\cdot}\, e \geqq x$, ce qui est contraire à (52') (car $a \,\dot{\cdot}\, e = p$!). Ainsi, on a $d = b$ et, partant,

$$b \in a \vee xe. \tag{53}$$

D'autre part, on a évidemment $b \geqq e \geqq Ie \geqq xe$, d'où il suit, d'après 1.5.2 et (53), qu'on a également

$$b \in a \vee Ie. \tag{53'}$$

Les (53), (53') entraînent

$$(a \vee xe) \cap (a \vee Ie) \neq \emptyset$$

ce qui entraîne, puisque e est essentiel à gauche (6.13)

$$((a \,\dot{\cdot}\, e) \vee x) \cap ((a \,\dot{\cdot}\, e) \vee I) \neq \emptyset$$

cela veut dire, d'après (52')

$$\{x\} \cap \{I\} \neq \emptyset$$

et ainsi, $x = I$, c'est-à-dire la (52'').

Donc $p = a \,\dot{\cdot}\, e$ est bien maximal et, puisque $I^2 = I$, il est aussi premier (4.6, (1)), ce qui achève la démonstration.

Je fais remarquer expressément que cette démonstration (pas plus, d'ailleurs, que celle du théorème 6.14) n'exige aucune loi d'associativité de la multiplication.

La proposition suivante, se rattachant de près à ce qui précède, joue un grand rôle dans la suite de mes recherches; c'est pourquoi je vais la démontrer ici en quelque détail.

6.14. Théorème. *Soit $\mathfrak{G}$ un domaine divisionnaire entier, satisfaisant à la condition affaiblie des chaînes descendantes et à la condition* (A) *des éléments essentiels à gauche. Tout élément premier* ($\neq I$) *de $\mathfrak{G}$ est alors maximal.* (Cf. [5], lemme 10.1).

Démonstration. Soit $p \in \mathfrak{G}$ premier et $\neq I$, donc $I > p$. D'aprés la condition affaiblie des chaînes descendantes il y aura un $x \in \mathfrak{G}$ tel que

$$I \geqq x \succ p \tag{54}$$

et tout revient à montrer qu'on a

$$x = I. \tag{54'}$$

Or, puisque $\mathfrak{G}$ satisfait à la condition (A), il y aura un ensemble $\{a_i, i \in \mathcal{I}\} \neq \emptyset$ d'éléments essentiel à gauche de $\mathfrak{G}$, tel que

$$x \in \bigvee_{i \in \mathcal{I}} a_i \tag{55}$$

et je dis, qu'on peut trouver un $i_0 \in \mathcal{I}$ tel que

$$p \ngeqq xa_{i_0}. \tag{56}$$

Car, si l'on avait $p \geqq xa_i$ pour chaque $i \in \mathcal{I}$, on en déduirait d'après (54) et puisque p est premier, $p \geqq a_i$ pour tous les $i \in \mathcal{I}$. Il en résulterait, puisque $\mathfrak{G}$ est un $\vee$-demimultitreillie complet, l'existence d'un $x' \in \mathfrak{G}$ tel que $p \geqq x' \in \bigvee_{i \in \mathcal{I}} a_i$, ce qui d'après (55) et (54), conduirait à une contradiction, savoir:

$$x \in \bigvee_{i \in \mathcal{I}} a_i, \quad x' \in \bigvee_{i \in \mathcal{I}} a_i, \quad x > x'.$$

Ainsi, on a bien (56). Je pose, pour abréger, $a_{i_0} = a$ et je tire des (54) la relation

$$x \in xa \vee p. \tag{57}$$

En effet, $\mathfrak{G}$ étant un $\vee$-demimultitreillis complet, est, par là-même, un $\vee$-demimultitreillis et les relations $x > p$, $x \geqq xa$ entraînent alors l'existence d'un $d \in \mathfrak{G}$ tel que

$$x \geqq d \in xa \vee p \tag{57'}$$

donc aussi tel que $x \geqq d \geqq p$. Comme $x \succ p$, ceci entraîne *ou bien* $d = x$ *ou bien* $d = p$. Cette dernière condition est à rejeter, car elle donnerait $p \geqq xa$, contrairement à (56) ($a_{i_0} = a$). Il s'ensuit qu'on a bien la (57).

D'autre part, on a $x \geqq a \geqq 1a \geqq xa$, donc d'après (57) et d'après 1.5.2, on aura aussi

$$x \in 1a \vee p. \tag{58}$$

Les (57), (58) entraînent

$$(xa \vee p) \cap (1a \vee p) \neq \emptyset$$

d'où l'on déduit, a étant essentiel à gauche

$$(x \vee (p \,\dot{\cdot}\, a)) \cap (1 \vee (p \,\dot{\cdot}\, a)) \neq \emptyset. \tag{59}$$

Or, p étant premier et tel que $p \ngeqq a$ (comme cela résulte de (56)), on a, comme on sait, $p \,\dot{\cdot}\, a = p\,(= p \,\dot{\cdot}\, a)$ et la (59) devient alors, compte tenu de (54), $\{x\} \cap \{1\} \neq \emptyset$ cela veut dire $x = 1$, c'est-à-dire la (54').

Ceci achève la démonstration.

6.14.1. **Corollaire.** *Sous les suppositions de* 6.14, *si l'on a, de plus,* $1^2 = 1$, *alors* $\mathcal{P} - \{1\} = \mathcal{M}$ (4.4).

Démonstration. Conséquence immédiate de 4.6, (1), et de 6.14.

6.15. *Conséquences pour la théorie du radical* (§ 4). Supposons que le domaine divisionnaire $\mathfrak{G}$ satisfasse aux conditions requises à 6.6 et à la condition suivante: *$\mathfrak{G}$ est un $\wedge$-demimultitreillis complet.*

Les définitions 4.8 et 4.8.1 ont donc toujours un sens (4.10, remarque 4) et les propriétés de 4.11 subsistent également ainsi que leurs démonstrations.

Pour s'en convaincre, il suffit de tenir compte des remarques suivantes:

Désignons par $\omega(a)$, $a \in \mathfrak{G}$, l'ensemble de tous les éléments premiers $p \in \mathfrak{G}$, divisant a (donc tels que $p \geqq a$) et minimaux en tant que tels (donc tels que $p \geqq p' \geqq a$, $p' \in \mathfrak{G}$ et premier, entraînent $p' = p$). L'ensemble $\omega(a)$ n'est jamais vide (car $\mathfrak{G}$

satisfait à la condition affaiblie des chaînes descendantes) et l'on a

(*) $\qquad \omega(a) \subseteq \mathcal{P} \cap (1/a), \quad a \in \mathfrak{G} \qquad$ (4.4)

(**) Pour chaque $p \in \mathcal{P} \cap (1/a)$ il existe $\bar{p} \in \omega(a)$ tel que l'on ait $p \geqq \bar{p}$.

(***) On a, pour chaque $a \in \mathfrak{G}$

$$\varrho(a) = \Lambda\omega(a),$$
$$\tilde{\varrho}(a) = (\Lambda\omega(a))_a.$$

(****) L'ensemble $\omega(a)$, $a \in \mathfrak{G}$ coïncide avec l'ensemble des résiduels à gauche propres premiers minimaux de a.

Les propriétés (*) et (**) sont triviales. La vérification de (***) n'exige, pour l'essentiel, que la définition des $\wedge$-demimultitreillis complets ([22], 1.4, axiome $\mathfrak{MC}$2). La vérification de (****) exige l'application, deux fois de suite, du théorème 6.10.

Je mentionne, enfin, sans démonstration, la proposition suivante, généralisation partielle du théorème 2.5 de [5], lequel contient lui-même le théorème d'Hopkins, comme cas particulier:

6.16. Théorème. *Soit $\mathfrak{G}$ un domaine divisionnaire associatif, qui soit en même temps un $\wedge$-demimultitreillis complet, satisfaisant à la condition (affaiblie) des chaînes descendantes et ayant un premier élément O. Alors, l'ensemble de tous les $x \in \mathfrak{G}$ tels que $x^k = 0$ ($k = k(x)$ nombre naturel $\geqq 1$) a au moins un élément maximal.*

§ 7. LE THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA DIVISIBILITÉ

7.1. Théorème. *Dans tout domaine divisionnaire entier* (5.1.1) *à élément unité et satisfaisant à la propriété* (Φ'') (5.2), *à la condition* (A) (6.13.1) *et aux conditions des chaînes ascendantes et descendantes (bornées), chaque élément $\neq 1$ de $\mathfrak{G}$ est produit*(4) *d'un nombre fini d'éléments premiers $\neq 1$ et deux telles décompositions d'un même élément $\neq 1$ de $\mathfrak{G}$, ont mêmes facteurs premiers (dont les fréquences et les associations ne sauraient coïncider nécessairement). Si la multiplication est commutative et associative*(10)*, la supposition de l'élément unité peut être omise* (5.4.2).

Démonstration. Résulte de 5.4.2, 6.14, 6.14.1.

7.1.1. Remarque. Je vais montrer dans la partie VII de cette série, comment on peut s'affranchir ici de la supposition des chaînes ascendantes.

§ 8. LE THÉORÈME LASKER-NOETHER

8.1. Définition. *Soit $\mathfrak{G}$ un groupoïde partiellement ordonné* (4.1). *Je dirai qu'un élément $a \in \mathfrak{G}$ est principal à droite, lorsque pour tous les $x, y \in \mathfrak{G}$ tels que $y \leqq ax$, il y a un $x' \in \mathfrak{G}$ tel que $x' \leqq x$ et $y = ax'$.* Cf. [4, 5, 6].

Pareillement pour *principal à gauche.*

(10) Il suffit de supposer qu'elle le soit pour les éléments de $\mathcal{P}$ (4.4).

8.2. Définition. *Soit $\mathfrak{G}$ un groupoïde partiellement ordonné, qui soit en même temps un $\vee$-demimultitreillis complet. Je dirai alors que $\mathfrak{G}$ satisfait à la condition des éléments principaux à droite (ou condition* (**B**), *pour abréger), lorsque pour chaque $x \in \mathfrak{G}$ il existe un ensemble non vide d'éléments principaux à droite $a_i \in \mathfrak{G}$, $i \in \mathscr{I}$, tel que $x \in \bigvee_{i \in \mathscr{I}} a_i$.*

8.3. Lemme. *Dans tout domaine divisionnaire associatif, les propriétés* 8.1 *et* 8.2 *de* [5], VIII, *subsistent entièrement (ainsi que leurs démonstrations), et il en de même de la propriété* 9.1, *ibidem.*

8.4. Définition. *Soit $\mathfrak{G}$ un domaine noethérien satisfaisant à la condition des chaînes descendentes et soit $\mathscr{F} \subseteq \mathfrak{G}$ une partie non vide de $\mathfrak{G}$. Je dirai, qu'un élément $q \in \mathfrak{G}$ est partiellement primaire à droite par rapport à $\mathscr{F}$, ou encore, pour abréger, $\mathscr{F}$-primaire à droite, lorsque pour tous les $f \in \mathscr{F}$ et $x \in \mathfrak{G}$ tels que $fx \leqq q$, $x \nleqq q$, il existe un $r \in \varrho(q)$, tel que $f \leqq r$.* (Pareillement pour „à gauche"). *Pour $\mathscr{F} = \mathfrak{G}$ je dirai simplement élément primaire à droite, au lien de élément $\mathfrak{G}$-primaire à droite, etc.*

Ainsi, les éléments primaires à droite sont *à fortiori* partiellement primaires à droite et les éléments primaires de la théorie habituelle sont évidemment primaires au sens ci-dessus. D'autre part, tout élément primitif au sens suivant est toujours primaire (à droite et à gauche).

Par élément *primitif* j'entends un élément $q \in \mathfrak{G}$ tel, que pour tous les $a, b \in \mathfrak{G}$ satisfaisant à $ab \leqq q$, on ait $a \leqq r$, ou $b \leqq r$ pour chaque $r \in \varrho(q)$. Cf. [3].

La démonstration s'appuie sur le théorème 4.11, (6).

8.5. Définition. *Soit $\mathfrak{G}$ un domaine noethérien arbitraire. Je dirai, comme à l'ordinaire, qu'un élément $p \in \mathfrak{G}$ est quasiprimaire, lorsqu'on a $[ppp\ldots p] \leqq q \leqq p(4)$, k facteurs égaux à $p \in \mathfrak{G}$, p étant premier.*

Tout élément premier est donc quasiprimaire et tout élément fortement primaire à droite est aussi quasiprimaire, pourvu, qu'il soit à radical restreint (4.10, Remarque 1.).

Par élément *fortement primaire à droite*, j'entends ici un élément $p \in \mathfrak{G}$ tel, que pour tous les $a, b \in \mathfrak{G}$ satisfaisants à $ab \leqq q$, $b \nleqq q$, on ait $a \leqq r$ pour quelque $r \in \tilde{\varrho}(q)$.

La démonstration n'offre difficulté.

8.6. Théorème.([11]) *Soit $\mathfrak{G}$ un domaine divisonnaire entier* (5.11), *associatif et satisfaisant, en outre, aux conditions suivantes:*

(i) *$\mathfrak{G}$ est un multitreillis semimodulaire* (2.6);

(ii) *$\mathfrak{G}$ vérifie la condition des chaînes ascendantes.*

([11]) (Ajouté le 22 décembre 1963). Je remercie M. Milan Kolibiar d'avoir (dans sa lettre du 3 septembre dernier, à moi) attiré mon attention sur une certaine lacune dans la démonstration

Alors, tout élément $\wedge$-irréductible (3.3.1) *est $\mathbf{B}^+$-primaire à droite et $\mathbf{B}^-$-primaire à gauche (ici $\mathbf{B}^+$, $\mathbf{B}^-$ dénotent, respectivement, l'ensemble des éléments principaux à droite et celui des éléments principaux à gauche, de $\mathfrak{G}$).*

Démonstration. Je raisonnerai par réduction à l'absurde. Soit donc $q \in \mathfrak{G}$ $\wedge$-irréductible et supposons, qu'il ne soit pas $\mathbf{B}^+$-primaire à droite. D'après la définition 8.4 il y aura un couple d'éléments $f \in \mathbf{B}^+$ et $x \in \mathfrak{G}$ tels que

$$fx \leqq q, \qquad x \nleqq q \tag{60}$$

et tels, que, pour *chaque* $r \in \varrho(q)$ on ait

$$f \nleqq r, \qquad r \in \varrho(q). \tag{61}$$

D'après 5.3 on peut, d'ailleurs, remplacer l'élément x des (60) par un élément $\bar{x} \in \mathfrak{G}$ vérifiant

$$f\bar{x} \leqq q, \qquad \bar{x} > q. \tag{60'}$$

Cela étant, soit h le plus petit nombre entier rationnel positif tel, que

$$q \mathbin{.\!\cdot} f^h = q \mathbin{.\!\cdot} f^{h+1}; \tag{62}$$

son existence, en tant que tel, résulte évidemment de (ii).

Or, je dis, qu'on a

$$\bar{x} \vee f^h 1 \neq \emptyset \tag{63}$$

et

$$t \leqq q \qquad \textit{pour chaque} \qquad t \in \bar{x} \wedge f^h 1. \tag{63'}$$

---

du théorème 8.8 suivant, et qui tenait, essentiellement, à une définition fautive des éléments primitifs (cf. ci-dessus, 8.4). La démonstration du théorème 8.9 s'en trouvait, d'ailleurs, également affectée sur un certain point.

Or, il s'est avéré, que, sans rien changer d'essentiel à la démonstration du théorème 8.8, ni à celle du théorème 8.9, pourrais me passer des éléments primitifs à la faveur des éléments quasiprimaires (qui sont, eux, toujours primitifs) respectivement partiellement primaires, dont les notions se rapprochent, d'ailleurs, beaucoup plus des éléments primaires de la théorie ordinaire, tout en entraînant aussi, certaines simplifications de détail dans les démonstrations de 8.8 et 8.9 et la nécessité de leur refonte partielle en les nouveaux théorèmes 8.6, 8.7.

Dans la première rédaction du présent travail (juin 1961), je travaillais avec une notion de radical inadéquate et beaucoup plus restreinte que celle de 4.8, particulièrement en ce, que je supposais l'univocité du radical — ce, qui cachait, d'une part, le rôle des éléments à radical (4.10, Remarque 1) et, d'autre part, la propriété des éléments quasiprimaires d'être primitifs (c'est immédiat, en partant de la définition 4.8 du radical), cependant, qu'il suffit des suppositions du théorème 8.6 (ou 8.7, respectivement), afin que tout élément $\wedge$-irréductible soit déja $\mathbf{B}^+$-primaire à droite ($\mathbf{A}^-$-primaire à droite, respectivement) — ou bien quasiprimaire, s'il est à radical (8.8, 8.9).

C'est pourquoi, j'ai jugé à propos, d'une part, de disjoindre les éléments ($\wedge$-irréductibles) *à radical* (théorèmes 8.8, 8.9) de ceux, qui n'ont pas cette propriété (théorèmes 8.6, 8.7) et, d'autre part, de remplacer partout les éléments primitifs par les quasiprimaires et les ($\mathbf{B}^+ -$, $\mathbf{B}^- -$) partiellement primaires etc., afin d'obtenir, de la sorte, des énoncés mieux apparentés à ceux de la théorie habituelle.

La (63) est triviale, car $\mathfrak{G}$ est entier (c'est-à-dire, qu'il a un dernier élément, 5.1.1). Quant à la (63'), il est évident, d'abord, que $\bar{x} \wedge f^h 1 \neq \emptyset$, car, puisque $\mathfrak{G}$ est quasientier (4.2.1), on a $x \wedge y \neq \emptyset$ pour tous les $x, y \in \mathfrak{G}$.

Soit donc $t \in \bar{x} \wedge f^h 1$ ce qui entraîne $t \leqq f^h 1$, où, d'après 8.3, f^h est, comme f lui-même, principal à droite. On en tire, toujours d'après 8.3

$$t = f^h(t \mathbin{.\cdot} f^h) \leqq f^h(\bar{x} \mathbin{.\cdot} f^h)$$

(car $t \leqq \bar{x}$), donc

$$t \leqq f^h(\bar{x} \mathbin{.\cdot} f^h). \tag{64}$$

D'autre part, on a

$$f^{h+1}(\bar{x} \mathbin{.\cdot} f^h) = f f^h(\bar{x} \mathbin{.\cdot} f^h) \leqq f\bar{x} \leqq q$$

(d'après (60')), d'où l'on tire, compte tenu des (62), (64)

$$\bar{x} \mathbin{.\cdot} f^h \leqq q \mathbin{.\cdot} f^h,$$
$$t \leqq f^h(\bar{x} \mathbin{.\cdot} f^h) \leqq f^h(q \mathbin{.\cdot} f^h) \leqq q,$$

ce qui achève la démonstration de (63').

Or, puisque q est M-irréductible, la propriété $(\mathbf{P}_1)$ de 2.8 est trivialement vérifiée, donc, puisque, d'après (i), $\mathfrak{G}$ est un multitreillis semimodulair, la propriété $(\mathbf{P}_2)$ sera également vérifiée. Il en résulte, d'après $\bar{x} > q$ et d'après (63), (63'), *l'inégalité* $f^h 1 \leqq q$ donc, *à fortiori*, $f^{h+1} \leqq q$, c'est-à-dire, d'après 4.11, (1), $f \leqq r'$ pour un *certain* $r' \in \varrho(q)$, ce qui, par rapport à (61), est une contradiction.

Ainsi q est bien $\mathbf{B}^+$-primaire à droite et l'on montre d'une manière analogue, qu'il est aussi $\mathbf{B}^-$-primaire à gauche, ce qui achève la démonstration.

8.7. Théorème. *Soit $\mathfrak{G}$ un domaine divisonnaire entier, associatif, à élément unité et satisfaisant, en outre, aux suppositions suivantes:*

(i) $\mathfrak{G}$ *est un multitreillis,*

(ii) $\mathfrak{G}$ *vérifie la condition (affaiblie) des chaînes descendantes,*

(iii) $\mathfrak{G}$ *vérifie la loi distributive* (*) *de* 5.5, *théorème* 2.

Alors, tout élément M-irréductible est $\mathbf{A}^-$-primaire à droite et $\mathbf{A}^+$-primaire à gauche (ici $\mathbf{A}^+$, $\mathbf{A}^-$ dénotent, respectivement, l'ensemble des éléments essentiels à droite et celui des éléments essentiels à gauche, de $\mathfrak{G}$).

Démonstration. Si le théorème n'était pas vrai, il y aurait des éléments $e \in \mathbf{A}^-$ et $y \in \mathfrak{G}$ tels, que

$$ey \leqq q, \qquad y \nleqq q \tag{65}$$

et tels, que pour *chaque* $r \in \varrho(q)$ on ait

$$e \nleqq r \qquad r \in \varrho(q). \tag{66}$$

Par la même raison, qu'à 8.6, on peut dans (65) remplacer y par $\bar{y} \in \mathfrak{G}$ tel, que

$$e\bar{y} \leqq q, \qquad \bar{y} > q. \tag{65'}$$

Je considère maintenant la chaîne descendante

$$e \geqq e^2 \geqq e^3 \geqq \ldots \geqq e^k \geqq \ldots \tag{67}$$

et soit $x_1 \in q \vee e$, arbitraire, mais fixe. J'en déduis, compte tenu de (67) et de 1.5.3, l'existence d'un $x_2 \in q \vee e^2$ tel, que

$$x_1 \geqq x_2 \tag{68}$$

ce qui entraîne à son tour, par la même raison, l'existence d'un $x_3 \in q \vee e^3$ tel, que

$$x_2 \geqq x_3 \tag{69}$$

et ainsi de suite. On obtient, de la sorte, la chaîne descendante

$$x_1 \geqq x_2 \geqq x_3 \geqq \ldots \geqq x_k \geqq \ldots, \tag{70}$$
$$x_k \in q \vee e^k \tag{71}$$

d'éléments de $\mathfrak{G}$, laquelle, étant évidemment bornée par q, aura seulement un nombre fini de termes distincts, d'après (ii). Ainsi

$$x_k = x_{k+1} = \ldots \tag{71'}$$

à partir d'un certain rang $k = 1, 2, \ldots$

Les (71), (71') entraînent alors

$$(q \vee e^k) \cap (q \vee e^{k+1}) \neq \emptyset$$

ce qui s'écrit encore, puisque $\mathfrak{G}$ est à élément unité ($= 1$)

$$(q \vee 1e^k) \cap (q \vee ee^k) \neq \emptyset$$

d'où l'on tire, compte tenu de 8.3,

$$((q \mathbin{\cdot.} e^k) \vee 1) \cap ((q \mathbin{\cdot.} e^k) \vee e) \neq \emptyset$$

cela veut dire

$$1 \in (q \mathbin{\cdot.} e^k) \vee e$$

équivalent à

$$(q \mathbin{\cdot.} e^k) \vee e = \{1\}.$$

Ceci entraîne, d'après 5.5, théorème 2

$$\{q\} = \{q \mathbin{.\cdot} 1\} = q \mathbin{.\cdot} ((q \mathbin{\cdot.} e^k) \vee e) \supseteq (q \mathbin{.\cdot} (q \mathbin{\cdot.} e^k)) \wedge (q \mathbin{.\cdot} e)$$

cela veut dire exactement

$$\{q\} = (q \mathbin{.\cdot} (q \mathbin{\cdot.} e^k)) \wedge (q \mathbin{.\cdot} e). \tag{72}$$

La (72) entraîne, en vertu de la M-irréductibilité de q et compte tenu de ce, que, d'après les (65), on a $q < q \cdot\!\!\cdot\, e$, —l'égalité $q = q \cdot\!\!\cdot\, (q \cdot\!\!\cdot\, e^k)$, donc, enfin, $e^k \leqq q$ et ainsi $e \leqq r'$ pour un *certain* $r' \in \varrho(q)$, ce qui, par rapport à (66), est une contradiction.

Ainsi, q est bien $\mathbf{A}^-$-primaire à droite et l'on montre exactement de la même manière, qu'il est aussi $\mathbf{A}^+$-primaire à gauche. Ceci achève le démonstration.

8.8. Théorème. *Soit $\mathfrak{G}$ un domaine divisionnaire, satisfaisant aux suppositions de* 8.6 *et aux deux suppositions supplémentaires, que voici:*

(iii) *$\mathfrak{G}$ est un multitreillis complet,*

(iv) *$\mathfrak{G}$ vérifie la condition (B) des éléments principaux à droite* (8.2).

Alors, tout élément M-irréductible et à radical (4.10, Remarque 1) *de $\mathfrak{G}$ est quasiprimaire.*

Démonstration. Posons $\varrho(q) = \{r\}$, ce qui entraîne $\tilde{\varrho}(q) = \{r\}$ et tout revient à montrer, que r est premier. Supposons, que le contraire soit vrai, donc, qu'il existe des éléments $a, b \in \mathfrak{G}$ tels que

$$ab \leqq r, \qquad a \nleqq r, \qquad b \nleqq r.$$

J'en déduis, d'après le théorème 4.11, (6), l'existence d'éléments $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{G}$ tels que

$$\bar{a}\bar{b} \leqq q, \qquad \bar{a} > r, \qquad \bar{b} > q. \tag{73}$$

Or, puisque, d'après (iv), $\mathfrak{G}$ satisfait à la condition (B), il y aura une famille non vide d'éléments principaux à droite, soit $X \subseteq \mathbf{B}^+$, telle que

$$\bar{a} \in \bigvee X \tag{74}$$

et je dis, qu'il y a nécessairement un $f \in X$ tel, que

$$f \nleqq r. \tag{75}$$

Sans quoi, on aurait $x \leqq r$ pour chaque $x \in X$, ce qui entraînerait, puisque d'après (iii) $\mathfrak{G}$ est un multitreillis complet, la relation $d \leqq r$ pour un certain $d \in \vee X$. Or, d'après (74) et d'après la deuxième (73), cela donnerait une contradiction, savoir $\bar{a} \in \bigvee X$, $d \in \bigvee X$ et $\bar{a} > d$. Ainsi, on a bien la (75).

Les relations (73) entraînent alors, compte tenu des (74) $\bigvee$ (75) et de l'isotonie (axiome G1)

$$f\bar{b} \leqq q, \qquad f \nleqq r, \qquad \bar{b} > q. \tag{76}$$

D'après le théorème 8.6, la première et la troisième de (76) entraînent maintenant, vu que q est à radical, $f \leqq r$ ce qui par rapport à la deuxième des (76) est une contradiction et le théorème est démontré.

8.9. Théorème. *Soit $\mathfrak{G}$ un domaine divisionnaire entier, associatif, à élément unité et satisfaisant aux suppositions* (ii), (iii) *de* 8.7, *ainsi qu'aux suppositions suivantes:*

(i') *$\mathfrak{G}$ est un multitreillis complet,*

(iv) *$\mathfrak{G}$ vérifie la condition* (A) *des élémentes essentiels à gauche* (6.13.1).

Alors, tout élément M-irréductible et à radical de $\mathfrak{G}$ est quasiprimaire.

Démonstration. S'il ne l'était pas, on pourrait, exactement comme à 8.8, déterminer, d'après (iv) et (i') ci-dessus, deux éléments $e, \bar{b} \in \mathfrak{G}$ tels, que

$$e\bar{b} \leqq q, \qquad e \nleqq r, \qquad \bar{b} > q$$

e étant essentiel à gauche et r le radical de q. On en déduit, d'après 8.7, l'inégalité $e \leqq r$, ce qui donne une contradiction par rapport à $e \nleqq r$ et le radical r est ainsi élément premier, donc q est quasiprimaire, c. q. f. d.

8.10. Théorème Lasker-Noether. *Sous les suppositions du théorème* 8.8 *ou bien, sous les suppositions du théorème* 8.9, *chaque élément* $\neq 1$ *de $\mathfrak{G}$ est représentable comme M-intersection* (3.1) *d'un nombre fini d'éléments quasiprimaires ou $\mathbf{B}^+$-primaires à droite ($\mathbf{B}^-$-primaires à gauche) ou encore $\mathbf{A}^-$-primaires à droite ($\mathbf{A}^+$-primaires à gauche).*

Démonstration. Conséquences immédiate des théorèmes 3.4, 8.6, 8.7, 8.8, 8.9, sauf que, au cas, où $\mathfrak{G}$ satisfait à la condition affaiblie des chaînes descendantes, il faut avoir recours aux éléments primaux de $\mathfrak{G}$, au sens de la définition suivante:

8.11. Définition. *Sous les suppositions du théorème* 8.9 *un élément $a \in \mathfrak{G}$, $a < 1$, sera dit résiduairement M-réductible à droite, lorsqu'il existe un ensemble fini non vide $\mathscr{F}$ de résiduels à droite propres de a, tel que $x > a$ pour chaque $x \in \mathscr{F}$ et tel que $a = \mathsf{M}_a\mathscr{F}$.*

Lorsqu'un tel ensemble $\mathscr{F}$ n'existe pas, l'élément $a \in \mathfrak{G}$ sera dit primal à droite. Cf. [3].

8.11.1. Or, il est aisé de voir, en s'appuyant sur les lemmes 3.2 et 6.3, (2), que *chaque élément $a \in \mathfrak{G}$, $a < 1$, est représentable comme M-intersection d'un nombre fini d'éléments primaux à droite.* Cf. [5], théorème 3,1.

D'autre part, l'égalité (76) montre que *sous les suppositions de* 8.9, *tout élément primal à droite de $\mathfrak{G}$ est quasiprimaire ou $\mathbf{A}^-$-primaire à droite etc.*

§9. LE QUATRIÈME THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION D'EMMY NOETHER

9.1. Définition. *Par domaine noethérien pseudoentier ou fractionnaire, j'entends tout groupoïde partiellement ordonné* (4.1) *$\mathfrak{G}$ tel que des deux axiomes suivantes soient en puissance:*

G2*. *Il existe un élément $1 \in \mathfrak{G}$ tel que $1a \leqq a \geqq a1$ pour tout $a \in \mathfrak{G}$.*

$\overline{\text{G3}}$. *Pour tous les éléments „entiers“ $a \in \mathfrak{G}$* (donc tels que $a \leqq 1$) *vaut l'axiome* G3 (propriété de divisibilité Noether-Krull, 4.2). *En d'autres termes, il est requis que l'ensemble $\mathscr{E}$ des $a \in \mathfrak{G}$ tels que $a \leqq 1$, considéré en lui-même, vérifie l'axiome* G3.

9.1.1. Un domaine noethérien fractionnaire est donc caractérisé par les axiomes G1, G2* et $G\bar{3}$.

Remarquons que si $\mathscr{E} = \mathfrak{G}$, cela veut dire, si l'on a $1 \geqq a$ pour chaque $a \in \mathfrak{G}$, on en obtient un domaine noethérien entier (4.2.1).

9.1.2. Tout groupe partiellement ordonné $\mathfrak{G}$, dont la partie entière (donc l'ensemble des $a \in \mathfrak{G}$ tels que $a \leqq 1$) vérifie l'axiome G3 est un domaine noethérien fractionnaire. Un tel groupe vérifie alors l'axiome plus fort G3′ (4.5) donc aussi, la *propriété d'interpolation* de F. Riesz, et réciproquement.

9.2. Définition. *Je dirai que deux éléments $a, b \in \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ étant un domaine noethérien fractionnaire, sont hausdorffiennement premiers entre eux ou encore étrangers, et j'écrirai $1 \in a \vee b$, lorsque $a \leqq 1$, $b \leqq 1$ et que pour tout $x \in \mathfrak{G}$ tel que $a \leqq x$, $b \leqq x$, $x \leqq 1$, on ait $x = 1$.*(12)

Deux éléments étrangers sont donc toujours entiers (9.1, axiome $G\bar{3}$), donc appartiennent à $\mathscr{E} \subseteq \mathfrak{G}$. D'ailleurs, remarquons-le expressément, l'emploi de la notation $a \vee b$ ne signifie nullement que $\mathscr{E}$ ou $\mathfrak{G}$ soient des $\vee$-demimultitreillis, mais $a \vee b$ dénote l'ensemble de tous les éléments de $\mathfrak{G}$ (et non seulement de $\mathscr{E}$), qui sont des *majorants communs minimaux* de a et b. Cf. 1.3, 1.4 et mon rapport [28], 3.2, exemple 2, cf. aussi [27].

9.3. Définition. *L'ensemble $\mathfrak{G}$ étant toujours un domaine noethérien fractionnaire et $p \in \mathfrak{G}$, je dirai que p est directement premier, lorsque $p \leqq 1$ et lorsque pour tous les $a, b \in \mathfrak{G}$ tels que $1 \in a \vee b$ et tels que $p \geqq ab$, on a $p \geqq a$ ou $p \geqq b$.*

9.3.1. Exemples. 1. Tout élément premier $p \in \mathscr{E} \subseteq \mathfrak{G}$ y est aussi (trivialement) directement premier.

2. Tout élément primitif (8.4) est directement premier.

9.4. Dorénavant, nous allons supposer que $\mathfrak{G}$ est, sauf avis contraire, un domaine noethérien fractionnaire tel que $a1 = a = 1a$ pour tout $a \in \mathfrak{G}$. Mais la supposition, moins exigeante, $a1 = a = 1a$ pour tout $a \in \mathscr{E}$ (donc $\leqq 1$) suffit dans ce qui suit, et même, quelque fois, la supposition $1^2 = 1$.

Lorsque $1a = a = a1$, $a \in \mathfrak{G}$, je dirai que $\mathfrak{G}$ *est à élément unité universel*; lorsque $1a = a = a1$, $a \in \mathscr{E}$, je dirai que $\mathfrak{G}$ est à *élément unité entier*.

9.5. Théorème. *Soit $\mathfrak{G}$ un domaine noethérien fractionnaire à élément unité entier (ou universel). Alors:*

(1) *Pour tous les $a, b, c \in \mathscr{E} \subseteq \mathfrak{G}$ tels que $c \geqq ab$ et $1 \in c \vee a$, on a $c \geqq b$* (Lemme d'Euclide) *(Si, par contre, $1 \in c \vee b$, alors $c \geqq a$).*

(2) *Pour tous les $a, b, b' \in \mathscr{E}$ tels que $d \in a \vee b$, $1 \in a \vee b'$, on a $d \in a \vee bb'$.*

(2′) *Pour tous les $a, b, b' \in \mathscr{E}$ tels que $1 \in a \vee b$, $1 \in a \vee b'$, on a $1 \in a \vee bb'$.*

---

(12) Cette notion généralise la notion d'éléments (dédékindiennement) *premiers entre eux* donc tels que $1 = \sup(a, b)$, cela veut dire, pour tout $x \in \mathfrak{G}$ tel que $x \geqq a$, $x \geqq b$ on a $x \geqq 1$; donc a et b sont des entiers „*teilerfremd*". Remarquons toutefois, que si $\mathfrak{G} = \mathscr{E}$, les deux notions coïncident.

Démonstration. *Ad* (1). D'après l'axiome $G\bar{3}$ (9.1) il existe des éléments $a^*, b^* \in \mathscr{E}$ (donc $a^* \leqq 1$, $b^* \leqq 1$) tels que

$$a^* \geqq a, \qquad a^* \geqq c, \tag{77}$$

$$b^* \geqq b, \qquad b^* \geqq c, \tag{77′}$$

$$c \geqq a^*b^*. \tag{77″}$$

Les (77) entraînent, compte tenu de $1 \in c \vee a$, l'égalité $a^* = 1$ donc, d'après (77″), $c \geqq 1b^* = b^*$, ce qui, d'après (77′), entraîne $c \geqq b$.

Ad (2). Comme $d \leqq 1$, il s'agit de faire voir que pour tout $x \in \mathscr{E}$ tel que

$$d \geqq x \geqq a, \tag{78}$$

$$d \geqq x \geqq bb', \tag{78′}$$

on a

$$x = d. \tag{78″}$$

Or, d'après $1 \in a \vee b'$, $1 \geqq x \geqq a$ et d'après 1.5.2, on a $1 \in x \vee b'$, ce qui, d'après (78′) et d'après le lemme d'Euclide (cf. (1)), entraîne $x \geqq b$. Or, ceci et les (78), ensemble avec $d \in a \vee b$, entraînent $x = d$, c'est-à-dire la (78″).

Ad (2′). Résulte trivialement de (2). (Toutefois la supposition $1^2 = 1$ suffit pour vérifier (2′)).

9.5.1. **Corollaire.** *Sous les suppositions de 9.5, on a*

(1) *Les relations $1 \in a \vee x$, $x \in \mathscr{F}$, $\mathscr{F}$ étant un ensemble fini non vide d'éléments de $\mathscr{E}$, entraînent la relation*

$$1 \in a \vee [\prod_{x \in \mathscr{F}} x]$$

quelle que soit l'association des facteurs $x \in \mathscr{F}$ dans Πx.

(2) *Les relations $1 \in x \vee x'$, $x' \in \mathscr{F}'$, $x \in \mathscr{F}$, $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$ étant deux ensembles finis non vides d'éléments de $\mathscr{E}$, entraînent la relation*

$$1 \in [\prod_{x \in \mathscr{F}} x] \vee [\prod_{x' \in \mathscr{F}'} x']$$

quelles que soient les associations des facteurs $x \in \mathscr{F}$ dans Πx et $x' \in \mathscr{F}'$ dans $\Pi x'$.

(2′) *Réciproquement, les relations $a, b \in \mathfrak{G}$, $1 \in a \vee b$ et*

$$a = [\prod_{x \in \mathscr{F}} x], \qquad \emptyset \neq \mathscr{F} \subseteq \mathscr{E},$$

$$b = [\prod_{x' \in \mathscr{F}'} x'], \qquad \emptyset \neq \mathscr{F}' \subseteq \mathscr{E}$$

entraînent les relations $1 \in x \vee x'$, $x \in \mathscr{F}$, $x' \in \mathscr{F}'$.

Démonstration. *Ad* (1), (2). Induction.

Ad (2′). Appliquer 1.5.2, deux fois de suite.

9.6. Théorème. *Soit $\mathfrak{G}$ un domaine moethérien fractionnaire, à élément unité entier (ou universel) et satisfaisant en outre aux suppositions suivantes:*

(1) *L'ensemble $\mathscr{E}$ des entiers de $\mathfrak{G}$ est un $\wedge$-demimultitreillis.*

(2) *Pour tous les $a, b, x \in \mathscr{E}$ tels que $x \geqq ab$, il existe des éléments $d', d'', m \in \mathscr{E}$ tels que $d' \geqq a$, $d' \geqq b$, $d'' \geqq a$, $d'' \geqq b$, $m \in a \wedge b$ et tels que $x \geqq md'$ et $x \geqq d''m$.*

Alors:

(1') *Pour tous les $a, b \in \mathscr{E}$ tels que $a \geqq b$, on a $ab = ba$.*

(2') *Pour tous les $a, b \in \mathscr{E}$ tels que $1 \in a \vee b$, on a $ab \in a \wedge b$ et $ba \in a \wedge b$.*

(3') *Pour tous les $a, b, x \in \mathscr{E}$ tels que $x \geqq ab$, $1 \in a \vee b$, il existe des éléments $a^*, b^* \in \mathscr{E}$ tels que $x = a^*b^*$ et $1 \in a^* \vee b^*$.*

Démonstration. *Ad* (1'). Il suffit de remarquer que, puisque $a \geqq b$, on a $a \wedge b = \{b\}$. L'application de la supposition (2) donne alors, pour $x = ab$, $ba \leqq ab$ et pour $x = ba$, elle donne $ab \leqq ba$, etc.

Ad (2'). En faisant toujours usage de la supposition (2) de l'énoncé, on trouve des éléments $d', m \in \mathscr{E}$, tels que

$$d' \geqq a, \qquad d' \geqq b, \qquad m \in a \wedge b,$$
$$md' \leqq ab$$

(attendu qu'on ait pris $x = ab$). Il en résulte d'après $1 \in a \vee b$, que $d' = 1$, d'où

$$m \leqq ab. \tag{79}$$

Or, $ab \leqq b$, $ab \leqq a$, donc, $\mathscr{E}$ étant un $\wedge$-demimultitreillis, il existe $m' \in \mathscr{E}$ tel que

$$ab \leqq m' \in a \wedge b \tag{79'}$$

et ainsi

$$m \leqq ab \leqq m'$$

donc d'après 1.5.1 (forme duale) $m = ab = m' \in a \wedge b$. De même pour ba.

Ad (3'). D'après l'axiome $\mathbf{G\overline{3}}$ il existe $a^*, b^* \in \mathscr{E}$, tels que

$$a^* \geqq a, \qquad b^* \geqq b, \tag{80}$$
$$a^* \geqq x, \qquad b^* \geqq x, \tag{80'}$$
$$x \geqq a^*b^*. \tag{80''}$$

Comme $1 \in a \vee b$, on aura encore, par les (80) et d'après 1.5.2

$$1 \in a^* \vee b^* \tag{81}$$

d'où, d'après (2') ci-dessus,

$$a^*b^* \in a^* \wedge b^*. \tag{82}$$

Or, les (80') entraînent, d'après la supposition (1) de l'énoncé, l'existence d'un $m \in \mathscr{E}$ tel que

$$x \leqq m \in a^* \wedge b^* \tag{82'}$$

ce qui, compte de (80''), (82) et de 1.5.1 (forme duale), entraîne

$$x = a^*b^*. \tag{81'}$$

Les (81), (81') achèvent la démonstration de (3') et du théorème.

9.6.1. **Corollaire.** *Sous les suppositions de 9.6, si $p \in \mathscr{E}$ est directement premier (9.3), les relations $a, b \in \mathfrak{G}$, $1 \in a \vee b$ et $p = ab$, entraînent $p = a$ ou $p = b$, et réciproquement, un tel $p \in \mathfrak{G}$ est directement premier.*

9.7. Théorème. *Soit $\mathfrak{G}$ un domaine noethérien fractionnaire, à élément unité entier (ou universel) et satisfaisant à la supposition (2) de 9.6 et à la condition des chaînes ascendantes pour les chaînes d'éléments entiers (donc $\leqq 1$). Alors chaque élément $a \in \mathfrak{G}$, $a < 1$, admet une décomposition en produit d'un nombre fini d'éléments directement premiers et étrangers deux à deux (chaque facteur une seule fois). Et deux telles décompositions d'un même $a \in \mathfrak{G}$, $a < 1$ ont mêmes facteurs c'est-à-dire que les deux décompositions coïncident (à l'ordre et aux associations de leurs facteurs, près).*

Démonstration. *Existence* de la décomposition requise. Résulte par une induction relative aux diviseurs, compte tenu de 9.5.1, (2') et 9.6.1.

Unicité de la décomposition requise. Résulte de la définition 9.3 des éléments directement premiers, compte tenu de ce que dans chaque décomposition les facteurs sont deux à deux étrangers, donc, en particulier, deux à deux distinct, à quoi, il suffit d'appliquer ensuite 9.5.1, (2).

9.8. Théorème. *Dans tout domaine divisionnaire entier, à élément unité, et satisfaisant à la commutativité faible de 9.6, (1') et à la condition des chaînes ascendantes, les conclusions de 9.7 subsistent entièrement* (sauf que les couples d'éléments étrangers sont remplacés ici par les couples d'éléments premiers entre eux ([12])).

Démonstration. Il suffit de faire voir que la supposition (2) de 9.6 est ici vérifiée.

Or, on a, pour chaque $m \in \mathscr{E}$ tel que $m \leqq a$, $m \leqq b$ et chaque $x \in \mathscr{E}$ tel que $x \geqq ab$ $(a, b \in \mathscr{E})$

$$x \geqq ab \geqq am = ma, \qquad x \geqq ab \geqq mb = bm$$

donc

$$a \leqq x \mathbin{{}^{\cdot}\!.} m, \qquad a \leqq x \mathbin{.\!{}^{\cdot}} m,$$
$$b \leqq x \mathbin{.\!{}^{\cdot}} m, \qquad b \leqq x \mathbin{{}^{\cdot}\!.} m$$

d'où, en posant $x \mathbin{.\!{}^{\cdot}} m = d'$ et $x \mathbin{{}^{\cdot}\!.} m = d''$, on obtient $md' \leqq x$ et $d''m \leqq x$, comme cela doit être.

10.1. Théorème. *Soit* $\mathfrak{G}$ *un domaine divisionnaire, à élément unité* (donc entier, 5.1.1) *et satisfaisant à la loi distributive* (*) (5.5, théorème 2), *à la condition affaiblie des chaînes descendantes, aux conditions* (A) *et* (B), *et qui soit en même temps un multitreillis modulaire* ([17], § 4), *où pour tous les* $a, b \in \mathfrak{G}$ *et chaque* $d \in a \vee b$, *on ait* $a \cdot . d = a \cdot . b$. *Alors, pour qu'il existe une série principale entre* $u, v \in \mathfrak{G}$, $u > v$, *il faut et il suffit:*

(1) *Que pour tous les* $a, b \in \mathfrak{G}$ *tels que* $a \succ b$, *on ait* $1 \succ b \cdot . a$.

(2) *Que pour chaque* $a \in \mathfrak{G}$, *il y ait un* $b \in \mathfrak{G}$ *tel que* $a > b$ *et un élément principal à droite* $f \in \mathfrak{G}$ *tel que* $a \in b \vee f$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Krull W., *Axiomatische Begründung der allgemeinen Idealtheorie*, Sitzungsberichte der phys.-mat. Sozietät Erlangen *56* (1924), 47–63.
[2] Ward M., Dilworth R. P., *Residuated lattices*, Transactions Amer. Math. Soc. *45* (1939), 335–354.
[3] Fuchs L., *A lattice- theoretic discussion of some problems in additive ideal-theory*, Acta mathematica Acad. Sci. Hungaricae *5* (1954), 299–313.
[4] Kerstan J., *Elementfreie Begründung der allgemeinen Ideal- und Modultheorie*, Berliner Math. Tagung, Berlin 1953, 49–57.
[5] Lesieur L., *Sur les demigroupes réticulés satisfaisants à une condition de chaîne*, Bull. Soc. Math. France *83* (1955), 161–194.
[6] Lesieur L., Croisot R., *Théorie noethérienne des anneaux, des demigroupes et des modules dans le cas non-commutatif I*, Colloque d'Algèbre Supérieure, Bruxelles, 19–22 décembre 1956, 79–121.
[7] Hall P., *A contribution to the theory of groups of prime-power order*, Proc. London Math. Soc. *36* (1933), 29–95.
[8] Fitting H. *Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung*, Jahresberichte der Deutschen Math. Vereinigung *48* (1938), 77–141.
[9] Öre Ö., Murdoch D. C., *Generalized rings*, Amer. Journ. of Math. *63* (1941), 73–86.
[10] Стеллецкий И. В., *Нильпотентные структуры*, Труды Московского математического общества *9* (1960), 211—235.
[11] Benado M., *Über die allgemeine Theorie der regulären Produkte von Herrn O. N. Golovin III*, Mathematische Nachrichten *21* (1960), 1–36.
[12] Головин Н. О., *Нильпотентные произведения групп*, Математический сборник *27* (1950), 427—454.
[13] Molinaro I., *Demigroupes résidutifs*, Journal de Mathematiques *39* (1960), 319—356.
[14] Ляпин Е. С., *Полугруппы*, Москва 1960.
[15] Krishnan V. S., *Les algèbres partiellement ordonnées et leurs extensions*, Bull. Soc. Math. France *78* (1950), 234–263; *79* (1951), 85–120.
[16] Benado M., *La théorie des multitreillis et son rôle en Algèbre et en Géometrie* (Rapport destiné au Colloque International de Théorie des Ensembles Ordonnés d'Oberwolfach, 26–30 octobre 1959), Publications Scientifiques de l'Université d'Alger *7* (1960), 41–58.
[17] Benado M., *Les ensembles partiellement ordonnées et le théorème de raffinement de Schreier II.* (Théorie des multistructures), Czechosl. Math. Journal *5* (1955), 308–344.

[18] Bosbach B., *Charakterisierungen von Halbgruppen mit eindeutigen Halbprimfaktor-Zerlegungen*, Math. Annalen *139* (1960), 184–196, *141* (1960), 193–209.
[19] Barbilian D., *L'argument d'Euclide pour l'infinité des nombres premiers*, Études et Recherches Math. *7* (1957), 7–72.
[20] Barbilian D., *Cours autographié de Théorie des Nombres*, Bucarest 1950.
[21] Birkhoff G., *Lattice Theory*, revised edition, New-York 1948.
[22] Benado M., *Bemerkungen zur Theorie der Vielverbände IV.* (Über die Möbius'sche Funktion) Proceedings of the Cambridge Phil. Soc. *56* (1960), 291–317.
[23] Croisot R., *Contributions à l'étude des treillis semimodulaires de longueur infinie*, Annales de l' École Normale Supérieure *68* (1951), 203–265.
[24] Borůvka O., *Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie*, Berlin 1960.
[25] Barbillin D., *Théorie aritmétique des idéaux* (dans les anneaux non commutatifs), Bucarest 1956.
[26] Fuchs L., *On primal ideals*, Proc. Amer. Math. Soc. *1* (1960), 1–6.
[27] Jaffard P., *Les systèmes d'idéaux*, Paris, Dunod, 1960.
[28] Benado M., *Sur la théorie générale des ensembles partiellement ordonnés* (Rapport destiné au Colloque International de Théoie des Ensembles Ordonnés d'Oberwolfach, 26–30 octobre 1959) Publications Scientifiques de l'Université d'Alger *7* (1960), 1–39.
[29] Mac Lane S., *A lattice formulation for transcendence degree and p-bases*, Duke Journal *4* (1938), 455–468.
[30] Benado M., *Les ensembles partiellement ordonnés et le théorème de raffinement de Schreier I*, Czechosl. Math. Journal *4* (1954), 105–127.
[31] Dubreil–Jacotin M. L., Croisot R., Lesieur L., *Leçons sur la théorie des treillis, des structures algébriques ordonnées et des treillis géométriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1953.

Reçu le 1. juillet 1963.

ЗАМЕТКИ К ТЕОРИИ МУЛЬТИРЕШЕТОК VI

(ВКЛАД В ТЕОРИЮ УПОРЯДОЧЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СТРУКТУР)

Михаил Бенадо

Резюме

В работе исследуются частично упорядоченные группоиды с целью обобщения теорем о делимости и идеалах в кольцах. Ассоциативность умножения не предполагается; частичное упорядочение не обязательно определяет решетку. С этой точки зрения исследуется напр.: Теорема Куроша—Оре о разложении (3.4), теорема Ласкера—Нётер (8.10), теорема о разложении элементов в произведение простых элементов (7.1), теорема о существовании главных рядов между двумя элементами. С этой целью вводятся и изучаются понятия простого элемента, радикала, правого и левого частных и др.