

ТЕОРИЯ ВЕРТИКАЛЬНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ШАРА ДЛЯ СЛУЧАЯ ДВУХ СЛОЕВ

КЛЕМЕНТ РОСА (Klement Rosa), Братислава

В теории вертикального электрического зондирования вообще предполагается, что поверхность Земли является плоскостью. Только при этом предположении действительны известные формулы [1] (стр. 79) для случая двух, трех и больше слоев. Но предположение о том, что поверхность Земли является плоскостью справедливо только в том случае, если расстояния между отдельными электродами достаточно малы. Можно ожидать, что при больших расстояниях, превышающих десятки километров, начнет практически сказываться эффект кривизны земной поверхности, и поэтому в данном случае будет более правильным считать поверхность Земли шарообразной.

Целью настоящей работы является разработка теории вертикального электрического зондирования при предположении, что зондирование проводится на поверхности шара. Мы ограничимся при этом случаем двух слоев. Естественно, что в данном случае „слой“ будет ограничен не двумя плоскостями, а двумя концентрическими шарообразными поверхностями.

Сформулируем сначала вспомогательную задачу (рис. 1):

В бесконечном пространстве имеем две концентрические шарообразные поверхности с радиусами $r = a$, $r = b$, где $a > b$. Удельное электрическое сопротивление ϱ среды пусть задано в следующем виде:

$$\varrho = \begin{cases} \varrho_0 & \text{для } a < r, \\ \varrho_1 & \text{для } b < r < a, \\ \varrho_2 & \text{для } 0 \leq r < b. \end{cases}$$

Точечный электрод A пусть находится в среде ϱ_0 на расстоянии $r_0 > a$ от центра шара и пусть через него приводится электрический ток постоянной силы I . Требуется вычислить потенциалы φ_0 , φ_1 и φ_2 результирующего поля электрического тока.

Для решения этой задачи мы введем обыкновенную сферическую систему координат (r, ϑ, φ) так, чтобы начало системы совпадало с центром шара и чтобы ее полярная ось проходила через точечный источник электрического поля A . Тогда решение задачи получается в виде

$$\varphi_0 = \frac{I\varrho_0}{4\pi R_{AM}} + \frac{I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \frac{P_n(\cos \vartheta)}{r_0^{n+1}}, \quad a \leq r,$$

$$\varphi_1 = \frac{I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[B_n \left(\frac{r}{b}\right)^n + C_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \right] \frac{P_n(\cos \vartheta)}{r_0^{n+1}}, \quad b \leq r \leq a,$$

$$\varphi_2 = \frac{I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} D_n \left(\frac{r}{b}\right)^n \frac{P_n(\cos \vartheta)}{r_0^{n+1}}, \quad 0 \leq r \leq b,$$

где символы $P_n(\cos \vartheta)$ представляют полиномы Лежандра, и отдельные коэффициенты имеют значения:

$$B_n = \frac{(2n+1)\varrho_0\varrho_1\Delta_{01}b^n}{1+n(n+1)\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}(\varrho_0-\varrho_1)(\varrho_1-\varrho_2)\Delta_{01}\Delta_{12}},$$

$$C_n = n(\varrho_2-\varrho_1)\Delta_{12}\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}B_n,$$

$$D_n = (2n+1)\varrho_2\Delta_{12}B_n, \quad A_n = \left(\frac{a}{b}\right)^n B_n + C_n - \varrho_0 a^n,$$

$$\Delta_{01} = \frac{1}{n\varrho_0 + (n+1)\varrho_1}, \quad \Delta_{12} = \frac{1}{n\varrho_1 + (n+1)\varrho_2}.$$

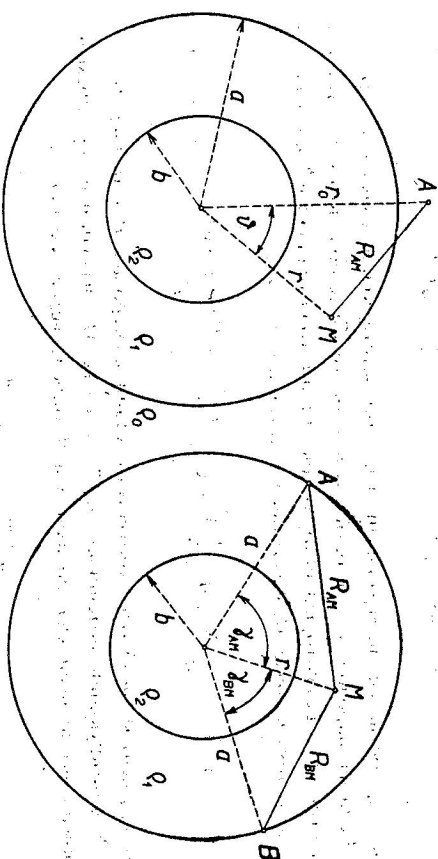


Рис. 1.

Рис. 2.

Решение аналогичной электростатической задачи можно найти, правда, с другими обозначениями, например в работе [2] (стр. 83 и 428). Но в указанной работе результат содержит несколько опечаток в выражении для коэффициента B_n .

С первого взгляда заметно, что потенциальная функция φ_0 является гармонической в области $a \leq r$ за исключением точки A , где находится источник поля, и что с возрастающим r сходится к нулю; далее заметно, что потенциальные функции φ_1 и φ_2 являются гармоническими в областях $b \leq r \leq a$ и $0 \leq r \leq b$ соответственно. Непосредственной подстановкой можно легко убедиться в том, что приведенные функции на границе разных сред удовлетворяют краевым условиям

$$(\varphi_0)_{r=a} = (\varphi_1)_{r=a}, \quad (\varphi_1)_{r=b} = (\varphi_2)_{r=b},$$

$$\frac{1}{\varrho_0} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{1}{\varrho_1} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)_{r=a}, \quad \frac{1}{\varrho_1} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)_{r=b} = \frac{1}{\varrho_2} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right)_{r=b}.$$

В дальнейшем рассмотрении мы будем интересоваться прежде всего потенциальной функцией φ_1 в области $b \leq r \leq a$. Мы проследим, как будет меняться эта функция, если передвигать источник A сначала вдоль полярной оси вплоть до поверхности шара $r = a$ (т. е. когда станет $r_0 = a$), и дальше, если сдвинуть источник по поверхности шара $r = a$ так, чтобы занял общее положение по отношению к первоначальной полярной оси (рис. 2).

Тогда потенциал $\varphi_1^{(A)}$, вызванный в точке M электродом A , будет

$$\varphi_1^{(A)} = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[B_n \left(\frac{r}{b} \right)^n + C_n \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \right] \frac{P_n(\cos \gamma_{AM})}{a^{n+1}}, \quad b \leq r < a,$$

где γ_{AM} обозначает центральный угол, соответствующий точкам A и M .

Если на шаровой поверхности $r = a$ поместим в ее общую точку питающий электрод B , через который выйдет ток силой I , то потенциал $\varphi_1^{(B)}$ поля электрического тока в точке M , вызванный электродом B , будет

$$\varphi_1^{(B)} = -\frac{I}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[B_n \left(\frac{r}{b} \right)^n + C_n \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \right] \frac{P_n(\cos \gamma_{BM})}{a^{n+1}}, \quad b \leq r < a,$$

где γ_{BM} центральный угол, соответствующий электродам B и M (рис. 2).

Результатирующий потенциал $\varphi_1^{(A,B)}$ в точке M , вызванный одновременно обоими питающими электродами A и B , определяется суммой

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(A,B)} &= \varphi_1^{(A)} + \varphi_1^{(B)} = \\ &= \frac{I}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \left(\frac{r}{b} \right)^n + C_n \left(\frac{a}{r} \right)^{n+1} \right] \frac{P_n(\cos \gamma_{AM}) - P_n(\cos \gamma_{BM})}{a^{n+1}}, \quad b \leq r < a, \quad (1) \end{aligned}$$

где суммирование начинается только с $n = 1$, поскольку члены с $n = 0$ сокращаются.

Перейдем теперь к случаю шара, окруженного диэлектриком, податая при

этом $\varrho_0 = \infty$. Обозначив потенциал $\varphi_1^{(A,B)}$ для краткости U_1 , после несложных вычислений мы получим

$$U_1 = \frac{I\varrho_1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(E_n \frac{r^n}{a^{n+1}} + F_n \frac{b^n}{r^{n+1}} \right) [P_n(\cos \gamma_{AM}) - P_n(\cos \gamma_{BM})], \quad b \leq r < a, \quad (2)$$

где

$$E_n = \frac{2n+1}{n+n(n+1)\left(\frac{b}{a}\right)^{2n+1}(\varrho_1 - \varrho_2)A_{12}}, \quad F_n = n(\varrho_2 - \varrho_1)A_{12}\left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}E_n.$$

Перед тем, как приступить к дальнейшему преобразованию выведенной формулы, будет интересно рассмотреть в краткости, каким способом потенциал U_1 удовлетворяет краевым условиям на границе $r = a$. Как известно, компонент j вектора плотности тока в направлении нормали к шаровой поверхности $r = a$ должен быть на границе $r = a$ равен нулю во всех точках, за исключением тех, в которых находится питающие электроды A и B . Значит, должно быть

$$j_r = -\frac{1}{\varrho_1} \lim_{r \rightarrow a-0} \frac{\partial U_1}{\partial r} = 0 \quad \text{для всех} \quad \gamma_{AM} \neq 0, \quad \gamma_{BM} \neq 0.$$

После простых вычислений мы получаем

$$\lim_{r \rightarrow a-0} \frac{\partial U_1}{\partial r} = \frac{I\varrho_1}{4\pi a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \gamma_{AM}) - \frac{I\varrho_1}{4\pi a^2} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \gamma_{BM}). \quad (3)$$

Оба бесконечных ряда, которые здесь фигурируют, являются расходящимися. Но можно легко показать, что обобщенная сумма бесконечного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos \gamma)$$

в смысле Пуассона равна нулю для всех $\gamma \neq 0$. Это сразу вытекает из [3] (стр. 326), где

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) h^n P_n(\cos \gamma) = \frac{1-h^2}{(1-2h \cos \gamma + h^2)^{3/2}}, \quad \begin{aligned} 0 < h < 1, \\ 0 \leq \gamma \leq \pi, \end{aligned} \quad (4)$$

если здесь взять предел для $h \rightarrow 1$.

Из соотношения (2) можно легко вывести потенциал для некоторых частных случаев. Например в случае однородного проводящего шара достаточно положить $\varrho_1 = \varrho_2$ и мы сразу получаем

$$(U_1)_{\varrho_1=\varrho_2} = \frac{I\varrho_1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} \frac{r^n}{a^{n+1}} [P_n(\cos \gamma_{AM}) - P_n(\cos \gamma_{BM})], \quad \begin{aligned} 0 \leq r < a, \\ \varrho_1 = \varrho_2, \end{aligned} \quad (5)$$

что совпадает с результатом в [4]. Если, кроме того, поместим питающие электроды A и B в специальные положения на диаметре шара (т. е. на его полюсах, где $\gamma_{AM} + \gamma_{BM} = \pi$), то результирующий потенциал V_1 будет

$$V_1 = \frac{I\varrho_1}{2\pi a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4k+3}{2k+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1} P_{2k+1}(\cos \gamma_{AM}), \quad 0 \leq r < a, \quad (6)$$

что совпадает с результатом в работе [5] (стр. 241). Если проверить потенциал V_1 , заданный соотношением (6) на краевом условии на границе $r = a$, то получим

$$\lim_{r \rightarrow a-0} \frac{\partial V_1}{\partial r} = \frac{I\varrho_1}{2\pi a^2} \sum_{k=0}^{\infty} (4k+3) P_{2k+1}(\cos \gamma_{AM}). \quad (7)$$

Бесконечный ряд (7) расходится, но его обобщенная сумма в смысле Пуассона равняется нулю для всех $\gamma_{AM} \neq 0, \gamma_{AM} \neq \pi$. Это нетрудно доказать с помощью известного соотношения

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) h^n P_n(\cos \gamma) = \frac{1-h^2}{(1+2h \cos \gamma + h^2)^{3/2}}, \quad 0 < h < 1, \quad 0 \leq \gamma \leq \pi, \quad (8)$$

и соотношения (4), если образовать их разность и взять предел для $h \rightarrow 1$. Вернемся теперь к общему соотношению (2), и в выражении, фигурирующем на его правой стороне, выделим ту его часть, которая соответствовала бы потенциалу в случае однородного шара, т. е. для $\varrho_1 = \varrho_2$. Соответствующий потенциал $(U_1)_{\varrho_1=\varrho_2}$ мы уже получили в уравнении (5). Таким образом, соотношение (2) можно писать в виде

$$U_1 = (U_1)_{\varrho_1=\varrho_2} + W_1, \quad (9)$$

где

$$(U_1)_{\varrho_1=\varrho_2} = \frac{I\varrho_1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} \frac{r^n}{a^{n+1}} [P_n(\cos \gamma_{AM}) - P_n(\cos \gamma_{BM})], \quad 0 \leq r < a,$$

$$W_1 = \frac{I\varrho_1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(E_n - \frac{2n+1}{n} \right) \frac{r^n}{a^{n+1}} + F_n \frac{b^n}{r^{n+1}} \right] [P_n(\cos \gamma_{AM}) - P_n(\cos \gamma_{BM})], \quad (10)$$

$b \leq r < a$.

Бесконечный ряд $(U_1)_{\varrho_1=\varrho_2}$ можно выразить в замкнутом виде. Для этой цели разложим выражения $1/R_{AM}$ и $1/R_{BM}$ (рис. 2) в ряд по полиномам Лежандра для $r < a$ и тогда потенциал $(U_1)_{\varrho_1=\varrho_2}$ можно писать в виде

$$(U_1)_{\varrho_1=\varrho_2} = \frac{I\varrho_1}{2\pi} \left(\frac{1}{R_{AM}} - \frac{1}{R_{BM}} \right) + \frac{I\varrho_1}{4\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^n [P_n(\cos \gamma_{AM}) - P_n(\cos \gamma_{BM})].$$

Суммирование бесконечного ряда

$$f(r) = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{a} \right)^n [P_n(\cos \gamma_{AM}) - P_n(\cos \gamma_{BM})]$$

мы проведем следующим образом: сначала его продифференцируем по r , потом умножаем его на r , и после преобразования интегрируем. Таким образом мы получим

$$f(r) = \int_0^r \left(\frac{1}{R_{AM}} - \frac{1}{R_{BM}} \right) \frac{dr}{r}.$$

После интегрирования мы наконеч получаем

$$(U_1)_{\varrho_1=\varrho_2} = \frac{I\varrho_1}{2\pi} \left(\frac{1}{R_{AM}} - \frac{1}{R_{BM}} \right) - \frac{I\varrho_1}{4\pi a} \ln \frac{R_{AM} + a - r \cos \gamma_{AM}}{R_{BM} + a - r \cos \gamma_{BM}}, \quad 0 \leq r \leq a, \quad (11)$$

где $0 \leq \gamma_{AM} \leq \pi, 0 \leq \gamma_{BM} \leq \pi$.

Мы рассматривали бесконечный ряд (10) в промежутке $b \leq r < a$. Теперь мы покажем, что ряд сходится также и для $r = a$. Мы имеем

$$(W_1)_{r=a} = \frac{I\varrho_1}{4\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2}{n} \frac{G_n}{1-(n+1)G_n} [P_n(\cos \gamma_{AM}) - P_n(\cos \gamma_{BM})], \quad (12)$$

где

$$G_n = (\varrho_2 - \varrho_1) A_{12} \left(\frac{b}{a} \right)^{2n+1},$$

Вспомогательный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2}{n} \frac{G_n}{1-(n+1)G_n}$$

сходится по условию Даламбера. Но тогда сходится также и ряд (12), поскольку имеем $|P_n(\cos \gamma_{AM})| \leq 1, |P_n(\cos \gamma_{BM})| \leq 1$.

Это значит, что соотношение (9) мы можем писать для замкнутого промежутка $b \leq r \leq a$ в следующем виде:

$$U_1 = \frac{I\varrho_1}{2\pi} \left(\frac{1}{R_{AM}} - \frac{1}{R_{BM}} \right) - \frac{I\varrho_1}{4\pi a} \ln \frac{R_{AM} + a - r \cos \gamma_{AM}}{R_{BM} + a - r \cos \gamma_{BM}} + \frac{I\varrho_1}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(E_n - \frac{2n+1}{n} \right) \frac{r^n}{a^{n+1}} + F_n \frac{b^n}{r^{n+1}} \right] [P_n(\cos \gamma_{AM}) - P_n(\cos \gamma_{BM})], \quad (13)$$

$b \leq r \leq a$.

Нетрудно убедиться в том, что потенциал U_1 , определенный соотношением (13), удовлетворяет дифференциальному уравнению Лапласа во всех точках области $b \leq r \leq a$, за исключением точек, в которых находятся питающие электроды A и B . На поверхности шара $r = a$ потенциал U_1 тождественно удовлетворяет краевому условию

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial r} \right)_{r=a} = 0.$$

Мы используем то обстоятельство, что выражение (13) для потенциала U , справедливо также и для $r = a$. Для положения приемного электрода M на поверхности шара мы получаем потом результирующее соотношение

$$(U)_{r=a} = \frac{I\varrho_1}{2\pi} \left(\frac{1}{R_{AM}} - \frac{1}{R_{BM}} \right) - \frac{I\varrho_1}{4\pi a} \ln \frac{\left(1 + \sin \frac{\gamma_{AM}}{2}\right) \sin \frac{\gamma_{AM}}{2}}{\left(1 + \sin \frac{\gamma_{BM}}{2}\right) \sin \frac{\gamma_{BM}}{2}} + \\ + \frac{I\varrho_1}{4\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)^2}{n} \cdot \frac{G_n}{1 - (n+1)G_n} [P_n(\cos \gamma_{AM}) - P_n(\cos \gamma_{BM})], \quad (14)$$

где

$$G_n = \frac{\varrho_2 - \varrho_1}{n\varrho_1 + (n+1)\varrho_2} \left(\frac{b}{a} \right)^{2n+1}$$

Полученная формула является теоретической основой для интерпретации вертикального электрического зондирования, проводимого на поверхности шара в случае двух "слоев". С ее помощью можно также легко вывести формулы, которые справедливы для любого расположения питающих и приемных электродов на поверхности шара. Наконец формула (14) может служить в качестве исходного пункта при рассмотрении вопроса, при каких больших расстояниях между электродами можно еще пренебрегать кривизной земной поверхности и считать ее плоскостью при вертикальном электрическом зондировании над двумя слоями.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Давнов В. В., *Электрическая разведка нефтяных и газовых месторождений*, Москва—Ленинград 1953.
- [2] Будаев В. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н., *Сборник задач по математической физике*, Москва 1956.
- [3] Гобсон Е. В., *Теория сферических и цилиндрических функций*, Москва 1952.
- [4] Rosa K., *Teória geoelektrických odporových metód na rovnici homogénnej izotopnej vodnej gule*, Štátnik geologických vied, Ústá geofyzika, Rača UG, sv. 1, Praha 1963.
- [5] Смайт В., *Электростатика и электродинамика*, Москва 1954.

Получено 16. 10. 1963.

ČSAV, Geofyzikálne laboratórium
Slovenskej akadémie vied
v Bratislave

THE THEORY OF VERTICAL ELECTRICAL DRILLING ON THE SURFACE OF THE SPHERE IN TWO-LAYER CASE

Klement Rosa

Summary

In the theory of vertical electrical drilling the earth's surface is generally considered to be a plane surface. This view is justified only in cases when the distances between the electrodes are sufficiently small. In case of long distances, i. e. when they exceed several dozens of kilometres, it may be expected that the curvature of the earth's surface will also practically exercise its influence. In this case it is better to consider the earth's surface to be spherical.

The aim of the present paper is to work out a theory of Vertical Electrical Drilling on the assumption of it being done on a spherical surface. Only the two-layer case is here treated.

The derived formula (14) represents the theoretical base for the interpretation of vertical electrical drilling done on a spherical surface in the two-layer case. Other relations applicable to arbitrary special arrangement of current electrodes as well as potential electrodes on a spherical surface can easily be arrived at by the help of formula (14). The given formula (14) can also be used as the starting-point for the analysis of the question — what distances between the electrodes are allowable in order that one still may neglect the effect of the curvature of the earth's surface.