MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 14, 2, 1964

KLASIFIKÁCIA ANTIRECIPROCITY V KOMPLEXNEJ PROJEKTÍVNEJ ROVINE

BOŽENA MACKOVÁ, Bratislava

1. Antireciprocita v komplexnej projektívnej rovine je definovaná ako jedno-jednoznačná príbuznosť, kde bodu $A(x_1, x_2, x_3)$ odpovedá priamka $a'(u'_1, u'_2, u'_3)$ a priamke $b(v_1, v_2, v_3)$ odpovedá bod $B'(y'_1, y'_2, y'_3)$, pričom táto príbuznosť je určená rovnicami

$$\begin{aligned} u'_1 &= a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + a_{13}\bar{x}_3, \\ u'_2 &= a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + a_{23}\bar{x}_3, \\ u'_3 &= a_{31}\bar{x}_1 + a_{32}\bar{x}_2 + a_{33}\bar{x}_3, \end{aligned} \tag{1}$$

kde matica $(a_{ik}) \neq 0$ $i, k = 1, 2, 3$ a $\bar{x}$ je číslo komplexne združené k číslu x.

Ak dosadíme tieto rovnice (1) do rovnice priamky $u'(u'_1, u'_2, u'_3)$

$$u' \equiv u'_1 x'_1 + u'_2 x'_2 + u'_3 x'_3 = 0, \tag{2}$$

dostaneme ďalšie vyjadrenie antireciprocity v komplexnej projektívnej rovine rovnicou

$$\sum a_{ik} x'_i \bar{x}_k = 0. \quad (i, k = 1, 2, 3) \tag{3}$$

Keď je uvedená transformácia určená rovnicami (1), ktoré môžeme písať vo tvare

$$(u') = (A)(\bar{x}),$$

platí ďalej

$$\begin{aligned} (u) &= (\bar{A}^*)(\bar{x}'), \\ (x) &= (\bar{A}^{-1})(\bar{u}'), \\ (x') &= (A^{-1*})(\bar{u}), \end{aligned} \tag{4}$$

kde (A^{-1}) je inverzná matica k matici (A) a (A^{-1*}) je matica transponovaná k matici (A^{-1}).

Klasifikáciu antireciprocity môžeme vykonať podľa útvarov involutórnych párov prvkov tejto transformácie. Pre antiprojektívne transformácie platí vzťah, že produkt dvoch antiprojektívnych transformácií je transformácia projektívna. Produktom dvoch antireciprocít je homografia, dôkaz uvádza Cartan [1] (str. 4). Preto kvadrátom antireciprocity $\mathcal{T}$ bude homografia $\mathcal{H}$, t. j.

$$\mathcal{T}^2 = \mathcal{H}.$$

Veta 1. *Ku každému invariantnému bodu M v homografii $\mathscr{H}$ možno nájsť priamku m' tiež invariantnú v $\mathscr{H}$ tak, že pár M, m' je involutórnou dvojicou prvkov v antireciprocite $\mathscr{T}$, keď homografia $\mathscr{H}$ je kvadrátom antireciprocity $\mathscr{T}$. A naopak, ak antireciprocita $\mathscr{T}$ má pár prvkov involutórne si odpovedajúcich, sú tieto invariantnými prvkami v homografii $\mathscr{H}$.*

Dôkaz. Keď platí vzťah $\mathscr{T}^2 = \mathscr{H}$, t. j. $\mathscr{T}^2(M) = M$, kde M je invariantný bód v homografii $\mathscr{H}$, platí ďalej $\mathscr{T}(M) = m'$. Potom však musí platiť $\mathscr{T}(m') = M$. Priamka m' je potom tiež invariantná v homografii $\mathscr{H}$ a M, m' je involutórna dvojica prvkov v $\mathscr{T}$. Keď vychádzame z opačného predpokladu, a to, že bod M a priamka m' sú involutórnym párom prvkov v antireciprocite $\mathscr{T}$, platí $\mathscr{T}^2(M) = \mathscr{T}(m') = M$, t. j. bod M a priamka m' sú invariantnými prvkami homografie $\mathscr{H}$.

Ak matica homografie $\mathscr{H}$ je (H), matica antihomografie $\mathscr{T}$ je (T), a ak platí $\mathscr{H} = \mathscr{T}^2$, platí medzi obidvoma maticami vzťah

$$(H) = (T^{-1*})(\bar{T}). \tag{5}$$

Dôkaz. $(u') = (T)(\bar{x})$, $\quad (\bar{u}') = (\bar{T})(x)$,

$$(x'') = (T^{-1*})(\bar{u}'),$$
$$(x'') = (T^{-1*})(\bar{T})(x),$$
$$(x'') = (H)(x),$$
$$(H) = (T^{-1*})(\bar{T}).$$

Klasifikáciu vykonáme podľa typu príslušných matíc (H) v kanonickom tvare; podobné hľadisko použil Cartan [1] (str. 104) pri klasifikácii homografie v trojrozmernom priestore.

Keďže každá homografia má aspoň jeden invariantný bod a jednu invariantnú priamku, bude v každej antireciprocite existovať aspoň jeden pár involutórne si odpovedajúcich prvkov.

Predovšetkým budeme analyzovať prípad, keď homografia $\mathscr{H} = \mathscr{T}^2$ má len tri invariantné body navzájom rozdielne a nimi určené tri invariantné priamky. Príslušná matica má kanonický tvar

$$(H) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

kde $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$. Nech invariantné body sú A, B, C a invariantné priamky AB, AC, BC. V antireciprocite $\mathscr{T}$ môžu nastať dva prípady:

a) Trojuholník ABC je tzv. polárny trojuholník v antireciprocite $\mathscr{T}$, to znamená, že každému vrcholu odpovedá protiležiaca strana trojuholníka a tieto tri páry odpovedajúcich si prvkov sú involutórne.

b) V trojuholníku ABC len jedna strana odpovedá protiležiacemu vrcholu a druhým dvom stranám odpovedajú body – vrcholy trojuholníka ležiace na im odpovedajúcich priamkach. V danej antireciprocite sú potom tieto dvojice involutórne si odpovedajúce páry prvkov.

2. Uvažujme prípad uvedený v predchádzajúcej časti za a). Ako sme uviedli, antireciprocita $\mathscr{T}$ má v tom prípade tri páry navzájom rozdielnych involutórnych prvkov. Nazvime ju antireciprocita typu Ia.

Zvoľme súradnicový systém tak, že vrcholy tohto polárneho trojuholníka (a jeho strany) budú tromi z vrcholov (a strán) súradnicového simplexu, a to takto:

bodu $A(1, 0, 0)$ odpovedá involutórne priamka $a'(1, 0, 0)$,
bodu $B(0, 1, 0)$ odpovedá involutórne priamka $b'(0, 1, 0)$,
bodu $C(0, 0, 1)$ odpovedá involutorne priamka $c'(0, 0, 1)$.

Potom pre koeficienty rovnice (1) dostávame

$$a_{21} = a_{31} = a_{12} = a_{32} = a_{13} = a_{23} = 0.$$

Matica (T) má potom tvar

$$(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Z rovnice $(H) = (T^{-1*})(\bar{T})$ dostávame

$$(H) = \begin{vmatrix} \dfrac{\bar{a}_{11}}{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\bar{a}_{22}}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\bar{a}_{33}}{a_{33}} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Porovnaním matíc (6) a (7) dostávame pre koeficienty a_{ik} podmienky, ktoré musia platiť, aby $\mathscr{T}$ bola antireciprocita typu Ia, ktorú môžeme vždy písať v tvare

$$u_1' = \alpha_1\bar{x}_1, \quad u_2' = \alpha_2\bar{x}_2, \quad u_3' = \alpha_3\bar{x}_3, \tag{8}$$

kde

$$\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} \neq \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2} \neq \frac{\bar{\alpha}_3}{\alpha_3} \neq \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}.$$

Úlohu určiť involutórne páry prvkov v antireciprocite $\mathscr{T}$ môžeme riešiť podobným spôsobom, ako sa to robí v prípade určenia involutórnych párov prvkov reciprocity.

Ak antireciprocita $\mathscr{T}$ prevádza bod $A(x_1, x_2, x_3)$ do priamky $a'(u_1', u_2', u_3')$, prevádza inverzná antireciprocita $\mathscr{T}^{-1}$ ten istý bod $B' \equiv A$ do priamky $b(v_1, v_2, v_3)$.

Ak (A, a') ako aj (B', b) si odpovedajú involutórne, musí platiť $A \equiv B'$, $a' \equiv b$, čo vyjadríme rovnicami:

$$\begin{aligned} a_{11}\bar{x}_1 + a_{12}\bar{x}_2 + a_{13}\bar{x}_3 &= \varrho(\bar{a}_{11}\bar{x}_1 + \bar{a}_{21}\bar{x}_2 + \bar{a}_{31}\bar{x}_3), \\ a_{21}\bar{x}_1 + a_{22}\bar{x}_2 + a_{23}\bar{x}_3 &= \varrho(\bar{a}_{12}\bar{x}_1 + \bar{a}_{22}\bar{x}_2 + \bar{a}_{32}\bar{x}_3), \\ a_{31}\bar{x}_1 + a_{32}\bar{x}_2 + a_{33}\bar{x}_3 &= \varrho(\bar{a}_{13}\bar{x}_1 + \bar{a}_{23}\bar{x}_2 + \bar{a}_{33}\bar{x}_3). \end{aligned}$$

Z toho ďalej vyplýva:

$$\begin{aligned} (a_{11} - \varrho\bar{a}_{11})\bar{x}_1 + (a_{12} - \varrho\bar{a}_{21})\bar{x}_2 + (a_{13} - \varrho\bar{a}_{31})\bar{x}_3 &= 0, \\ (a_{21} - \varrho\bar{a}_{12})\bar{x}_1 + (a_{22} - \varrho\bar{a}_{22})\bar{x}_2 + (a_{23} - \varrho\bar{a}_{32})\bar{x}_3 &= 0, \\ (a_{31} - \varrho\bar{a}_{13})\bar{x}_1 + (a_{32} - \varrho\bar{a}_{23})\bar{x}_2 + (a_{33} - \varrho\bar{a}_{33})\bar{x}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ak tieto rovnice majú mať pre $\bar{x}_i$ nenulové riešenie, musí platiť:

$$|T| = \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho\bar{a}_{11}; & a_{12} - \varrho\bar{a}_{21}; & a_{13} - \varrho\bar{a}_{31} \\ a_{21} - \varrho\bar{a}_{12}; & a_{22} - \varrho\bar{a}_{22}; & a_{23} - \varrho\bar{a}_{32} \\ a_{31} - \varrho\bar{a}_{13}; & a_{23} - \varrho\bar{a}_{32}; & a_{33} - \varrho\bar{a}_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Tým dostávame rovnicu tretieho stupňa pre neznámu ϱ. Každý koreň tejto rovnice určuje jeden bod, ktorý so svojou odpovedajúcou priamkou tvorí hľadaný involutórny pár. V našom prípade pri uvedenej voľbe súradnicového systému, keď antireciprocita typu Ia je určená rovnicami (8), determinant $|T|$ má tvar:

$$|T| = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \varrho\bar{\alpha}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 - \varrho\bar{\alpha}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 - \varrho\bar{\alpha}_3 \end{vmatrix}.$$

Z toho ďalej vyplýva

$$(\alpha_1 - \varrho\bar{\alpha}_1)(\alpha_2 - \varrho\bar{\alpha}_2)(\alpha_3 - \varrho\bar{\alpha}_3) = 0,$$

$$\varrho_1 = \frac{\alpha_1}{\bar{\alpha}_1}, \qquad \varrho_2 = \frac{\alpha_2}{\bar{\alpha}_2}, \qquad \varrho_3 = \frac{\alpha_3}{\bar{\alpha}_3}.$$

Ak tieto tri involutórne páry prvkov majú byť rozdielne, musia byť aj korene ϱ_i navzájom rozdielne a musí platiť

$$\frac{\alpha_1}{\bar{\alpha}_1} \neq \frac{\alpha_2}{\bar{\alpha}_2} \neq \frac{\alpha_3}{\bar{\alpha}_3} \neq \frac{\alpha_1}{\bar{\alpha}_1}. \tag{9}$$

Rovnice (9) súhlasia teda s podmienkou uvedenou pre tento typ antireciprocity určenej rovnicami (8).

3. Ako sme uviedli v kapitole 1, ak homografia $\mathscr{H} = \mathscr{T}^2$ má len tri navzájom rozdielne invariantné body a nimi určené invariantné priamky, môže príslušná antireciprocita $\mathscr{T}$ byť typu, ktorý sme uviedli v odseku b). Invariantné body A, B, C homografie $\mathscr{H}$ sú teda navzájom rôzne a neležiace na jednej priamke. Priraďme ich

po vhodnej voľbe súradnicového systému, aby matica (H) bola v kanonickom tvare, v antireciprocite takto:

bodu $A(1, 0, 0)$ odpovedá priamka $a'(1, 0, 0)$,
bodu $B(0, 1, 0)$ odpovedá priamka $b'(0, 0, 1)$,
bodu $C(0, 0, 1)$ odpovedá priamka $c'(0, 1, 0)$.

Z toho potom pre koeficienty rovnice (1) vyplýva:

$$a_{21} = a_{31} = a_{12} = a_{22} = a_{13} = a_{33} = 0$$

a matica (T) má tvar:

$$(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$

Z rovnice $(H) = (T^{-1*})(\bar{T})$ dostávame:

$$(H) = \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{a}_{11}}{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\bar{a}_{32}}{a_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\bar{a}_{23}}{a_{32}} \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Porovnaním matíc (6) a (10) dostávame podmienky, ktoré koeficienty musia spĺňať, t. j.

$$\frac{\bar{a}_{11}}{a_{11}} \neq \frac{\bar{a}_{23}}{a_{32}} \neq \frac{\bar{a}_{32}}{a_{23}} \neq \frac{\bar{a}_{11}}{a_{11}}.$$

Tento typ antireciprocity nazveme Ib a môžeme ho vždy určiť rovnicami

$$u_1' = \alpha_1\bar{x}_1, \qquad u_2' = \alpha_2\bar{x}_3, \qquad u_3' = \alpha_3\bar{x}_2,$$

pričom musí platiť

$$\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} \neq \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_3} \neq \frac{\bar{\alpha}_3}{\alpha_2} \neq \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}.$$

4. Nech homografia $\mathscr{H} = \mathscr{T}^2$ je homológia o strede S a osi o; má teda všetky body na osi invariantné, ako aj všetky priamky prechádzajúce stredom homológie. Potom aj antireciprocita $\mathscr{T}$ k nej pridružená musí mať nekonečne mnoho involutórnych párov prvkov. Musia to byť priamky idúce bodom S a im odpovedajúce body ležiace na priamke o. Preto v antireciprocite $\mathscr{T}$ bod S a priamka o budú tvoriť involutórnu dvojicu prvkov. Ak uvažujeme ďalší bod A na priamke o a jemu odpovedajúcu priamku a', prechádzajúcu stredom S, môžu nastať dva prípady:

a) bod A neleží na priamke a';
b) bod A leží na priamke a'.

Vyšetrime prípad a). Súradnicový systém zvolíme tak, aby matica (H) mala kanonický tvar

$$(H) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{11}$$

a v príslušnej antireciprocite odpovedajúce body priradíme takto:

Stredu homológie $S \equiv C(0, 0, 1)$ odpovedá os homológie $o \equiv c'(0, 0, 1)$, bodu $A(1, 0, 0)$ odpovedá priamka $a'(1, 0, 0)$,
bodu $B(0, 1, 0)$ odpovedá priamka $b'(0, 1, 0)$, všetky tri dvojice prvkov (A, a'), (B, b'), (C, c') si odpovedajú involutórne.

Pre koeficienty rovnice (1) potom dostávame

$$a_{12} = a_{31} = a_{32} = a_{23} = a_{13} = a_{21} = 0.$$

Z rovnice $(H) = (T^{-1}*)(\bar{T})$ vyplýva

$$(H) = \begin{vmatrix} \frac{\bar{a}_{11}}{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{a}_{22}}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{a}_{33}}{a_{33}} \end{vmatrix}. \tag{12}$$

Porovnaním matíc (11) a (12) dostávame podmienku pre koeficienty a_{ik}, t. j.

$$\frac{\bar{a}_{11}}{a_{11}} = \frac{\bar{a}_{22}}{a_{22}} \neq \frac{\bar{a}_{33}}{a_{33}}.$$

Antireciprocitu tohto typu nazveme Ic a môžeme ju vždy písať v tvare

$$u_1' = \alpha_1 \bar{x}_1, \quad u_2' = \alpha_2 \bar{x}_2, \quad u_3' = \alpha_3 \bar{x}_3, \tag{13}$$

pričom musí platiť

$$\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} = \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2} \neq \frac{\bar{\alpha}_3}{\alpha_3}.$$

Vynásobením vhodným koeficientom môžeme koeficienty α_i upraviť v rovnici (13) tak, že bude platiť

$$\alpha_1 = \bar{\alpha}_1, \quad \alpha_2 = \bar{\alpha}_2, \quad \alpha_3 \neq \bar{\alpha}_3.$$

Vyšetrime v tomto prípade geometrické miesto autokonjugovaných bodov t. j. bodov, ktoré ležia na im odpovedajúcich priamkach. Je určené rovnicou

$$\alpha_1 x_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 x_2 \bar{x}_2 + \alpha_3 x_3 \bar{x}_3 = 0. \tag{14}$$

Keď koeficienty α_1 a α_2 sú rovnakého znamienka, nemá rovnica (14) žiadne riešenie. Autokonjugované body v danej antireciprocite typu Ic neexistujú. V tomto prípade ju môžeme nazvať eliptickou.

Keď koeficienty α_1 a α_2 sú rozdielneho znamienka, má rovnica (14) riešenie v tom prípade, keď $x_3 = 0$. Autokonjugované body sú potom určené rovnicou

$$\alpha_1 x_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 x_2 \bar{x}_2 = 0. \tag{15}$$

Rovnica (15) určuje reťazec k^{I} na priamke $x_3 = 0$, t. j. na osi homológie o.(¹)

V tomto prípade môžeme antireciprocitu Ic nazvať hyperbolickou.

Ďalej vyšetríme prípad uvedený v tomto odseku ako b). Súradnicový systém zvolíme takto:

$C(0, 0, 1)$ a jemu involutórne odpovedajúca priamka $c'(0, 0, 1)$,
$A(1, 0, 0)$ a jemu involutórne odpovedajúca priamka $a'(0, 1, 0)$,
$B(0, 1, 0)$ a jemu involutórne odpovedajúca priamka $b'(1, 0, 0)$.

Pre koeficienty rovnice (1) dostávame:

$$a_{13} = a_{23} = a_{11} = a_{31} = a_{22} = a_{23} = 0.$$

Z rovnice $(H) = (T^{-1}*)(\bar{T})$ dostávame maticu

$$(H) = \begin{vmatrix} \frac{\bar{a}_{21}}{a_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{a}_{12}}{a_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{a}_{33}}{a_{33}} \end{vmatrix}. \tag{16}$$

Porovnaním matíc (11) a (16) dostávame podmienku pre koeficienty a_{ik}:

$$\frac{\bar{a}_{21}}{a_{12}} = \frac{\bar{a}_{12}}{a_{21}} \neq \frac{\bar{a}_{33}}{a_{33}}.$$

(¹) Reťazec k^{I} na komplexnej priamke je množina bodov, ktorých deliaci dvojpomer ktorýchkoľvek štyroch bodov je reálny. (Cartan [1], str. 12.) Reálne body na komplexnej priamke tvoria jeden z reťazcov tejto priamky. Antiinvolúcia prvého druhu, určená rovnicami $t' = 1/t$ alebo $t' = \bar{t}$, má nekonečne mnoho invariantných bodov, ktoré tvoria reťazec k^{I}. Preto rovnicu reťazca môžeme určiť pomocou antiinvolúcie.

Po vynásobení vhodným koeficientom môžeme antireciprocitu v tomto prípade písať

$$u_1' = \alpha_1 \bar{x}_2, \quad u_2' = \alpha_2 \bar{x}_1, \quad u_3' = \bar{x}_3,$$

pričom pre koeficienty musí platiť

$$\frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_1} = \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_2} \neq 1.$$

Geometrické miesto autokonjugovaných bodov je určené rovnicou

$$\alpha_1 x_1 \bar{x}_2 + \alpha_2 x_2 \bar{x}_1 + x_3 \bar{x}_3 = 0, \tag{17}$$

pričom $\alpha_1 \neq \bar{\alpha}_2$, $\alpha_1 \bar{\alpha}_1 = \alpha_2 \bar{\alpha}_2$.

Rovnica (17) má riešenie len v tom prípade, keď $x_3 = 0$. Potom geometrickým miestom autokonjugovaných bodov je reťazec k^1 na priamke $x_3 = 0$, určený rovnicou

$$\alpha_1 x_1 \bar{x}_2 + \alpha_2 \bar{x}_1 x_2 = 0. \quad (\alpha_1 \neq \bar{\alpha}_2, \quad \alpha_1 \bar{\alpha}_1 = \alpha_2 \bar{\alpha}_2)$$

Je zrejmé že ide o typ, ktorý už bol uvedený ako hyperbolická antireciprocita typu I. c.

5. Uvažujme ďalší prípad, keď homografia $\mathcal{H} = \mathcal{T}^2$ je identita. V tomto prípade všetky páry odpovedajúcich si prvkov v antireciprocite $\mathcal{T}$ sú involutórne a dostávame antipolaritu. Súradnicový systém a páry involutórne odpovedajúcich si prvkov zvolíme takto:

$A(1, 0, 0)$ a jemu odpovedajúca priamka $a'(1, 0, 0)$,
$B(0, 1, 0)$ a jemu odpovedajúca priamka $b'(0, 1, 0)$,
$C(0, 0, 1)$ a jemu odpovedajúca priamka $c'(0, 0, 1)$.

Potom pre koeficienty rovnice (1) dostávame:

$$a_{12} = a_{13} = a_{21} = a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0.$$

Z rovnice $(H) = (T^{-1*})(\bar{T})$ dostaneme maticu homografie $\mathcal{H}$:

$$(H) = \begin{pmatrix} \frac{\bar{a}_{11}}{a_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\bar{a}_{22}}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{a}_{33}}{a_{33}} \end{pmatrix}.$$

Keďže homografia $\mathcal{H}$ musí byť identitou, dostávame podmienky pre koeficienty antipolarity, ktoré musia spĺňať vzťahy:

$$\frac{\bar{a}_{11}}{a_{11}} = \frac{\bar{a}_{22}}{a_{22}} = \frac{\bar{a}_{33}}{a_{33}}.$$

Vhodným vynásobením koeficientov a_{11}, a_{22}, a_{33} vždy môžeme dostať také hodnoty, že platí

$$a_{11} = \bar{a}_{11}, \quad a_{22} = \bar{a}_{22}, \quad a_{33} = \bar{a}_{33}.$$

Antipolarita je teda určená rovnicami, ako typ I. d:

$$u_1' = \alpha_1 \bar{x}_1, \quad u_2' = \alpha_2 \bar{x}_2, \quad u_3' = \alpha_3 \bar{x}_3, \tag{18}$$

kde

$$\alpha_1 = \bar{\alpha}_1, \quad \alpha_2 = \bar{\alpha}_2, \quad \alpha_3 = \bar{\alpha}_3.$$

Geometrické miesto autokonjugovaných bodov je určené rovnicou

$$\alpha_1 x_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 x_2 \bar{x}_2 + \alpha_3 x_3 \bar{x}_3 = 0, \tag{19}$$

kde

$$\alpha_1 = \bar{\alpha}_1, \quad \alpha_2 = \bar{\alpha}_2, \quad \alpha_3 = \bar{\alpha}_3.$$

Je zrejmé, že rovnica (19) určuje hyperkuželosečku.([2])

Rovnica hyperkuželosečky môže byť dvojakého typu: Všetky koeficienty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sú rovnakého znamienka; potom rovnica (18) nemá žiadne riešenie. Hyperkuželosečka neobsahuje žiadne body. V tom prípade hovoríme o antipolarite eliptickej.

V druhom prípade, ak dva z koeficientov $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ majú znamienka rozdielne od znamienka koeficientu tretieho, existuje nekonečne mnoho riešení rovnice (18). Hyperkuželosečka obsahuje nekonečne mnoho bodov. Tento typ nazývame antipolarita hyperbolická.

6. Teraz preberieme prípad, keď homografia $\mathcal{H} = \mathcal{T}^2$ má len dva invariantné body a len dve invariantné priamky. Invariantné body sú A, B a invariantné priamky a, b tak, že priamka $a \equiv AB$ a priamka b prechádza bodom A a nie je totožná s priamkou a. Zvoľme súradnicový simplex tak, že body A, B budú dva z jeho vrcholov, a to $A(1, 0, 0,)$, $B(0, 0, 1)$. Invariantné priamky potom budú $a(0, 1, 0)$, $b(0, 0, 1)$.

Matica homografie $\mathcal{H}$ má kanonický tvar

$$(H) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \tag{20}$$

([2]) Hyperkuželosečka je geometrické miesto bodov v rovine, ktoré sú určené rovnicou

$$\sum a_{ik} x_i \bar{x}_k = 0,$$

kde

$$a_{ik} = \bar{a}_{ki} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Pozri Segre [2], (str. 603).

kde $$\lambda_1 \neq \lambda_3.$$

Invariantné prvky homografie $\mathscr{H}$ môžu tvoriť involutórne dvojice prvkov v antireciprocite $\mathscr{T}$ len týmto spôsobom:
bodu $A(1, 0, 0)$ involutórne odpovedá priamka $a'(0, 1, 0)$,
bodu $B(0, 0, 1)$ involutórne odpovedá priamka $b'(0, 0, 1)$.
Z toho potom pre koeficienty rovnice (1) vyplýva:

$$a_{11} = a_{31} = a_{13} = a_{23} = 0.$$

Matica antireciprocity $\mathscr{T}$ má potom tvar:

$$(T) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Z rovnice $(H) = (T^{-1}*)(\overline{T})$ dostaneme maticu

$$(H) = \begin{vmatrix} \dfrac{\overline{a}_{21}}{a_{12}}; & \dfrac{-a_{22}\overline{a}_{12}}{a_{12}a_{21}} + \dfrac{\overline{a}_{22}}{a_{12}} - \dfrac{a_{32}\overline{a}_{32}}{a_{12}a_{33}}; & \dfrac{-a_{32}\overline{a}_{33}}{a_{12}a_{33}} \\ 0 & \dfrac{\overline{a}_{12}}{a_{21}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\overline{a}_{32}}{a_{33}} & \dfrac{\overline{a}_{33}}{a_{33}} \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Porovnaním matíc (20) a (21) dostávame podmienky pre koeficienty a_{ik}:

$$\frac{\overline{a}_{21}}{a_{12}} = \frac{\overline{a}_{12}}{a_{21}} \neq \frac{\overline{a}_{33}}{a_{33}}, \quad a_{32} = 0,$$
$$a_{22}\overline{a}_{12} \neq a_{21}\overline{a}_{22}.$$

Antireciprocitu, ktorá má len dva páry involutórne si odpovedajúcich prvkov, ako sme uviedli v tejto kapitole, a to (A, a'), (B, b'), nazveme typom IIa a môžeme ju vždy písať v tvare

$$u_1' = \alpha_1\overline{x}_2, \quad u_2' = \alpha_2\overline{x}_1 + \alpha_3\overline{x}_2, \quad u_3' = \overline{x}_3,$$
$$\frac{\overline{\alpha}_2}{\alpha_1} = \frac{\overline{\alpha}_1}{\alpha_2} \neq 1; \quad \overline{\alpha}_1\alpha_3 \neq \alpha_2\overline{\alpha}_3.$$

7. Ak homografia $\mathscr{H}$ je elácia, obsahuje nekonečne mnoho invariantných bodov, ležiacich na osi elácie o, ako aj nekonečne mnoho invariantných priamok, prechádzajúcich stredom elácie bodom O, ležiacim na osi o. Potom aj antireciprocita $\mathscr{T}$ musí mať nekonečne mnoho involutórne si odpovedajúcich párov prvkov, a to priamky prechádzajúce bodom O a im odpovedajúce body ležiace na osi o.

Zvoľme súradnicový systém tak, aby os elácie $\mathscr{H}$ bola priamka $a'(0, 1, 0)$ a stred elácie bod $A(1, 0, 0)$, ktoré si v antireciprocite involutórne odpovedajú. Kanonický tvar matice homografie $\mathscr{H}$ – elácie je

$$(H) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Súradnicový systém a priradenie odpovedajúcich si prvkov v antireciprocite $\mathscr{T}$ zvolíme tak ako v predchádzajúcej kapitole 6. Matica $(H) = (T^{-1}*)(\overline{T})$ má ten istý tvar ako je (21). Pre koeficienty však dostávame ine podmienky vyplývajúce z porovnania matíc (22) a (21). Koeficienty v tomto prípade musia spĺňať podmienky

$$\frac{\overline{a}_{12}}{a_{21}} = \frac{\overline{a}_{21}}{a_{12}} = \frac{\overline{a}_{33}}{a_{33}}; \quad a_{22}\overline{a}_{12} \neq a_{21}\overline{a}_{22}.$$

Antireciprocitu tohto druhu nazveme typom IIb môžeme ju vždy písať v tvare

$$u_1' = \alpha_1\overline{x}_2, \quad u_2' = \overline{\alpha}_1\overline{x}_1 + \alpha_2\overline{x}_2, \quad u_3' = \overline{x}_3,$$

kde
$$\alpha_2 \neq \overline{\alpha}_2. \tag{23}$$

8. V poslednom prípade budeme analyzovať antireciprocitu $\mathscr{T}$, keď príslušná homografia $\mathscr{H} = \mathscr{T}^2$ má len jeden invariantný bod a len jednu ním prechádzajúcu invariantnú priamku. Antireciprocita $\mathscr{T}$ môže mať potom len jeden pár involutórne si odpovedajúcich prvkov.

Zvoľme súradnicový systém tak, aby invariantná priamka homografie $\mathscr{H}$ bola jedna strana súradnicového simplexu, a to $a'(0, 0, 1)$, invariantný bod aby bol vrchol súradnicového simplexu $A(1, 0, 0)$. Matica homografie $\mathscr{H}$ má kanonický tvar

$$(H) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Keď v antireciprocite $\mathscr{T}$ tvoria bod A a priamka a' pár prvkov involutórne si odpovedajúcich, potom vychádzajúc z rovníc (1) musí platiť

$$a_{11} = a_{21} = 0.$$

Matica antireciprocity $\mathscr{T}$ má potom tvar

$$(T) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Položme $(T^{-1}*) = (b_{ik})$.

Okrem uvedenej podmienky pre súradnicový systém môžeme položiť ďalšiu podmienku, a to (3) aby bodu $B'(0, 1, 0)$ odpovedala priamka $b(0, 1, 0)$. Keď uvažujeme tento pár odpovedajúcich si prvkov v antireciprocite $\mathcal{T}$, potom pre koeficienty matice (b_{ik}) dostávame

$$b_{12} = b_{32} = 0.$$

$$b_{12} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}{a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}} = \frac{-a_{31}a_{23}}{a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}.$$

Z toho vyplýva $a_{23} = 0$.

Všetky členy matice (T) môžeme vydeliť koeficientom a_{22} bez toho, že by sa jej hodnosť zmenila. Preto ďalej môžeme písať

$$(H) = \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{a}_{31}}{a_{13}}; & -\dfrac{a_{33}\bar{a}_{12}}{a_{13}a_{31}} + \dfrac{\bar{a}_{32}}{a_{13}}; & -\dfrac{a_{33}\bar{a}_{13}}{a_{13}a_{31}} + \dfrac{\bar{a}_{33}}{a_{13}} \\ \dfrac{a_{12}\bar{a}_{31}}{a_{13}}; & \dfrac{a_{12}a_{33}\bar{a}_{12}}{a_{13}a_{31}} - \dfrac{a_{32}\bar{a}_{12}}{a_{31}} + 1 + \dfrac{a_{12}\bar{a}_{32}}{a_{13}}; & \dfrac{a_{12}a_{33}\bar{a}_{13}}{a_{13}a_{31}} - \dfrac{a_{32}\bar{a}_{13}}{a_{31}} + \dfrac{a_{12}\bar{a}_{33}}{a_{13}} \\ 0 & \dfrac{\bar{a}_{12}}{a_{31}} & \dfrac{\bar{a}_{13}}{a_{31}} \end{pmatrix}.$$

Porovnaním tejto matice s maticou (24) dostávame pre koeficienty a_{ik} tieto vzťahy:

$$\frac{a_{12}\bar{a}_{31}}{a_{13}} = \frac{\bar{a}_{12}}{a_{31}} = 0, \quad \text{t. j.} \quad a_{12} = 0;$$

$$\frac{\bar{a}_{31}}{a_{13}} = 1 = \frac{\bar{a}_{13}}{a_{31}}, \quad \text{t. j.} \quad a_{13} = \bar{a}_{31};$$

$$\frac{\bar{a}_{32}}{a_{13}} = -\frac{a_{32}\bar{a}_{13}}{a_{31}}, \quad \text{t. j.} \quad \frac{\bar{a}_{32}}{a_{32}} = -a_{13};$$

$$-\frac{a_{33}\bar{a}_{13}}{a_{13}a_{31}} + \frac{\bar{a}_{33}}{a_{13}} = 0,$$

$$-\frac{a_{33}}{a_{13}} + \frac{\bar{a}_{33}}{a_{13}} = 0, \quad \text{t. j.} \quad -a_{33} + \bar{a}_{33} = 0.$$

V tomto prípade môžeme antireciprocitu nazvať typom III a vyjadriť ju rovnicami:

$$u_1' = -\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}\bar{x}_3, \qquad u_2' = \bar{x}_2, \qquad u_3' = -\frac{\alpha_1}{\bar{\alpha}_1}\bar{x}_1 + \alpha_1\bar{x}_2 + \alpha_2\bar{x}_3, \tag{25}$$

kde

$$\alpha_2 = \bar{\alpha}_2.$$

(3) Podobne ako v [3] pre klasifikáciu reciprocity.

9. Nakoniec urobme prehľad jednotlivých typov antireciprocity v komplexnej rovine.

Antireciprocita typu Ia:

$$u_1' = \alpha_1\bar{x}_1, \qquad u_2' = \alpha_2\bar{x}_2, \qquad u_3' = \alpha_3\bar{x}_3,$$

kde

$$\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} \neq \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2} \neq \frac{\bar{\alpha}_3}{\alpha_3} \neq \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}.$$

Involutórne páry bodov a priamok sú:

$$(A(1, 0, 0),\ a'(1, 0, 0)),$$
$$(B(0, 1, 0),\ b'(0, 1, 0)),$$
$$(C(0, 0, 1),\ c'(0, 0, 1)).$$

Antireciprocita typu Ib:

$$u_1' = \alpha_1\bar{x}_1, \qquad u_2' = \alpha_2\bar{x}_3, \qquad u_3' = \alpha_3\bar{x}_2,$$

kde

$$\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} \neq \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_3} \neq \frac{\bar{\alpha}_3}{\alpha_2} \neq \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1}.$$

$$(A(1, 0, 0),\ a'(1, 0, 0));\ (B(0, 1, 0),\ b'(0, 0, 1));\ (C(0, 0, 1),\ c'(0, 1, 0)).$$

Antireciprocita typu Ic:

$$u_1' = \alpha_1\bar{x}_1, \qquad u_2' = \alpha_2\bar{x}_2, \qquad u_3' = \alpha_3\bar{x}_3,$$

kde

$$\alpha_1 = \bar{\alpha}_1, \qquad \alpha_2 = \bar{\alpha}_2, \qquad \alpha_3 \neq \bar{\alpha}_3.$$

Involutórne páry odpovedajúcich si prvkov:

Všetky priamky idúce bodom $C(0, 0, 1)$ a im odpovedajúce body, ležiace na priamke $c'(0, 0, 1)$, ako aj bod C a priamka c'. Ak existujú autokonjugované páry prvkov, tieto vypĺňujú reťazec k^1; potom je antireciprocita hyperbolická. Ak neobsahuje žiaden pár autokonjugovaných prvkov, je eliptická; to je v tom prípade, keď α_1 a α_2 majú rovnaké znamienko.

Antireciprocita typu Id – antipolarita:

$$u_1' = \alpha_1\bar{x}_1, \qquad u_2' = \alpha_2\bar{x}_2, \qquad u_3' = \alpha_3\bar{x}_3,$$

kde

$$\alpha_1 = \bar{\alpha}_1, \qquad \alpha_2 = \bar{\alpha}_2, \qquad \alpha_3 = \bar{\alpha}_3.$$

Ak α_1, α_2, α_3 sú rovnakého znamienka, antipolarita neobsahuje žiadne autokonjugované páry prvkov, je eliptická. Ak dva z týchto koeficientov majú rozdielne znamienka od tretieho koeficientu, vyplnia autokonjugované body hyperkuželosečku a hovoríme o antipolarite hyperbolickej.

Antireciprocita typu IIa:

$$u'_1 = \alpha_1 \bar{x}_2, \quad u'_2 = \bar{\alpha}_2 x_1 + \alpha_3 \bar{x}_2, \quad u'_3 = \bar{x}_3,$$

kde

$$\frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_1} = \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_2} \neq 1; \quad \bar{\alpha}_1 \alpha_3 = \alpha_2 \bar{\alpha}_3.$$

Involutórne páry odpovedajúcich si prvkov:

$$(A(1, 0, 0),\ a'(0, 1, 0)); \quad (B(0, 0, 1),\ b'(0, 0, 1)).$$

Antireciprocita typu II. b:

$$u'_1 = \alpha_1 \bar{x}_2, \quad u'_2 = \bar{\alpha}_1 \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2, \quad u'_3 = \bar{x}_3,$$

kde

$$\alpha_2 \neq \bar{\alpha}_2.$$

Involutórne si odpovedajúce páry prvkov sú všetky priamky idúce bodom $A(1, 0, 0)$ a im odpovedajúce body ležiace na priamke $a'(0, 1, 0)$, ako aj pár (A, a').

Antireciprocita typu III:

$$u'_1 = -\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} \bar{x}_3, \quad u'_2 = \bar{x}_2, \quad u'_3 = -\frac{\alpha_1}{\bar{\alpha}_1} \bar{x}_1 + \alpha_1 \bar{x}_2 + \alpha_2 \bar{x}_3,$$

kde

$$\alpha_2 = \bar{\alpha}_2.$$

Involutórne si odpovedajúce prvky:

$$(A(1, 0, 0),\ a'(0, 0, 1)).$$

LITERATÚRA

[1] Cartan E., *Leçons sur la géometrie projective complexe*, Paris 1950.
[2] Segre C., *Un nuovo campo di ricerche geometriche*, Nota III, Atti R. Accad. Sc. Torino *25* (1889), 592—612.
[3] Veblen O., Young J. W., *Projective geometry*, II. diel, Boston 1918.

Došlo 10. 11. 1962.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebnej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

DIE KLASSIFIZIERUNG DER ANTIREZIPROZITÄT IN DER KOMPLEXEN PROJEKTIVEN EBENE

Božena Macková

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Klassifizierung der Antireziprozität in der komplexen projektiven Ebene durchgefürt. Die einzelnen Typen sind je nachdem bestimmt, welche Formation die Hauptelemente dieser Transformation bilden. Bei der Untersuchung der Hauptelemente geht man aus folgender Erkentnisse aus: das Quadrat der Antireziprozität $\mathcal{T}$ ist die Homographie $\mathcal{H}$. Zu jedem Invariantpunkt M der Homographie $\mathcal{H}$ kann man eine solche Gerade m' finden, die auch in $\mathcal{H}$ invariant ist, so daß (M, m') Hauptelemente in der Antireziprozität $\mathcal{T}$ sind. Und umgekehrt, wenn die Antireziprozität $\mathcal{T}$ ein Paar von Elementen (M, m'), das einander involutorisch entspricht, enthält, sind diese Invariantelemente der Homografie $\mathcal{H}$.