MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS

ROČNÍK 14 1964 ČÍSLO 2

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СХЕМ БЕРНУЛЛИ

ИГОРЬ КЛУВАНЕК (Igor Kluvánek) и БЕЛОСЛАВ РИЕЧАН (Beloslav Riečan)

Братислава

Пусть X_0 – конечное множество состоящее из n элементов. Пусть A_0 – σ-алгебра всех его подмножеств и μ_0 – мера на A_0 принимающая на всяком одноточечном множестве значение $1/n$. Для $i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ положим $(X_i, A_i, \mu_i) = (X_0, A_0, \mu_0)$ и построим декартово произведение

$$(X, A, \mu) = \left(\mathop{\times}_{i=-\infty}^{\infty} X_i, \mathop{\times}_{i=-\infty}^{\infty} A_i, \mathop{\times}_{i=-\infty}^{\infty} \mu_i \right) \tag{1}$$

(см. [1], § 38). Пусть S – сдвиг в множестве X, т. е.

$$S(\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots) = (\ldots, x'_{-1}, x'_0, x'_1, \ldots), x'_i = x_{i+1} \ (i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots), \tag{2}$$

для всякой точки $x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots) \in X$. Преобразование S представляет меру сохраняющий автоморфизм σ-алгебры A (т. наз. автоморфизм Бернулли). Пусть (Y, B, ν) – другое, таким образом построенное пространство с мерой, но из множества Y_0 с m элементами, $m \neq n$, и T – соответствующий сдвиг в Y.

А. Н. Колмогоров показал в [2], что не существует изоморфизм Q (меру сохраняющее отображение, см. [1], § 39) пространства (X, A, μ) на (Y, B, ν), который произвел бы S в T (т. е. $S = Q^{-1}TQ$) даже пренебрегая множествами меры нуль. Тем самим разрешил А. Н. Колмогоров старую интересную проблему эргодической теории.

Но если не будем предполагать, что отображение Q сохраняет меру, но только измеримость и проводит S в T, можно было бы ожидать, что такое отображение существует. В этой заметке докажем, что отображение Q не существует даже при таких ослабленных условиях. Кроме этого „алгебраического" предложения приведем и несколько „геометрических" замечаний относительно роли множеств меры нуль в проблемах такого рода. Будем пользоваться результатами Я. Г. Синая [3].

1. Пусть A – булевская σ-алгебра и пусть S – автоморфизм σ-алгебры A. Пару (A, S) будем называть алгеброй с автоморфизмом. Пусть далее μ – положительная конечная мера на A и пусть автоморфизм S сохраняет меру μ, т. е.

$\mu(S^{-1}E) = \mu(E) = \mu(SF)$ для каждого $E \in A$. Тройка (A, μ, S) называется динамической системой. В дальнейшем максимальный элемент σ-алгебры обозначим через X и будем предполагать, что $\mu(X) = 1$. (Смысл неопределенных здесь понятий таков как в [1], § 40.)

Алгебры с автоморфизмом (A, S) и (B, T) называются изоморфными (или сопряженными), если существует изоморфизм Q σ-алгебры A на σ-алгебру B проводящий S в T, т. е. $S = Q^{-1}TQ$.

Динамические системы (A, μ, S) и (B, ν, T) называем изоморфными, если существует меру сохраняющий изоморфизм Q [т. е. $\nu(QE) = \mu(E)$] σ-алгебры A на σ-алгебру B проводящий S в T.

2. Разбиением в σ-алгебре A называется конечное множество P непересекающихся элементов σ-алгебры A, соединение которых есть максимальный элемент. Если S – автоморфизм σ-алгебры A, то SP означает разбиение в σ-алгебре A состоящее из всех элементов вида SE для $E \in P$.

Разбиение P в σ-алгебре A называется образующим разбиением алгебры с автоморфизмом (A, S), если A является наименьшей σ-алгеброй содержащей множество $\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} S^nP$.

Пусть (A, S) – алгебра с автоморфизмом. Если она не обладает никаким образующим разбиением, то положим $\chi(A, S) = \infty$. В другом случае положим

$$\chi(A, S) = \min \operatorname{card} P,$$

где минимум берется для всех образующих разбиений P алгебры с автоморфизмом (A, S) и card P обозначает число элементов разбиения P.

Число $\chi(A, S)$ называем характеристическим числом алгебры с автоморфизмом (A, S).

Из определения следует: Если (A, S) и (B, T) – изоморфные алгебры с автоморфизмом, то $\chi(A, S) = \chi(B, T)$. Другими словами: характеристическое число есть инвариант алгебры с автоморфизмом. Тем более, если (A, μ, S) и (B, ν, T) – изоморфные динамические системы, то $\chi(A, S) = \chi(B, T)$.

3. Если $P_1, P_2, \ldots, P_n$ – разбиения в σ-алгебре A, то $\bigwedge_{i=1}^{n} P_i$ означает разбиение состоящее из всех элементов $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$, $E_i \in P_i$.

Напомним определение энтропии динамической системы следуя Синаю [3]. Пусть (A, μ, S) динамическая система. Если P разбиение в σ-алгебре A, положим

$$H(P) = -\sum_{E \in P} \mu(E) \log \mu(E).$$

Далее

$$h(P, \mu, S) = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{r} H\Big(\bigwedge_{i=0}^{r-1} S^iP\Big).$$

На конец положим

$$h(A, \mu, S) = \sup h(P, \mu, S),$$

где точная верхняя грань берется через все разбиения в σ-алгебре A.

Я. Г. Синай в [3] доказал предложение: Если P образующее разбиение алгебры с автоморфизмом (A, S), то

$$h(P, \mu, S) = h(A, \mu, S).$$

Из известных теорем теории информации вытекает, что для произвольного разбиения P в σ-алгебре A

$$h(P, \mu, S) \leqq \log \operatorname{card} P.$$

Из приведенных утверждений немедленно вытекает, что если $\chi(A, S) < \infty$, то

$$h(A, \mu, S) \leqq \log \chi(A, S) \qquad (*)$$

Соотношение (*) имеет место для любой вероятностной меры μ на A, не обязательно положительной (т. е. не обязательно $\mu(E) \neq 0$ для $E \neq 0$).

4. Пусть (A, S) – алгебра с автоморфизмом. Пусть N – неподвижный относительно S σ-идеал в A, т. е. N есть подмножество A обладающее свойствами: 1. $E \in N, F \in A, F \subset E \Rightarrow F \in N$; 2. $E_1, E_2, \ldots \in N \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in N$; 3. $SN \subset N$. Построим фактор-алгебру A/N. Автоморфизм в A/N индуцированный автоморфизмом S обозначим тем самым знаком S без опасности недорозумления.

Очевидно

$$\chi(A/N, S) \leqq \chi(A, S).$$

5. Пусть X_0 – конечное множество, состоящее из n элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и пусть A_0 – σ-алгебра всех подмножеств X_0. Положим

$$X = \bigtimes_{i=-\infty}^{\infty} X_i, \quad A = \bigtimes_{i=-\infty}^{\infty} A_i,$$

где $X_i = X_0$, $A_i = A_0$ для $i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ Определим в X сдвиг S равенством (2). Если для всякого $E \in A$ положим $SE = \{Sx : x \in E\}$, то, очевидно, S – автоморфизм σ-алгебры A. Пару (A, S) в этом случае назовем алгеброй с автоформизмом Бернулли (образованной n элементами).

Пусть далее $p_1, p_2, \ldots, p_n$ – неотрицательные числа, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Пусть μ_0 – такая мера на A_0, что $\mu_0(\{a_i\}) = p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Положим

$$\mu = \bigtimes_{i=-\infty}^{\infty} \mu_i; \quad \mu_i = \mu_0, \quad i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$$

Далее положим $N_\mu = \{E : \mu(E) = 0, E \in A\}$ и $A_\mu = A/N_\mu$.

Динамическую систему (A_μ, μ, S) назовем бернуллиевской динамической системой. О мере μ и об этой динамической системе мы скажем, что они определены системой $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Справедливы утверждения:

Если мера μ определена системой $(1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$, то

$$\chi(A_\mu, S) = n.$$

Для доказательства сначала заметим, что $\chi(A_\mu, S) \leqq n$, потому, что разбиение, состоящее из ножеств $E_i = \{x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots) : x_0 = a_i\}$ является образующим разбиением алгебры с автоморфизмом (A_μ, S). Но вследствие (*) неравенство $\chi(A_\mu, S) < n$ не может иметь место, потому что, как известно, $h(A_\mu, \mu, S) = \log n$.

Не трудно даже доказать, что $\chi(A_\nu, S) = n$ для всякой меры ν на A эквивалентной мере μ определенной системой $(1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$.

Из приведенного утверждения вытекает далее, что

$$\chi(A, S) = n.$$

Снова очевидно, что $\chi(A, S) \leqq n$. Но $\chi(A, S) \geqq \chi(A_\mu, S)$ для всякой меры μ на A.

Вследствие того, что характеристическое число представляет инвариант алгебры с автоморфизмом, мы видим, что алгебра (A, S) с автоморфизмом Бернулли, образована n элементами, не может быть эквивалентной алгебре (B, T) с автоморфизмом Бернулли образованной m элементами для $m \neq n$. Далее, если мера μ определена системой $(1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$ и мера ν определена системой $(1/m, 1/m, \ldots, 1/m)$, то алгебры (A_μ, S) и (B_ν, T) с автоморфизмом не являются изоморфными.

6. Имея в виду утверждения приведенные в конце пункта 5 интересно заметить, что существуют изоморфные бернуллиевские динамические системы (A_μ, μ, S), (B_ν, ν, T), причем (A_μ, μ, S) определена системой $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ $(p_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n)$, (B_ν, ν, T) определена системой $(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ $(q_i > 0, i = 1, 2, \ldots, m)$ и $m \neq n$. Например, бернуллиевская система (A_μ, μ, S) определена системой $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$ изоморфна бурнеллиевской системе (B_ν, ν, T) определеной системой $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ (см. [4]). Это значит, что алгебры с автоморфизмом (A_μ, S), (B_ν, T) тоже изоморфны. Но в силу утверждений под пунктом 5, соответствующие алгебры с автоморфизмом (A, S) и (B, T) изоморфными не являются.

Далее, приведенная алгебра с автоморфизмом (A_μ, S) (μ – определенная системой $(\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8})$) не может быть изоморфной алгебре с автоморфизмом (A_π, S), если π – определена системой $(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$. Это значит, что меры μ и π не являются эквивалентными.

Но мера μ – декартого произведение счетного числа экземпляров меры μ_0 и π – декартого произведение счетного числа экземпляров меры π_0, причем μ_0 и π_0 эквивалентные меры. Тем самым построен пример показывающий, что декартого произведение бесконечного числа мер не сохраняет абсолютную непрерывность.

7. Из приведенных результатов вытекает еще утверждение:

Пусть (A_μ, μ, S) – бернуллиевская динамическая система. Равенство $h(A_\mu, \mu, S) = 0$ справедливо тогда и только тогда, если $\chi(A_\mu, S) = 1$.

Действительно, если $\chi(A_\mu, S) = 1$, то $0 \leqq h(A_\mu, \mu, S) \leqq \log 1 = 0$. Пусть $h(A_\mu, \mu, S) = 0$. В силу цитированного утверждения Синая следует, что

$$H(P) = h(P, \mu, S) = h(A_\mu, \mu, S) = 0,$$

где P состоит из множеств $\{(\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots) : x_0 = a_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
Но

$$H(P) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_0(\{a_i\}) \log \mu_0(\{a_i\}) = 0$$

тогда, и только тогда, если одно из чисел $\mu_0(\{a_i\})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, равняется 1. Потом очевидно $\chi(A_\mu, S) = 1$.

Пусть теперь (A, S) – алгебра с автомарфизмом Бернулли образована двумя элементами. В силу приведенного утверждения и в силу неравенства $\chi(A_\mu, S) \leqq 2$ для всякой меры μ на A, значение $\chi(A_\mu, S)$ однозначно определяется значением $h(A_\mu, \mu, S)$, а именно $\chi(A_\mu, S) = 1$, если $h(A_\mu, \mu, S) = 0$ и $\chi(A_\mu, S) = 2$, если $h(A_\mu, \mu, S) > 0$. В этом случае справедлива формула

$$\chi(A_\mu, S) = -[-2^{h(A_\mu, \mu, S)}]$$

(здесь $[y]$ – целая часть числа y; т. е. наибольшее целое число, не превосходящее y; число 2 – основа логарифмов исползованных при определении числа $h(A_\mu, \mu, S)$). Интересно было бы установить, справедлива ли эта формула в общем случае.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Halmos P. R., *Measure Theory*, New York 1950 (по русски: Халмош П. Р., *Теория меры*, Москва 1955).

[2] Колмогоров А. Н., *Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега*, ДАН СССР *119* (1958), 861—864.

[3] Синай Я. Г., *Об энтропии метрического автоморфизма*, ДАН СССР *124* (1959), 980—983.
[4] Мешалкин Л. Д., *Один случай изоморфизма схем Бернулли*, ДАН СССР *128* (1959), 41—44.

Поступило 23. 3. 1962 г.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Elektrotechnickej fakulty a Stavebnej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

SOME PROPERTIES OF BERNOULLI SCHEMAS

Igor Kluvánek and Beloslav Riečan

Summary

A couple (A, S), where A is a Boolean σ-algebra and S its automorphism, is called an algebra with automorphism. A generating decomposition in (A, S) is such a set P of pairwise disjoint elements of A with the sum equal to the maximal element of A that A is the minimal σ-algebra containing all elements of the form S^iE for $E \in P$ and $i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$. Denote by $\chi(A, S)$ the minimal number of elements in generating decompositions in (A, S). $\chi(A, S)$ is an invariant of algebra with automorphism, i. e. if (A, S) and (B, T) are two algebras with automorphism and there exists an isomorphism Q of A on B such that $S = Q^{-1}TQ$, then $\chi(A, S) = \chi(B, T)$.

Let X_0 be a set with n elements, A_0 the σ-algebra of all its subsets and μ_0 the measure on A_0 defined by the condition $\mu_0(\{x\}) = 1/n$ for every $x \in X_0$. Put $X_i = X_0$, $A_i = A_0$, $\mu_i = \mu_0$ for every $i = \ldots, -1, 0, 1, \ldots$. Let (X, A, μ) be defined by (1) (see [1]). Denote by A_μ the quotient σ-algebra of A modulo sets of zero measure. Define the transformation S in X by (2). Transformation S induces in A and in A_μ an automorphism denoted by S, too. Using the results of [2] and [3] it is proved that $\chi(A, S) = n$ and $\chi(A_\mu, S) = n$. It follows, if (B, T) resp. (B_ν, T) is an analoguously constructed algebra with automorphism from a set Y^0 with m elements, $m \neq n$, then (A, S) and (B, T) resp. (A_μ, S) and (B_ν, T) are not isomorphic.