

НЕЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СООТНОШЕНИЯ УРАВНЕНИИ ТРЕТЬЕГО НОМОГРАФИЧЕСКОГО ПОРЯДКА И ИХ АВТОМОРФНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

ИОСИФ А. ВИЛЬНЕР, Москва, ПАВЕЛ ГАЛАЙДА (Pavel Galajda), Кошице

§ 1. Настоящая работа является продолжением работы [22], где были исследованы неэлементарные номограммы уравнений третьего порядка. Полезно, наоборот, указать, насколько неэлементарными могут быть соотношения, допускающие простые номограммы, в том числе нулевого жанра.

Построенные И. А. Вильнером номограммы эллиптических интегралов первого рода с действительным и комплексным модулем позволяют с помощью элементарного вспомогательного вычисления суммы и, быть может, произведение комплексных чисел осуществлять псевдотеорему сложения эллиптических функций в комплексной области, т. е. решать уравнение

$$\sum_{i=1}^n M_i \int_0^{z_i} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k_i^2 \sin^2 \xi}} = \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}, \quad (1.1)$$

где $k, k_i, M_i, z_i (i = 1, 2, \dots, n)$ — заданные числа, а z — искомое (если $k_i \neq \text{const}$, будем иметь теорему сложения).

Если $n = 2$ и $k_i = k (i = 1, 2)$, будем иметь обычную форму теоремы сложения.

Если $\text{Im } M_i = \text{Im } z_i = \text{Im } k_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$, мы будем иметь теорему сложения в действительной области.

Пользуясь номограммами И. А. Вильнера (см. работу [6]), легко найти z . При этом, поскольку мы будем постоянно оперировать в действительной области, номограмма превратится в номограмму с фиксированной точкой ($b = \text{Im } z = q_0 = 0$), через которую постоянно будет проходить прямая линейный индекс. Равенство между всех модулей эллиптических интегралов при использовании номограммой не необходимо.

Можно, пожалуй, отметить, что для теорем сложения эллиптических функций как Якоби, так и Веерштрасса для действительной области можно построить и обычные номограммы даже на параллельных шкалах. Мы построим ряд

весьма сложных неэлементарных и элементарных соотношений, допускающих, однако, простые номограммы. Пусть имеем теорему сложения

$$\text{sn}(u \pm v) = \frac{\text{sn } u \text{ cn } v \text{ dn } v \pm \text{sn } v \text{ cn } u \text{ dn } u}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v}, \quad (1.2)$$

$$\text{cn}(u \pm v) = \frac{\text{cn } u \text{ cn } v \mp \text{sn } u \text{ sn } v \text{ dn } u \text{ dn } v}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v}, \quad (1.3)$$

$$\text{tn}(u \pm v) = \frac{\text{tn } u \text{ dn } v \pm \text{tn } v \text{ dn } u}{1 \mp \text{tn } u \text{ tn } v \text{ dn } u \text{ dn } v}, \quad (1.4)$$

$$\text{dn}(u \pm v) = \frac{\text{dn } u \text{ dn } v \mp k^2 \text{sn } u \text{ sn } v \text{ cn } u \text{ cn } v}{1 - k^2 \text{sn}^2 u \text{sn}^2 v}, \quad (1.5)$$

$$\wp(\mu + \nu) = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp' \mu \mp \wp' \nu}{\wp \mu - \wp \nu} \right)^2 - \wp \mu - \wp \nu. \quad (1.6)$$

Положим:

$$u = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}}, \quad v = \int_0^y \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}}, \quad (1.7)$$

$$w = u \pm v, \quad w = \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}},$$

$$\mu = \int_0^{\alpha} \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - 8_2\xi - 8_3}}, \quad \nu = \int_0^{\beta} \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - 8_2\xi - 8_3}}, \quad (1.8)$$

$$A = \mu \pm \nu, \quad A = \int_0^{\alpha} \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - 8_2\xi - 8_3}}$$

Тогда уравнения (1.2)–(1.5) переищутся так:

$$\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}} \pm \int_0^y \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}} = \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2)}}, \quad (1.9)$$

а уравнение (1.6) переписывается так:

$$\int_{\infty}^{\alpha} \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}} \pm \int_{\infty}^{\beta} \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}} = \int_{\infty}^{\sigma} \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}}. \quad (1.10)$$

Мы получим, очевидно, представление равенств (1.2)–(1.6) в протабулированных функциях в виде уравнений типа

$$f_1(x) + f_2(y) = f_3(t), \quad (1.11)$$

$$\varphi_1(\alpha) + \varphi_2(\beta) = \varphi_3(\sigma), \quad (1.12)$$

принатдежащих ко второй канонической форме уравнения третьего номографического порядка, и значит номографируемых на номограммах нулевого жанра или, если угодно, на конических номограммах.

Если бы мы пожелали номографировать в действительной области теорему сложения, соответствующую более общему равенству (1.1) мы бы пришли к тем же выводам, но уравнения, аналогичные (1.2)–(1.5) значительно усложнились бы.

Из изложенного видно, что функции двух переменных стоящие в правых частях уравнений (1.2)–(1.8) допускают номограммы нулевого жанра.

Мы придем к номографированию подобного рода сложных но непроязвельных выражений, если станем на путь применения теоремы сложения Абеля для ультратранзитивных интегралов, или — более обще — если будем исходить из мемуара, в котором Абель, далее обобщая теорему сложения Эйлера (1761 г.), показал, что определенная совокупность интегралов вида $\int f(x; y) dx$, где f — рациональная функция, а y — корень какого-нибудь алгебраического уравнения с коэффициентами целыми рациональными функциями от x , может быть выражена алгебраическими и логарифмическими функциями. Если

$$\psi(x) = \int f(x; y) dx \quad (1.13)$$

есть абелев интеграл, то в силу абелевой теоремы должны иметь

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \dots + \psi(x_n) = V, \quad (1.14)$$

где V — рационально логарифмическая функция, причем число этих интегралов произвольно.

Если мы сложим несколько таких интегралов в произвольном количестве, то, вообще говоря, их сумма не выразится конечно рационально логарифмической функцией, но выразится с точностью до этой функции суммой, вообще

говоря, r таких интегралов, где число r есть жанр кривой (Клебш) $f(x, y) = 0$. Случай жанра нуль (уникальная кривая) является тривиальным.

При $r = 1$ мы приходим к рассмотренному случаю эллиптических функций, когда сумма интегралов выражается всегда через один интеграл и т. д. Что же касается до аддитивной рационально-логарифмической части абелевой теоремы, то она как-раз представляет наибольшие номографические затруднения, но при определенных ограничениях на строение функции $f(x; y)$ она исчезает, превращаясь в постоянную. Важным с точки зрения номографии и теории абелевых интегралов является получение наиболее общей характеристики того, что этот член V не нарушает номографируемости абелевой теоремы. (1) В рассмотренном выше случае это имело место. Ниже мы увидим, что это всегда имеет место для интегралов вида

$$\int \frac{P(x) dx}{\sqrt{ax + bx - cx^2}},$$

где $P(x)$ — полином. Не то будет, если под корнем многочлен выше второй степени.

В качестве нового примера рассмотрим соотношение

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{\sqrt{4y_1^3 + ay_1 + b - \sqrt{4y_2^3 + ay_2 + b}}}{y_1 - y_2} \right)^2. \quad (1.15)$$

Пологая $g_2 = -a$, $g_3 = -b$, строим функции

$$x_i = \int_{\infty}^{y_i} \frac{d\xi}{\sqrt{4\xi^3 - g_2\xi - g_3}} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.16)$$

$$x_1 + x_2 = x_3, \quad (1.17)$$

Значит

т. е. сложное соотношение (1.15) легко номографируется. Подобные же примеры без труда теперь можем построить, исходя из теорем сложения (1.2)–(1.6). Приведем интересные номографируемые соотношения, предоставив читателю в каждом случае построить определитель Массо и найти уравнения чисел и жанр номограммы.

Номографируемые следующие соотношения в эллиптических функциях:

$$y = \operatorname{tn}(u + v) \operatorname{tn}(u - v) \operatorname{dn}^2 u = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v}, \quad (1.18)$$

(1) В простейшем случае это будет иметь место при условии $\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} = 0$ ($i \neq j = 1, 2, \dots, n$).

$$y = \frac{\operatorname{dn}(u+v) + \operatorname{dn}(u-v)}{\operatorname{dn}(u+v) - \operatorname{dn}(u-v)} = -\frac{\operatorname{dn} u}{k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u} \frac{\operatorname{dn} v}{\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v}, \quad (1.19)$$

$$y = \frac{\operatorname{dn}(u+v)}{\operatorname{dn}(u-v)}, \quad y = \frac{\operatorname{sn}(u+v)}{\operatorname{sn}(u-v)}, \quad y = \frac{\operatorname{cn}(u+v)}{\operatorname{cn}(u-v)}, \quad (2) \quad (1.20)$$

$$y = \frac{(1 \pm \operatorname{sn}(u+v))(1 \pm \operatorname{sn}(u-v))}{1 + \operatorname{sn}(u+v) \operatorname{sn}(u-v)} = \frac{(\operatorname{sn} u \pm \operatorname{sn} v)^2}{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{cn}^2 v}, \quad (1.21)$$

$$y = \frac{1 + \operatorname{sn}(u+v) \operatorname{sn}(u-v)}{1 + \operatorname{dn}(u+v) \operatorname{dn}(u-v)} = \frac{\operatorname{cn}^2 u + \operatorname{cn}^2 v}{\operatorname{dn}^2 u + \operatorname{dn}^2 v}. \quad (1.22)$$

Это соотношение между y , u и v — нулевого жанра.
Уравнения

$$y = \frac{\operatorname{dn}(u)}{\operatorname{dn}(v)} \operatorname{tn}(u \pm v) = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \pm \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}{\operatorname{cn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v}, \quad (1.23)$$

$$y = \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \operatorname{tn}(u \pm v) = \frac{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \mp \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v}. \quad (1.24)$$

Также номографируемые соотношения пятого порядка. Соотношение

$$y = \frac{\operatorname{sn} u + \operatorname{cn} v}{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u} \equiv \frac{1 + \operatorname{cn}(u+v)}{\operatorname{sn}(u+v)} \quad (1.25)$$

определяет функцию нулевого жанра.

Причина, вследствие которой все функции, обладающие теоремами сложения (не только алгебраическими, как эллиптические) номографируемы, заключается в том, что номографируемо дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\varphi_1(x) \psi_1(y) \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi_2(x) \psi_2(y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (1.26)$$

понимая под номографируемостью дифференциального уравнения (в данном случае) номографируемость любого его частного интеграла.

(2) Номографируемость двенадцати функций Якоби—Глешера $y = \operatorname{sc}, \operatorname{cs}, \operatorname{sd}, \operatorname{ds}, \operatorname{cd}, \operatorname{dc}, \operatorname{sn}, \operatorname{ns}, \operatorname{cn}, \operatorname{dn}, \operatorname{nd}$ от аргумента $(u+v)$ при модуле k является тривиальным фактом. Но стоит только заменить v на v' (и y на y' на $P+q'$), как эта теорема делается, вообще говоря, неверной. Но интегралы и логарифмы этих функций (см. теорему И. А. Вильнера об интеграле и логарифме) номографируемы.

В этом же смысле можем говорить о номографируемости соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения характеристик

$$\frac{dx}{\varphi_1(x) \varphi_2(x)} = \frac{dy}{\psi_1(y) \psi_2(y)}, \quad (1.27)$$

частным случаем которого является уравнение Эйлера

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{dy}{\sqrt{Y}} = 0, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{X}} + \int \frac{dy}{\sqrt{Y}} = \varphi(z), \quad (1.28)$$

где X и Y — полиномы четвертой степени, откуда и получаем номографируемость соответствующих алгебраических теорем сложения на номограммах нулевого жанра.

Вот еще номографируемые соотношения

$$2 + k^2(x^2 + y^2 + z^2) + 2\sqrt{(1 - k^2x^2)(1 - k^2y^2)(1 - k^2z^2)} = k^4x^2y^2z^2. \quad (1.29)$$

Действительно, полагая

$$x = \operatorname{sn} u, \quad y = \operatorname{sn} v, \quad z = \operatorname{sn} w \quad (1.30)$$

при модуле, равном k , получим

$$1 - \operatorname{dn}^2 u - \operatorname{dn}^2 v - \operatorname{dn}^2 w + 2 \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \operatorname{dn} w = k^4 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v \operatorname{sn}^2 w, \quad (1.31)$$

из которого следует, что

$$u + v + w = 0, \quad (1.32)$$

т. е. данное соотношение нулевого жанра. Номографируемо и нулевого жанра уравнение

$$y = \frac{1 + \operatorname{cn}(u+v) \operatorname{cn}(u-v)}{1 + \operatorname{dn}(u+v) \operatorname{dn}(u-v)}, \quad (1.33)$$

т. к. правая часть есть функция от $\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{sn}^2 v$. Действительно, преобразуя найдем

$$y = \frac{\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 v}{\operatorname{dn}^2 u + \operatorname{dn}^2 v} = \frac{\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 v}{2k'^2 + k^2(\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 v)}. \quad (1.34)$$

Можно указать аналогичные соотношения для номограмм первого жанра в трехмерном пространстве, что мы представим читателю.

Можно построить ряд анаморфозируемых алгебраических зависимостей, связанных с теоремой сложения.

Уравнение

$$x(ay^4 + by^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \pm y(ax^4 + bx^2 + c)^{\frac{1}{2}} = z(ax^2y^2 - 1) \quad (1.35)$$

или

$$(ax^2y^2 - 1)z^4 = 2(x^2 + y^2)(ax^2y^2 + 1) + 4bx^2y^2z^2 - (x^2 - y^2)^2 \quad (1.36)$$

номографирруется на S_3 , т. к. это соотношение можно заменить уравнением

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{ax^4 + bx^2 + c}} \mp \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{ay^4 + by^4 + c}} \pm \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{az^4 + bz^2 + c}} = 0. \quad (1.37)$$

Возьмем еще симметричное соотношение

$$(xy + yz + zx)^2 = 4(xyz + \beta)(x + y + z). \quad (1.38)$$

Это соотношение номографировано на S_3 , т. к. его можно записать так:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{x^3 + \beta}} \mp \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y^3 + \beta}} = \mp \int_0^{\varphi(z)} \frac{dz}{\sqrt{z^3 + \beta}}, \quad (1.39)$$

где $\varphi(z)$ определяется из уравнения

$$\varphi^2(z)z^2 + 4\varphi(z)\beta + 4\beta z = 0. \quad (1.40)$$

Равносильные соотношения

$$\begin{aligned} & \sqrt{a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4} \pm \sqrt{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4} = \\ & = (x - y)^2 [a_4(x + y)^2 + a_3(x + y) + z], \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} & (x^2 \sqrt{a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4} \pm y^2 \sqrt{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4})^2 = \\ & = (x - y)^2 [x^2y^2z^2 + a_1xy(x + y) + a_0(x + y)^2] \end{aligned} \quad (1.42)$$

номографирujemy на S_3 , т. к. могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} & \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4}} \mp \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4}} = \\ & = \int_0^{\varphi(z)} \frac{dz}{\sqrt{a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + a_4z^4}}, \end{aligned} \quad (1.43)$$

где $\varphi(z)$ определяется тем, что при $x = 0$, $y = \varphi(z)$ и $\varphi(z)$ есть следовательно алгебраическая функция определяемая из заданного соотношения.

Что касается приведения к каноническому виду, то это иллюстрируется на примере д'Оканя (см. стр. 204 и 205 работы [10]).

Пусть

$$f_3 = f_1 f_2 + \sqrt{1 + f_1^2} \sqrt{1 + f_2^2}. \quad (1.44)$$

Рассматривая f_3 как параметр, получим, поскольку $df_3 = 0$

$$\left(f_2 + \varepsilon_1 \frac{f_1 \sqrt{1 + f_2^2}}{\sqrt{1 + f_1^2}} \right) df_1 + \left(f_1 + \varepsilon_1 \frac{f_2 \sqrt{1 + f_1^2}}{\sqrt{1 + f_2^2}} \right) df_2 = 0. \quad (1.45)$$

Сокращая на неравный нулю множитель, и интегрируя, найдем

$$\ln(f_1 + \sqrt{f_1^2 + 1}) + \varepsilon_1 \ln(f_2 + \sqrt{f_2^2 + 1}) = \varphi(f_3). \quad (1.46)$$

Но из данного соотношения видно, что при $f_1 = 0$

$$f_3 = \varepsilon_1 \sqrt{1 + f_2^2} \quad (1.47)$$

или

$$f_2 = \varepsilon \sqrt{1 + f_1^2}. \quad (1.48)$$

Полученное уравнение дает

$$\ln(\varepsilon \sqrt{f_2^2 - 1} + |f_3|) = \varphi(f_3). \quad (1.49)$$

Но

$$\operatorname{sgn} f_3 = \operatorname{sgn} \varepsilon_1. \quad (1.50)$$

Поэтому получим

$$\ln(f_1 + \sqrt{f_1^2 + 1}) + \varepsilon_1 \ln(f_2 + \sqrt{f_2^2 + 1}) = \ln(\varepsilon_1 f_3 + \varepsilon \sqrt{f_3^2 - 1}). \quad (1.51)$$

Этот пример рассматривал также Соро (стр. 108 работы [5]).

Рассмотрим теперь никем не рассматривавшийся пример.

$$z = \frac{x \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)} + \varepsilon y \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}}{1 - k^2 x^2 y^2}. \quad (1.52)$$

Считая z параметром, найдем после вычислений

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \left\{ \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)(1 - k^2 x^2)}(1 - k^2 y^2)(1 - k^2 x^2 y^2) + \right. \\ & \left. + \varepsilon [2k^2 x^2 + 2k^2 y^2 - k^2 x^2 y^2 - k^4 x^2 y^2 - k^2 - 1] \right\} : \\ & : (1 - k^2 x^2 y^2)^2 \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Аналогично найдем (по симметрии)

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \left\{ \sqrt{(1 - y^2)(1 - x^2)(1 - k^2 y^2)}(1 - k^2 x^2)(1 - k^2 x^2 y^2) + \right. \\ & \left. + \varepsilon [2k^2 x^2 + 2k^2 y^2 - k^2 x^2 y^2 - k^4 x^2 y^2 - k^2 - 1] \right\} : \\ & : (1 - k^2 x^2 y^2)^2 \sqrt{(1 - y^2)(1 - k^2 y^2)}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Считая z параметром в зависимости x от y , получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0. \quad (1.55)$$

Подставляя в это равенство выражения $\partial z/\partial x$ и $\partial z/\partial y$, после упрощений получим

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \frac{\varepsilon dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} \quad (1.56)$$

или

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \varepsilon \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \varphi(y). \quad (1.57)$$

Принимая во внимание, что при $x = 0$ и $z = \varepsilon y$, получим

$$\varepsilon \int_0^{\varepsilon z} \frac{dy}{\sqrt{(1-k^2y^2)(1-y^2)}} = \varphi(z) \quad (1.58)$$

или

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{dy}{\sqrt{(1-k^2y^2)(1-y^2)}}, \quad (1.59)$$

получаем, следовательно, искомое представление

$$\begin{aligned} & \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} + \varepsilon \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-k^2y^2)(1-y^2)}} = \\ & = \int_z^x \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Заметим, что, если из (1.52) найти $\sqrt{1-z^2}$ и $\sqrt{1-k^2z^2}$ и заменить затем x, y, z на соответственно $\sin \varphi, \sin \psi$ и $\sin \zeta$, то получим шесть уравнений, номографируемых на номограмме нулевого жанра, и обрабатывая теорему сложения эллиптических интегралов в действительной области. Мы не будем выписывать эти сложные соотношения.

Рассмотрим теперь более сложное уравнение, связывающее комплексные переменные x, y, z :

$$\begin{aligned} & n^2x^4y^4z^4 - 2nx^4y^2z^3 - 2nx^2y^4z^2 - 2nx^2y^2z^4 - \\ & - 4m^2x^2y^2z^2 + x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Это уравнение — шестого номографического порядка и, следовательно, возможно, априори не аниморфизируемо.

Не применяя критерия (игнорируя критерий), заметим, что это соотношение можно переписать так:

$$nx^2y^4 + nx^4y^2 + 2mx^2y^2 + x^2 + y^2 = (nx^2y^2 + 1)(x^2 + y^2) + 2mx^2y^2. \quad (1.62)$$

Следовательно, из (1.62), располагая левую часть по переменной z , найдем сложный радикал

$$z = \frac{\pm \sqrt{nx^2y^4 + nx^4y^2 + 2mx^2y^2 + x^2 + y^2} \pm 2xy \sqrt{(nx^4 + mx^2 + 1)(ny^4 + my^2 + 1)}}{(nx^2y^2 - 1)^2}. \quad (1.63)$$

Упрощая сложный радикал, найдем

$$z = \pm \frac{y \sqrt{nx^4 + mx^2 + 1} \pm x \sqrt{ny^4 + my^2 + 1}}{nx^2y^2 - 1}. \quad (1.64)$$

Вычисляя частные производные, найдем после упрощений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \pm \frac{-mnx^3y^3 - 2mnx^3y - 2mxy^3 - mxy \mp (nx^2y^2 + 1)\sqrt{\Delta x} \Delta y}{(nx^2y^2 - 1)^2 \sqrt{\Delta x}}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \pm \frac{-mnx^3y^3 - 2mnx^3y - 2mxy^3 - mxy \mp (nx^2y^2 + 1)\sqrt{\Delta x} \Delta y}{(nx^2y^2 - 1)^2 \sqrt{\Delta y}}. \end{aligned} \right\} \quad (1.65)$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0, \quad (1.66)$$

после подстановки и сокращения найдем

$$\frac{dx}{\sqrt{\Delta x}} + \frac{dy}{\sqrt{\Delta y}} = 0. \quad (1.67)$$

Отсюда

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + mx^2 + nx^4}} \pm \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 + my^2 + ny^4}} = \varphi(z). \quad (1.68)$$

Для определения $\varphi(z)$ положим $x = 0$.

Тогда из (1.61) найдем, что при $x = 0$

$$z = \mp y,$$

значит

$$\varphi(z) = \pm \int_0^z \frac{dy}{\sqrt{1 + my^2 + ny^4}} = \pm \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}} \quad (1.69)$$

Итак, уравнение (1.61) приведем к виду

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + mx^2 + nx^4}} \pm \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 + my^2 + ny^4}} = \mp \left(\pm \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}} \right), \quad (1.70)$$

где знаки непосредственно перед интегралами соответствуют знакам \pm перед x , а знаки справа перед скобками соответствуют знакам перед дробью в (1.64). Перепишем для ясности (1.64) так

$$z = \varepsilon_1 \frac{y \sqrt{1 + mx^2 + nx^4} + \varepsilon x \sqrt{1 + my^2 + ny^4}}{nx^2y^2 - 1} \quad (1.71)$$

Тогда (1.70) примет вид

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 + mx^2 + nx^4}} + \varepsilon \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1 + my^2 + ny^4}} = -\varepsilon_1 \varepsilon \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 + mz^2 + nz^4}} \quad (1.72)$$

Таким образом, соотношение (1.61) допускает номограмму нулевого жанра. Возьмем теперь и обратный интеграл

$$x = \int_a^\xi \frac{d\xi}{\sqrt{A + B\xi + C\xi^2 + D\xi^3 + E\xi^4}} \quad (1.73)$$

с произвольным нижним пределом. Положим

$$\xi = \varphi(x). \quad (1.74)$$

Тогда, как показал Эрмит на стр. 105 работы [17] получим общую теорему сложения в виде соотношения

$$\begin{aligned} & \frac{2\varphi'(a)}{\varphi(x+y) - \varphi(a)} + \frac{\varphi'(a+y) + \varphi'(a)}{\varphi(a+y) - \varphi(a)} + \frac{\varphi'(a-y) + \varphi'(a)}{\varphi(a-y) - \varphi(a)} - \\ & - \frac{\varphi'(a+y) - \varphi'(x)}{\varphi(a+y) - \varphi(x)} - \frac{\varphi'(a-y) - \varphi'(x)}{\varphi(a-y) - \varphi(x)}, \end{aligned} \quad (1.75)$$

которое, таким образом, будет нулевого жанра, так как равносильно соотношению

$$x + y - z = 0, \quad (1.76)$$

где x, y, z — интегралы.

Соотношение (1.75) можно рассматривать как общее функционально-дифференциальное уравнение эллиптических функций второго порядка.

Возьмем уравнение

$$\begin{aligned} & (z - a)^2(A - B(a+z) - Caz - \sqrt{A + 2Ba + Ca^2} \sqrt{A + 2Bz + Cz^2}) + \\ & + 2B(z - a)^2(x+y) - (A + B(a+z) + Caz - \\ & - \sqrt{A + 2Ba + Ca^2} \sqrt{A + 2Bz + Cz^2}), \\ & (x^2 + y^2) + 2(A + B(a+z) + C(a^2 - az + z^2) - \\ & - \sqrt{A + 2B + Ca^2} \sqrt{A + 2Bz + Cz^2})xy. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Беря дифференциал, считая z постоянным, получим

$$P dx + Q dy = 0. \quad (1.78)$$

Вычитая затем из P^2 и Q^2 левую часть (1.77), умноженную на надлежащий независимый от x и y множитель, непосредственно усматриваемый из сравнения P и Q с (1.77), найдем, что

$$P = \lambda \sqrt{A + 2B + Cy^2}, \quad Q = \lambda \sqrt{A + 2Bx + Cx^2}, \quad (1.79)$$

где λ — постоянная.

Уравнение (1.78) примет вид после интегрирования

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A + 2Bx + Cx^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A + 2By + Cy^2}} = E. \quad (1.80)$$

Для определения постоянной E , полагаем $x = a$. Тогда из (1.77) найдем, что

$$y = z. \quad (1.81)$$

Следовательно, имеем с помощью (1.80) и (1.81)

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{A + 2Bx + Cx^2}} + \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A + 2Bz + Cz^2}} = E. \quad (1.82)$$

Соотношение (1.80) примет вид

$$\begin{aligned} & \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A + 2Bx + Cx^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A + 2By + Cy^2}} = \\ & = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A + 2Bz + Cz^2}} + \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{A + 2Bx + Cx^2}}, \end{aligned} \quad (1.83)$$

где последний интеграл есть постоянная (1.53) вместе с a . Получим соотношение нулевого жанра. Если $a = 0$, то

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A+2Bx+Cx^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A+2By+Cy^2}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A+2Bz+Cz^2}}. \quad (1.84)$$

Таким образом, очень сложное соотношение (1.77) есть нулевого жанра, придем с элементарными шкалами, т. к. интегралы

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{A+2B\xi+C\xi^2}} \quad (1.85)$$

выражаются в элементарных функциях.

Заметим, что соотношение (1.77) можно записать более компактно

$$\begin{aligned} & \left(x\sqrt{A+2Bz+Cz^2} + \frac{Bz}{\sqrt{A-\sqrt{A+2Bz+Cz^2}}} \right) + \\ & + y \left(\sqrt{A+2By+Cy^2} + \frac{By}{\sqrt{A-\sqrt{A+2Bz+Cz^2}}} \right) = \\ & = \frac{Bz^2}{\sqrt{A-\sqrt{A+2Bz+Cz^2}}} + z\sqrt{A+2Bz+Cz^2}. \end{aligned} \quad (1.86)$$

Если теперь в предыдущих формулах положить $a = B = 0$, то (1.84) примет вид

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A+Cz^2}}. \quad (1.87)$$

Соотношение (1.86) примет вид

$$x\sqrt{A+Cz^2} + y\sqrt{A} = z\sqrt{A+Cx^2} \quad (1.88)$$

или

$$y = z \sqrt{\frac{A+Cx^2}{A}} - x \sqrt{\frac{A+Cz^2}{A}}. \quad (1.89)$$

Имеем тождество

$$z^2 - x^2 \equiv z^2 \frac{A+Cx^2}{A} - x^2 \frac{A+Cz^2}{A}.$$

Делим его почленно на (1.89), найдем

$$\frac{z^2 - x^2}{y} = z \sqrt{\frac{A+Cx^2}{A}} + x \sqrt{\frac{A+Cz^2}{A}}. \quad (1.90)$$

Складывая почленно (1.89) и (1.90), получим

$$\frac{z^2 + y^2 - x^2}{y} = 2z \sqrt{\frac{A+Cx^2}{A}}. \quad (1.91)$$

Разрешая это уравнение относительно z , найдем

$$z = y \sqrt{\frac{A+Cx^2}{A}} \pm x \sqrt{\frac{A+Cy^2}{A}}. \quad (1.92)$$

В силу (1.89) нижний знак бы соответствовал

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A+Cz^2}} = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2}} - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2}}. \quad (1.93)$$

Следовательно,

$$z = y \sqrt{\frac{A+Cx^2}{A}} + x \sqrt{\frac{A+Cy^2}{A}} \quad (1.94)$$

есть другая форма алгебраического соотношения (1.87).

Наконец, с помощью (1.89) напишем алгебраический интеграл для (1.87) в виде

$$x = z \sqrt{\frac{A+Cx^2}{A}} - y \sqrt{\frac{A+Cz^2}{A}}. \quad (1.95)$$

Соотношение

$$z = y \sqrt{\frac{A+Cx^2}{A}} - x \sqrt{\frac{A+Cy^2}{A}} \quad (1.96)$$

соответствовало бы следовательно

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2}} - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A+Cz^2}}. \quad (1.97)$$

Соотношение

$$z = x \sqrt{\frac{A+Cy^2}{A}} - y \sqrt{\frac{A+Cx^2}{A}} \quad (1.98)$$

соответствует равенству

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2}} - \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A+Cz^2}}. \quad (1.99)$$

Заметим еще, что замена в (1.87) и (1.94) z на $(-z)$ приводит к сумме трех интегралов, равной нулю. И так соотношениям

$$\pm \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2}} \pm \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2}} - \int \frac{dz}{\sqrt{A+Cz^2}} = 0 \quad (1.100)$$

отвечают зависимости

$$z = \pm y \sqrt{\frac{A+Cx^2}{A}} \pm x \sqrt{\frac{A+Cy^2}{A}} \quad (1.101)$$

с теми же сочетаниями знаков. Уничтожая иррациональность в равенстве (1.101), получим соотношение нулевого жанра с элементарными шкалами

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = \frac{4Cx^2y^2z^2}{A}. \quad (1.102)$$

Левая часть согласно формуле Герона есть

$$-(x+y+z)(x+y-z)(-x+y+z) = -16s^2, \quad (1.103)$$

где S — площадь треугольника со сторонами x, y, z . Если D есть диаметр описанного около этого треугольника круга, то, как известно,

$$\frac{xyz}{2S} = D. \quad (1.104)$$

Соотношение (1.102) примет вид

$$A + CD^2 = 0. \quad (1.105)$$

Таким образом, положительное решение z уравнения (1.102) по данным вещественным y и x получается на вспомогательной равномерной шкале и круговой номограмме Эйлера диаметра D , определяемого уравнением (1.105) с немой круговой шкалой.

От произвольной точки A этого круга делаем последовательные засечки циркулем $AB = x, BC = y$, снимая их с равномерной прямолинейной шкалы, на которой изображена шкала отсчета $|x|, |y|, |z|$. Циркулем откладывая от начала этой шкалы отрезок AC , прочтем на шкале значение z . Получаем, очевидно, вообще говоря два различных положения точки C и два отрезка AC и соответственно два ответа z . Меняя у них знаки, получаем еще два ответа, т. е. всего четыре, как и должно быть.

В случае, если $|x|$ или $|y|$ больше D для пользования номограммой требуется обобщенное понимание точек пересечения окружностей с включением минимых элементов, чем мы не будем заниматься здесь.

При

$$A = -C = 1 \quad (1.106)$$

мы получим, в частности

$$\arcsin x \pm \arcsin y = \arcsin z. \quad (1.107)$$

$$z = x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}.$$

При

$$A = C = 1 \quad (1.108)$$

получим

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \pm \ln(y + \sqrt{1+y^2}) = \ln(z + \sqrt{1+z^2}). \quad (1.109)$$

Надо еще раз подчеркнуть, что при комплексных аргументах и коэффициентах номограммы этих соотношений делаются линейчатыми [15], [21].

Уравнение (1.107) рационализуется. Получаем уравнение (1.102) при условии (1.106). Из уравнения (1.105) найдем, что в данном случае $D = 1$.

В случае (1.108) будем иметь $D = i$ (круг мнимого диаметра i). Нетрудно привести уравнение

$$A(x^2 + y^2 - z^2) + 2xy\sqrt{A(A+Cz^2+Ez^4)} - Ex^2y^2z^2 = 0 \quad (1.110)$$

к виду

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A+Cx^2+Ex^4}} + \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A+Cy^2+Ey^4}} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A+Cz^2+Ez^4}}. \quad (1.111)$$

Соотношение (1.110) или

$$y = \frac{z\sqrt{A(A+Cx^2+Cx^4)} - x\sqrt{A(A+Cz^2+Ez^4)}}{A - Ex^2z^2} \quad (1.112)$$

или что то же

$$\sqrt{\frac{A+Cy^2+Ey^4}{A}} = [(A+Ex^2z^2)\sqrt{(A+Cx^2+Ex^4)(A+Cz^2+Ez^4)} - 2AExz(x^2+z^2) - Cxz(A+Ex^2z^2)] : (A - Ex^2z^2). \quad (1.113)$$

Таким образом, нулевого жанра.

Если уничтожить в (1.110) иррациональность, то получим симметрическое соотношение нулевого жанра

$$A^2(x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2) - 2AEx^2y^2z^2(x^2 + y^2 + z^2) - 4ACx^2y^2z^2 + Ex^4y^4z^4 = 0. \quad (1.114)$$

Замечая, что изменение знака верхнего предела у каждого из интегралов, стоящих в равенстве (1.114) равносильно перенесению этого интеграла в другую

часть равенства или равносильно оставлению его с измененным знаком, заключим, что (1.114) есть алгебраическая теорема сложения, охватывающая любые сочетания знаков в равенствах

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A + Cx^2 + Ex^4}} \pm \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A + Cy^2 + Ey^4}} \pm \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A + Cz^2 + Ez^4}} = 0. \quad (1.115)$$

Пусть имеем уравнение

$$\alpha + 2\beta(x + y) + \gamma(x^2 + y^2) + 2\delta xy + 2\epsilon x(x + y) + \zeta^2 x^2 y^2 = 0, \quad (1.116)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 4(AM - B^2), & \beta &= 2B(M - C) + 4AD, \\ \gamma &= 4AE - (M - C)^2, & \zeta &= 4(EM - D^2), \\ \epsilon &= 2D(M - C) + 4BE, & \delta &= M^2 - C^2 + 4(AE + BD) \end{aligned} \right\} \quad (1.117)$$

Пусть

$$M(M - C)^2 + 4M(BD - AE) + 4(AD^2 - BCD + B^2E) = \Delta. \quad (1.118)$$

Разрешая (1.116) сначала относительно y , а потом относительно x и приводя каждый из результатов к общему знаменателю, получим

$$\begin{aligned} \beta + \delta x + \epsilon x^2 + \gamma(y + 2\epsilon x + x^2) &= \\ &= \pm 2\sqrt{\Delta(A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4)}, \\ \beta + \delta y + \epsilon y^2 + \gamma(y + 2\epsilon y + y^2) &= \\ &= \pm 2\sqrt{\Delta(A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4)}. \end{aligned} \quad (1.118)$$

Взяв теперь дифференциал по x и y обеих частей равенства (1.116), получим с помощью (1.118)

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4}} \pm \frac{dy}{\sqrt{A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4}} = 0. \quad (1.119)$$

Интегрируя, получим

$$\pm \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4}} \pm \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4}} = k, \quad (1.120)$$

где постоянную k определим из условия, то $y = \pm z$ при $x = 0$. Пользуясь первым уравнением (1.118) найдем, полагая $x = 0$, что

$$\beta + \gamma y = \pm 2\sqrt{\Delta A}. \quad (1.118')$$

Следовательно

$$y = \frac{-\beta \pm 2\sqrt{\Delta A}}{\gamma}. \quad (1.118'')$$

Мы обозначим

$$\frac{-\beta \pm 2\sqrt{\Delta A}}{\gamma} = z. \quad (1.121)$$

Из этого уравнения мы, пользуясь (1.117) и (1.118), можем найти M как функцию z и подставив найденное выражение M через z в правые части равенств (1.118'), а затем заменив коэффициенты в (1.116) найденными их выражениями в функции z , получим соотношение между x , y и z , являющееся полным интегралом дифференциального уравнения (1.119), где z будет играть роль произвольной постоянной.

Итак, с помощью (1.120) тогда найдем простое выражение для

$$K = \pm \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A + 2Bz + Cz^2 + 2Dz^3 + Ez^4}}. \quad (1.122)$$

В интегралах (1.122) и во втором интеграле (1.120) берутся одинаковые знаки.

Итак

$$\begin{aligned} \pm \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A + 2Bx + Cx^2 + 2Dx^3 + Ex^4}} + \epsilon \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{A + 2By + Cy^2 + 2Dy^3 + Ey^4}} = \\ = \epsilon \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{A + 2Bz + Cz^2 + 2Dz^3 + Ez^4}}. \end{aligned} \quad (1.123)$$

Мы не будем выписывать сложное выражение нулевого номографического жанра ⁽³⁾ (1.116), после замены его коэффициентами их выражениями через z , оставляя это читателю.

Из полученного общего результата выведем такие простые следствия:

Для

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{a + bx}} \pm \frac{dy}{\sqrt{a + by}} = 0 \quad (1.124)$$

теорема сложения имеет вид

$$b + M(x - y) = \pm 2\sqrt{M(a + bx)} \quad (1.125)$$

⁽³⁾ О номографическом жанре уравнения можно говорить лишь с осторожностью, понятием для читателя данной работы и без разъяснений.

или

$$b + My - x) = \pm 2\sqrt{M(a + by)}. \quad (1.126)$$

Аналогичным образом для

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} \pm \frac{dy}{\sqrt{a + by^2}} = 0$$

найдем любой из двух видов полного интеграла

$$\left. \begin{aligned} (M + b)x - (M - b)y &= \pm 2\sqrt{M(a + bx^2)}, \\ (M + b)y - (M - b)x &= \pm 2\sqrt{M(a + by^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.127)$$

Для

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{a + bx^3}} \pm \frac{dy}{\sqrt{a + by^3}} = 0 \quad (1.128)$$

аналогично найдем

$$\left. \begin{aligned} 2ab + Mx(M + bx) - y(M - bx)^2 &= \pm 2\sqrt{M + ab^2}(a + bx^3), \\ 2ab + My(M + by) - x(M - by)^2 &= \pm 2\sqrt{M^3 + ab^2}(a + by^3). \end{aligned} \right\} \quad (1.129)$$

Для

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{a + bx^4}} \pm \frac{dy}{\sqrt{a + by^4}} = 0 \quad (1.130)$$

аналогично найдем, с помощью (1.118), (1.117) и (1.116), что

$$\Delta = M^3 - 4abM, \quad (1.131)$$

и

$$\left. \begin{aligned} (M^2 + 4ab)x + (4ab - M^2 + 4bMx^2)y &= \pm 2\sqrt{M(M^2 - 4ab)(a + bx^4)}, \\ (M^2 + 4ab)y + (4ab - M^2 + 4bMy^2)x &= \pm 2\sqrt{M(M^2 - 4ab)(a + by^4)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.132)$$

Случай

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{a + bx^6}} \pm \frac{dy}{\sqrt{a + by^6}} = 0, \quad (1.133)$$

если положить $x^2 = u$ и $y^2 = v$, приводится к

$$\pm \frac{du}{\sqrt{au + bu^4}} \pm \frac{dv}{\sqrt{av + bv^4}} = 0, \quad (1.134)$$

т. е. к частному случаю (1.119).

С помощью тех же формул (1.116)–(1.118) опять находим полный интеграл с произвольной постоянной M

$$\begin{aligned} aM + M^2x^2 + 2abx^4 + (-M^2 - 4abx^2 + 4bMx^4)y^2 &= \\ &= \pm 2x\sqrt{(M^2 + a^2b)(a + bx^6)}, \\ aM + M^2y^2 + 2aby^4 + (-M^2 - 4aby^2 + 4bMy^4)x^2 &= \\ &= \pm 2y\sqrt{(M^2 + a^2b)(a + by^6)}. \end{aligned} \quad (1.135)$$

Рассмотрим уравнение Эйлера

$$\pm \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4 + ex^6}} \pm \frac{dy}{\sqrt{a + by^2 + cy^4 + ey^6}} = 0. \quad (1.136)$$

С помощью той же подстановки

$$x^2 = u, \quad y^2 = v \quad (1.137)$$

мы приводим и общий случай (1.136) к случаю (1.119), где

$$A = 0, \quad B = \frac{a}{2}, \quad C = b, \quad D = \frac{c}{2}, \quad E = e. \quad (1.138)$$

С помощью (1.118) найдем

$$\Delta = (M - b)^3 + b(M - b)^2 + ae(M - b) + a^2e. \quad (1.139)$$

С помощью (1.117) и (1.116) найдем теперь полные интегралы Эйлера в равносильных формах, дающих опять сложные зависимости нулевого жанра.

$$\begin{aligned} \beta + \delta x^2 + \epsilon x^4 + y^2(y + 2\epsilon x^2 + \zeta x^4) &= \pm 2x\sqrt{\Delta(a + bx^2 + cx^4 + ex^6)}, \\ \beta + \delta y^2 + \epsilon y^4 + x^2(y + 2\epsilon y^2 + \zeta y^4) &= \pm 2y\sqrt{\Delta(a + by^2 + cy^4 + ey^6)} \end{aligned} \quad (1.140)$$

или в рациональной форме

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\beta(x^2 + y^2) + \gamma(x^4 + y^4) + 2\delta x^2 y^2 + \\ &+ 2\epsilon x^2 y^2(x^2 + y^2) + \zeta x^4 y^4 = 0, \end{aligned} \quad (1.141)$$

где

$$\alpha = -a^2, \quad \beta = a(M - b), \quad \gamma = -(M - b)^2,$$

$$\zeta = 4eM - c^2, \quad \epsilon = c(M - b) + 2ae, \quad \delta = M^2 - b^2 + ae. \quad (1.142)$$

Чтобы при $x = 0$ $y = \pm z$, сделаем замену постоянной

$$M = b + \frac{a}{z^2}. \quad (1.143)$$

Тогда

$$\alpha = -a^2, \quad \beta = \frac{a^2}{z^2}, \quad \gamma = -\frac{a^2}{z^2},$$

$$\zeta = 4be - c^2 + \frac{4ae}{z^2}, \quad \varepsilon = \frac{ac}{z^2} + 2ae, \quad (1.144)$$

$$\delta = \frac{a^2}{z^4} + \frac{2ab}{z^2} + ac, \quad \Delta = \frac{a^2}{6}(a + bz^2 + cz^4 + ez^6).$$

Уравнения (1.140) примут вид

$$a^2z^2 + a(a + 2bz^2 + cz^4) x^2 + az^2(c + ez^2) x^4 -$$

$$- (a^2 - 2az^2(c - 2ez^2) x^2 + (c^2z^2 - 4bz^2 - 4ae) x^4) y^2 =$$

$$= \pm 2axz \sqrt{(a + bz^2 + cz^4 + ez^6)(a + bx^2 + cx^4 + ex^6)}. \quad (1.145)$$

Мы видим, что при $x = 0$, $y^2 = z^2$ и $y = \pm z$.

Таким образом, интеграция уравнений (1.136) дает такое трансцендентное соотношение, соответствующее алгебраической теории сложения (1.145)

$$\pm \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4 + ex^6}} \pm \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{a + by^2 + cy^4 + ey^6}} =$$

$$= \pm \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{a + bz^2 + cz^4 + ez^6}}. \quad (1.146)$$

Следовательно, уравнение (1.145) допускает номограммы нулевого, второго и третьего жанров.

Уравнению (1.145) можно дать иную форму

$$az^2(a + bx^2 + cx^4 + ex^6) +$$

$$+ ax^2(a + bz^2 + cz^4 + ez^6) - (a - cx^2z^2)^2 y^2 -$$

$$- aex^2z^2(z^2 - x^2)^2 + 4ex^2y^2z^2(a^2 + ax^2 + bx^2z^2) =$$

$$= \pm 2xz \sqrt{a(a + bz^2 + cz^4 + ez^6)(a + bx^2 + cx^4 + ex^6)}. \quad (1.147)$$

Это уравнение можно переписать, очевидно, так:

$$(z \sqrt{a(ab + bx^2 + cx^4 + ex^6)} \pm x \sqrt{a(a + bz^2 + cz^4 + ez^6)})^2 =$$

$$= y^2(a - cx^2z^2)^2 + aex^2(z^2 - x^2)^2 - 4ex^2y^2z^2(ax^2 + az^2 + bx^2z^2). \quad (1.148)$$

В частности, при $e = 0$ получим

$$z \sqrt{a(a + bx^2 + cx^4)} \mp x \sqrt{a(a + bz^2 + cz^4)} = y \sqrt{a - cx^2z^2} \quad (1.149)$$

и соответствующее представление (1.146)

$$\pm \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2 + cx^4}} \pm \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{a + by^2 + cy^4}} = \pm \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{a + bz^2 + cz^4}}, \quad (1.150)$$

что совпадает с ранее полученным результатом (см. (1.111) и (1.112)).

Чтобы выявить полное универсально применимое номографическое функциональное соотношение, в частности алгебраической теоремы сложения, укажем на полные интегралы дифференциальных уравнений Эйлера

$$P_n(x) \frac{dx}{\sqrt{X}} + \frac{P_n(y)}{\sqrt{Y}} dy = 0, \quad (1.151)$$

где $P_n(x)$ — многочлен n -й степени.

Это дифференциальное уравнение тривиально номографируемо. Но содержание будет тогда, когда оно обладает алгебраическим полным интегралом, т. е. алгебраической теоремой сложения. Это замечательно потому, что в этом случае может быть возможна алгебраическая анаморфоза.

Это бывает, когда уравнение $z = u(z_1; z_2)$ имеет вид уравнения пятого номографического порядка

$$u \equiv f_1 g_2 + g_1 f_2 = \frac{\psi_1 - \psi_2}{\varphi_1 - \varphi_2} \quad (1.152)$$

и после умножения на анаморфизирующего множителя (1.103) работы [2] приводится к определителю Массо (5.89) этой работы. Теория возможности такой анаморфозы дана на стр. 140—149 цитируемой работы [2] в предположении дифференцируемости и в работе [3] в случае недифференцируемых функций.

Так найдем (заменяя z_1 и z_2 на x и y), что для

$$z = x^2y + xy^2 \quad (1.153)$$

анаморфизирующий множитель $\varphi_1 - \varphi_2$ согласно (5.103) работы [2] равен

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{v_{z_1}}{u_{z_1}} - \frac{v_{z_2}}{u_{z_2}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}. \quad (1.153)$$

Для

$$z = xy + (1 + \sqrt{1 + x^2})(1 + \sqrt{1 + y^2}), \quad (1.154)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{v_{z_1}}{u_{z_1}} - \frac{v_{z_2}}{u_{z_2}} = \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x} - \frac{\sqrt{1 + y^2} - 1}{y}. \quad (1.155)$$

Вот пример трансцендентной анаморфозы:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{f_1 - 1}} = \operatorname{arctg} f_2 + \operatorname{arctg} f_3. \quad (1.156)$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{f_1 - 1}} = \frac{f_2 + f_3}{1 - f_2 f_3}, \quad (1.157)$$

чему соответствует очевидная алгебраическая анаморфоза.

Оба уравнения (1.109) иллюстрируют ту же самую ситуацию. Первое дает трансцендентную, а второе алгебраическую анаморфозу.

Это же верно и для (1.107), если допустить номограммы с минимыми шкалами, ибо второе уравнение (1.107) в комплексной области равносильно уравнению

$$zi \pm \sqrt{1 - z^2} = (xi \pm \sqrt{1 - x^2})(4i \pm \sqrt{1 - y^2}). \quad (1.158)$$

Мы поэтому закончим наше рассмотрение трансцендентного номографирования теоремами сложения указанным общей задачей разложения всех алгебраических анаморфоз разных форм теоремы сложения.

Из того, что в результате трансцендентной анаморфозы уравнение принимает тот или иной анаморфозиремый вид, в том числе, канонический вид уравнения третьего порядка, еще не следует, что существует алгебраическая анаморфоза данного уравнения.

Но это очевидно будет для дифференциальных уравнений, обладающих полным алгебраическим интегралом, т. е. алгебраической теоремой сложения и, прежде всего, для эллиптических интегралов вида

$$\int \frac{R_n(x) dx}{\sqrt{X}}, \quad (1.159)$$

где $R_n(x)$ — многочлен n -й степени, а X — многочлен не выше четвертой степени; и, наконец, более общей задачей алгебраического номографирования является задача номографирования теорем сложения для интегралов вида

$$\int R(x; \sqrt{X}) dx. \quad (1.160)$$

Более сложным делом является построение соотношений, номографирuemость которых основана на пипированной общей теореме сложения Абеля. Мы на этом глубоком вопросе не будем здесь останавливаться, т. к. он связан с построением теории номографирования в многомерных пространствах.

Все эти примеры хорошо иллюстрируют, между прочим, насколько сложный вид могут иметь уравнения, к которым применимы условия Сен-Робера. Другим источником для построения таких примеров являются все найденные автором номографирuemые функции комплексного переменного первого класса. Действительно, согласно теореме автора вещественные и чисто мнимые части любых таких функций удовлетворяют условию Сен-Робера [2].

Как уже сказано, теория номографирования общей абелевой теоремы сложения для абелевых функций, в частности, гиперэллиптических, требует выхода

в многомерное пространство и связано с теорией сетей Вляшке. Поэтому, мы в конце работы наметим связь номографии с теорией сеток Вляшке, которые (сетки) также прямо связаны с вопросами изображения теорем сложения эллиптических и общих абелевых интегралов.

§ 2. Вопрос существования неколлинеарных номограмм при выполнении условия Сен-Робера органически связан со следующим фактом топологической дифференциальной геометрии (теорема Зауэра и Графа) [16]. Если для уравнения $u_1 + u_2 + u_3 = 0$ строить прямоугольные и, очевидно, тривиально гексагональный (Томсен) абак

$$x = u_1, \quad y = u_2, \quad x + y + u_3 = 0, \quad (2.1)$$

то, для краткости опуская элементарные частные случаи, топологическое преобразование

$$x = \frac{\varphi'(x) - \varphi'(y)}{\varphi(x)\varphi'(y) - \varphi(y)\varphi'(x)}, \quad y = \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{\varphi(x)\varphi'(y) - \varphi'(x)\varphi(y)} \quad (2.2)$$

отобразит эту сетку (Севебе) наиболее общим образом, с точностью до коллинеации (и упомянутых элементарных случаев и случаев вырождения, которые, за недостатком места, мы переносим в следующую заметку), на сетку, следовательно, также гексагональную, касательных

$$1 + \varphi(u) - x + \varphi'(u)y = 0 \quad (2.3)$$

и кривой третьего класса

$$x = \frac{-12\varphi^2(u) + g_2}{4\varphi^3(u) + g_2\varphi(u) + 2g_3}, \quad y = \frac{-2\varphi'(u)}{4\varphi^3(u) + g_2\varphi(u) + 2g_3}, \quad (2.4)$$

удовлетворяющую, стало быть, условию замкнутости шестиугольников сетки (2.1), составленных вместе с диагоналями из кривых трех семейств кривых

$$w \equiv f(u_1; u_2; u_3) = 0, \quad (2.5)$$

которое (условие) может быть записано либо в виде $u_1 + u_2 + u_3 = 0$, либо в виде условия Сен-Робера, либо в виде условия интегрируемости связанной с сетью формы Пфаффа

$$y = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\ln \frac{\partial w}{\partial u_j} \right) du_j, \quad (2.6)$$

т. е. в виде равенства нулю внешнего дифференциала этой формы

$$dy = \sum_{k,j=1}^3 \left[\frac{\partial^2}{\partial u_j \partial u_k} \ln \left(\frac{\partial w}{\partial u_j} \frac{\partial w}{\partial u_k} \right) \right] [du_j, du_k], \quad (2.7)$$

где $[du, di_1]$ — косое произведение, обращение которого в нуль приводит очевидно к условию Сен-Робера, левая часть которого просто связана с инвариантом сети dP (Бляшке). Наборот, критерий Сен-Робера есть условие гексагональности 3-сети. ⁽⁴⁾

§ 3. Подобенно же форму Пфаффа мы образуем и для 4 семейств поверхностей простейшего типа, и немедленно получаем полную систему инвариантов и пространственной сетки и условия замыкания. Но случай этот значительно сложнее и столь же богат связями с алгебраической геометрией пространственных кривых, особенно кривых 4 класса и номографией. (Каждые три семейства кривых, образованных на 4-й поверхности тремя семействами остальных, должны удовлетворять условию замыкания.)

Польза теоретическая и практическая этих рассуждений для номографии — очевидна. Достаточно выполнить, например затем корреляцию, чтобы прийти, таким образом, от сетки (2.4) к номограмме из выравненных точек на неинкурсальные сетки общего вида. За недостатком места, как уже указано выше, мы вынуждены выпустить „уникарральные“ и „распавшиеся“ сетки, рассмотренные в отдельной статье. Таким образом, выясняется геометрия перехода от номограмм нулевого жанра к неколлинеарным номограммам второго и третьего жанров для уравнения $u_1 + u_2 + u_3 = 0$, поскольку переход от одной гексагональной сети Бляшке к другой с непроективным изменением отбавоющей не есть коллинеация.

Наборот, номографические рассуждения полезны для теории сетей Бляшке. Условия Сен-Робера для уравнения $f(x, y, z) = 0$

$$\frac{\partial^2 \ln \left(\frac{f_x}{f_y} \right)}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.1)$$

выражает существование сетки из трех семейств параллелей. Такая сетка очевидно, обладает свойствами гексагональности, так как каждый шестиугольник вместе с тремя главными диагоналями, составленный из линий трех семейств, замкнут. Так как это свойство не нарушается при топологических преобразованиях, т. е. в частности, при всяких аналитических взаимнооднозначных преобразованиях

$$X = u(x, y), \quad Y = v(x, y), \quad (3.2)$$

то условие Сен-Робера выражает условие гексагональности. Такое заключение могло быть сделано еще Сен-Робером, если бы он обладал понятием топологического преобразования. На самом же деле только в 1927 г. Томсен показал что условие гексагональности — есть условие возможности отобразить сетку

⁽⁴⁾ Значение других критериев номографии для теории сеток указано вкратце в конце статьи. Номография дает метод исследования сетей и сеток. Связь номографии с сетками впервые указал Бляшке. По поводу некоторых связей с сетками см. также работы автора, в частности работу [2].

на три семейства параллельных прямых. А Бляшке в 1928 г. получил условие Сен-Робера, правда при этом глубоко вскрыл его геометрическую сущность.

Пусть

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \text{const} = c_1, \\ v(x, y) &= \text{const} = c_2, \\ f(u, v) &= \text{const} = c_3 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

три проходящие через одну точку M кривые трех семейств (см. чертж).

Отправляясь от точки $P_0(c_1, c_2)$, Бляшке подсчитывает углошение P, P_0 , и показывает, что оно одновременно исчезает с

$$\varrho = \frac{1}{f_{uv}} \cdot \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\ln \frac{f_u}{f_v} \right), \quad (3.4)$$

для которого Бляшке, таким образом, получает инвариантное геометрическое определение. Равенство ϱ нулю и есть, очевидно, условие Сен-Робера. ϱ называется инвариантом Бляшке.

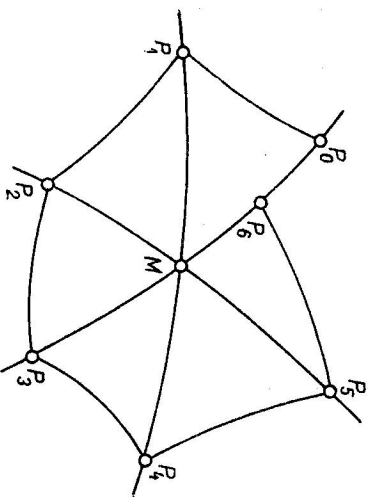
Все номографические критерии, в частности все критерии И. А. Вильнера: 1. критерии анаморфизуемости системы

$$f_1(x, y, z_1) = 0, \quad f_2(x, y, z_2) = 0; \quad (3.5)$$

2. критерии анаморфизуемости функций комплексного переменного (нулевого, второго, четвертого жанров);

3. критерии анаморфизуемости одного уравнения $f(x, y, z) = 0$; данные автором; — в силу принципа коррективности суть одновременно критерии спрямляемости 3- и 4-сетей. (Такова же роль критериев Сен-Робера, Массона-Лекорню, Кларка-Гронвалля и других.) При этом, как следует из результатов И. А. Вильнера спрямляемые изотермические 4-сети, после спрямления образованы 4-семействами прямых, отбавоющих два конических сечения, что позволяет синтезировать механизм — вычислительное устройство.

Действительно, отображая эти 2 конических сечения (без общих действительных точек) 2 шкалы второго класса с традиционными парами касательных по переменным $z = a + bi$ и $w = p + qi$, — на некоторую пару кругов $O(R)$ и $O(R_1)$ при помощи проективитета; — затем касательные осуществляем при помощи двух пар вращающихся на расстояниях R и R_1 от точек O и O_1 линеек, концы которых указывают шкалы a, b, p, q . Прохождение четырех линеек через одну точку достигается связывающей их цепочкой, устанавливающей четвертое пересечение. Получаем механизм 4 жанра. Г-образно прошле дело с механизмами первого класса. Так один круг распадается на пару точек (пару пучков, либо



даже оба круга распадаются и конструкция крайне упрощается — получаем 4 луча прямых и паффу (практически 4 линейки и паффу).

По поводу номографического синтеза механизмов мы отошли к стр. 117 до 118 [3] и к стр. 387—392 работы [7]. Номографический синтез обыкновенного множительного устройства был дан чехословацким математиком Свобода.

§ 4. Цель этого и следующих параграфов, не претендуя на полноту, параллельно рассмотреть сетчатые номограммы (в том числе многомерные), но преимущественно плоские, топологически эквивалентные прямолинейным (вообще — гиперплоскостным) сетчатым номограммам первого и нулевого жанра (жанр в смысле Клебика) их связи с номограммами из выравненных точек.

Возьмем тождество

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(x_0) & \varphi'(x_0) & \dots & \varphi^{(n-1)}(x_0) \\ 1 & \varphi(x_1) & \varphi'(x_1) & \dots & \varphi^{(n-1)}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varphi(x_n) & \varphi'(x_n) & \dots & \varphi^{(n-1)}(x_n) \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} 1! 2! \dots n! \frac{\sigma(x_0 + x_1 + \dots + x_n)}{\sigma^{n+1}(x_0) \sigma^{n+1}(x_1) \dots \sigma^{n+1}(x_n)}, \quad (4.1)$$

где $n \geq \lambda > \mu \geq 0$. В левой части равенства (4.1) мы имеем эллиптическую функцию от x_i , периоды которой совпадают с периодами $\varphi(x)$, а порядок равен $n+1$, обращаясь в простые нули в точках $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}$ и $x_i = -x_0 - x_1 - \dots - x_{i-1} - x_{i+1} - \dots - x_n$, т. е. в $n+1$ точке параллелограмма периодов и в ∞^{n+1} в вершинах параллелограмма периодов. Поэтому имеем два равносильных равенства:

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n = 0, \quad (4.2)$$

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & \varphi(x_0) & \varphi'(x_0) & \dots & \varphi^{(n-1)}(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varphi(x_1) & \varphi'(x_1) & \dots & \varphi^{(n-1)}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \varphi(x_n) & \varphi'(x_n) & \dots & \varphi^{(n-1)}(x_n) \end{vmatrix} = 0, \quad (4.3)$$

(3) Значение такого рода определителей в общей теории эллиптических функций исключительно велико: через их отношение выражается эллиптическая функция любого порядка с данными нулями и полюсами. Отсюда следует, что любая эллиптическая функция обладает алгебраической теоремой сложения. Номографическое значение этого факта было указано выше.

принем равенство (4.3) выражает теорему сложения эллиптических интегралов x_0, x_1, \dots, x_n , что записано в равенстве (4.2). Этот результат следует из того, что σ -функция имеет простой нуль в начале, т. е. при выполнении (4.2) (см. (4.1)).

Поэтому мы можем сказать, что соотношение (4.2) допускает номографирование в n -мерном пространстве номограммой нулевого жанра, ибо для соотношения (4.2) имеем определитель Массо (по главной диагонали x_0 и единицы, в первом столбце x_i , по побочной диагонали, параллельной главной, стоят -1 ; нетрудно написать уравнения прямолинейных шкал, чего мы делать не будем.

$$\begin{vmatrix} x_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ x_1 & 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ x_2 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.4)$$

Кроме того, для соотношения (4.2) в n -мерном пространстве возможна „сетчатая“ номограмма из $n+1$ семейства параллельных гиперплоскостей. Если оси координат обозначим через y_1, y_2, \dots, y_n , то уравнения этих семейств плоскостей будут

$$y_i = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad x_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n = 0, \quad (4.5)$$

принем в номограмме (4.4) $n+1$ точка лежит в одной гиперплоскости, причем пометки $n+1$ точки пересечения этой кривой с гиперплоскостью опять-таки удовлетворяют уравнению (4.2) (n из этих точек определяют гиперплоскость, а $n+1$ -я дает ответ).

§ 5. Дополним пространство бесконечно-удаленными элементами. Получим проективное пространство. Возьмем теперь в n -мерном пространстве $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n$ ($n+1$) семейство гиперплоскостей

$$\left. \begin{aligned} 1 + \varphi(x_0) \bar{y}_1 + \varphi'(x_0) \bar{y}_2 + \dots + \varphi^{(n-1)}(x_0) \bar{y}_n &= 0, \\ 1 + \varphi(x_1) \bar{y}_1 + \varphi'(x_1) \bar{y}_2 + \dots + \varphi^{(n-1)}(x_1) \bar{y}_n &= 0, \\ \dots & \dots \\ 1 + \varphi(x_n) \bar{y}_1 + \varphi'(x_n) \bar{y}_2 + \dots + \varphi^{(n-1)}(x_n) \bar{y}_n &= 0. \end{aligned} \right\} (5.1)$$

(5) Легко видеть, что мы выполняем преобразование номограммы из выравненных точек (5.3) по принципу двойственности, заменяя точки гиперплоскостями, при этом мы не вводим однородные координаты, чтобы не затруднять запись, и т. к. сделать это легко.

Эти плоскости будут проходить через одну точку каждый раз, когда удовлетворено уравнение (4.2) и, следовательно, определитель Δ равен нулю. (Мы считаем, что ранг определителя Δ равен n , что равносильно предположению об отсутствии соотношения типа (4.2) между меньшим числом переменных x_i). Легко видеть, что (5.1) есть одно и то же семейство гиперплоскостей

$$1 + \varphi(x) \bar{y}_1 + \varphi'(x) \bar{y}_2 + \dots + \varphi^{(n-1)}(x) \bar{y}_n = 0. \quad (5.2)$$

Можно найти огибающую этого семейства плоскостей. Поверхность эта, легко видеть, может быть названа «линейчатой». Если же дифференцировать уравнение (5.2) по параметру x ($n-1$ раз, то найдется и принадлежащая этой поверхности кривая («ребро» возврата), которая, впрочем, для нас роли не играет. Касательные к этой «линейчатой» огибающей «развертывающейся» поверхности, проходящие через каждую точку пространства, $n+1$ гиперплоскости (по одной из каждого семейства) разрешают уравнения (5.2).

Решая совместно относительно \bar{y}_i ($i=1, 2, \dots, n$) n последних уравнений (5.1), мы без труда найдем

$$\bar{y}_i = \bar{y}(x_1; x_2; x_3; \dots; x_n). \quad (5.2')$$

Заменяя теперь в (5.2) x_i ($i=1, 2, \dots, n$) через \bar{y}_i ($i=1, 2, \dots$) с помощью n первых уравнений (4.5), мы получим

$$\bar{y}_i = \bar{y}(y_1; y_2; \dots; y_n). \quad (5.3)$$

Уравнения (5.3) доказывают существование дифференцируемого отображения $n+1$ семейства параллельных гиперплоскостей на семейство гиперплоскостей, касательных к нашей «линейчатой» поверхности.

Отсюда следует, что и обратно, если мы имеем «линейчатую» поверхность, обладающую тем свойством, что через каждую точку пространства к ней можно провести вообще $n+1$ касательную гиперплоскость, то существует точечное преобразование (5.3), отображающее семейство касательных к этой поверхности гиперплоскостей на $n+1$ семейство параллельных плоскостей.

§ 6. Этот результат становится особенно простым в случае $n=2$ и $n=3$. В первом случае вместо (4.2) и (5.3), переходя к привычным обозначениям $x_0 = w, x_1 = u, x_2 = v, y_1 = x, y_2 = y$, будем иметь

$$u + v + w = 0, \quad (6.1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(u) & \varphi'(u) \\ 1 & \varphi(v) & \varphi'(v) \\ 1 & \varphi(w) & \varphi'(w) \end{vmatrix} = 0. \quad (6.2)$$

Последняя выражает теорему сложения в симметричной форме.

Вместо (4.5) будем иметь три семейства прямых плоскости:

$$x = u, \quad y = v, \quad w + x + y = 0. \quad (6.3)$$

Уравнение кривой, несущей шкалы u, v, w в номограмме из выравненных точек для теоремы сложения (6.2) будет иметь вид согласно (6.8)

$$x = \varphi(u), \quad y = \varphi'(u). \quad (6.4)$$

Три семейства прямых («гиперплоскости» (5.1) для двумерного пространства) запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} 1 + \varphi(u) \bar{x} + \varphi'(u) \bar{y} &= 0, \\ 1 + \varphi(v) \bar{x} + \varphi'(v) \bar{y} &= 0, \\ 1 + \varphi(w) \bar{x} + \varphi'(w) \bar{y} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

Это одно и то же семейство прямых (см. (5.2))

$$1 + \varphi(u) \bar{x} + \varphi'(u) \bar{y} = 0, \quad (6.6)$$

огибающих кривую третьего класса и шестого порядка. Двойственную кривую третьего порядка (6.4), декартово уравнение которой найдем без труда:

$$\bar{x} = \frac{-12\varphi^2(u) + g_2}{4\varphi^3(u) + g_2\varphi(u) + 2g_3}, \quad \bar{y} = \frac{-2\varphi'(u)}{4\varphi^3(u) + g_2\varphi(u) + 2g_3}. \quad (6.7)$$

Решая совместно первые два уравнения (6.5) и принимая во внимание первые два соотношения (6.3), мы аналогично (5.2) найдем отображение семейств касательных к кривой третьего класса (6.7) (g_2 и g_3 — совершенно произвольны и на дискриминант $g_3^2 - 27g_2^2$ не налагаем ограничений), отображающихся на три семейства параллельных прямых (6.3)

$$\bar{x} = \frac{\varphi'(x) - \varphi'(y)}{\varphi(x)\varphi'(y) - \varphi(y)\varphi'(x)}, \quad \bar{y} = \frac{\varphi(y) - \varphi'(x)}{\varphi(x)\varphi'(y) - \varphi(y)\varphi'(x)}. \quad (6.8)$$

Так как любой кривой третьего порядка двойственно отвечает кривая третьего класса и наоборот, то, имея кривую третьего класса C^3 , сумеем построить ее двойственный образ S^3 , получив затем с помощью проективного преобразования уравнение кривой S^3 в нормальной форме Вешртграсса

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3. \quad (6.9)$$

Построив отображение (6.8), сможем практически выполнить это отображение на три семейства параллельных прямых и наоборот. Это прямо следует из элементарного факта: если две фигуры плоскости (пространства) коллинеарны, то при преобразовании этой плоскости (пространства) по принципу двойственности этим фигурам соответствуют коллинеарные образы.

Заметим, что принятие за исходную форму уравнения кривой в нормальной форме Аронгольда — Вешптрасса требует сначала преобразования кривой так, чтобы одна из ее точек перегиба была на ∞ . Тогда уравнение кривой будет иметь вид

$$y^2 = b_0 x^3 + 3b_1 x^2 + 3b_2 x + b_3. \quad (6.10)$$

Выполнив теперь простое аффинное преобразование

$$y = \frac{4}{b} y', \quad x = -\frac{b_1}{b_0} + \frac{4}{b_0} x', \quad (6.11)$$

положив затем

$$g_2 = \frac{12(b_1^2 - b_0 b_2)}{16}, \quad g_3 = \frac{3b_0 b_1 b_2 - 2b_1^3 - b_0^2 b_3}{16}, \quad (6.12)$$

приведем уравнение кривой к нормальной форме $y'^2 = 4x'^3 - g_2 x' - g_3$.

Отсюда видим, что координаты точек кривой третьего порядка можно записать в параметрической форме

$$x = -\frac{b_1}{b_0} + \frac{4}{b_0} \wp(u), \quad y = \frac{4}{b_0} \wp'(u), \quad (6.13)$$

после надлежащего проективного преобразования, для выполнения которого надо знать действительные точки перегиба. Для этого, как известно, надо решить уравнение девятой степени, имеющее всегда три действительных корня. 9 точек перегиба по три расположены на одной прямой так, что имеем конфигурацию из 12 прямых.

Таким образом, умножив определитель третьего порядка (6.2) на надлежащий выбранный числовой определитель по правилу «строка на строку», мы получим параметрическое представление в функциях Вешптрасса совершенно произвольной кривой третьего порядка. А, следовательно, ее двойственным образом, как мы утверждали, будет совершенно произвольная кривая третьего класса. Заметим мимоходом, что нелинейное определение девяти точек перегиба путем решения уравнения девятой степени (Маскан равен нулю) совершается особенно просто, если известно параметрическое выражение координат кривой через эллиптические функции Вешптрасса $\wp(u)$ и $\wp'(u)$. Интересно отметить, что обычно номограмма второй канонической формы на кривой третьего порядка (см. работу [12]) строится в случае, когда кривая является уникарсальной, имея точку возврата.

Или же, представив (6.1) в первой канонической форме

$$u'v'w' = 1, \quad (6.14)$$

где

$$u' = e^u, \quad v' = e^v, \quad w' = e^w, \quad (6.15)$$

получим номограмму на кривой с узловой двойной точкой. Наконец, представив в третьей канонической форме

$$u'' + v'' + w'' = u''v''w'', \quad (6.16)$$

где

$$u'' = \operatorname{tg} u, \quad v'' = \operatorname{tg} v, \quad w'' = \operatorname{tg} w, \quad (6.17)$$

получим номограмму на кривой третьего порядка с одной изолированной двойной точкой.

Наконец, эти три кривые могут и распадаться на коническое сечение и касательную его прямолинейную шкалу для (6.1); на коническое сечение и пересекающую его прямолинейную шкалу для (6.14) и на коническую шкалу и пересекающую ее прямолинейную шкалу для (6.16); наконец, на три параллельные (более обще — три сходящиеся в одной точке прямолинейные шкалы (шкалы для (6.1)) и на три попарно пересекающиеся шкалы для (6.14).

Если взять двойственные образы этих номограммам из выравненных точек, то получим прямолинейные сетчатые номограммы, причем в силу изложенного все эти сетки в случаях вырождения преобразуются на одну из них, скажем на гексагональную сетку из трех семейств параллельных прямых, определяемому уравнением (6.3). Значит, все эти сетки гексагональные. Нетрудно написать формулы, дающие эти отображения. Нетрудно также найти отображения и в случае распада. В случае распада на коническое сечение и касательную прямую будем иметь для уравнения (6.1), вместо (6.2), представление

$$\begin{vmatrix} u^2 & u & 1 \\ v^2 & v & 1 \\ w & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (6.18) \quad \begin{vmatrix} u^2 & u' & 1 \\ v^2 & v' & 1 \\ -1 & 0 & w' \end{vmatrix} = 0, \quad (6.19)$$

$$\begin{vmatrix} u'' & u'' & 1 \\ v'' & v'' & 1 \\ -w'' & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.20)$$

Для преобразования сетки (6.18), рассматриваемой в системе координат x_1, y_1 , в сетку \bar{x}_1, \bar{y}_1 :

$$\left. \begin{aligned} 1 \cdot \bar{x}_1 + u \cdot \bar{y}_1 + u^2 &= 0, \\ 1 \cdot \bar{x}_1 + v \cdot \bar{y}_1 + v^2 &= 0, \\ 0 \cdot \bar{x}_1 + 1 \cdot \bar{y}_1 - w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

поступим так.

Для отображения ее на сетку (6.3) решаем первые два уравнения (6.21) относительно \bar{x}_1 и \bar{y}_1 , заменив затем u и v через x и y с помощью первых двух уравнений (6.3); получим

$$\bar{x}_1 = x y, \quad \bar{y}_1 = -(x + y). \quad (6.22)$$

Для отображения сетки (6.19) на ту же сетку отображаем ее на сетку (см. (6.14))

$$\bar{x}_1 = u', \quad \bar{y}_1 = \frac{1}{v'}, \quad \bar{y}_1 = w'x_1. \quad (6.23)$$

Получим уравнения сетки для (6.19) в виде

$$\left. \begin{aligned} 1. \bar{x}_2 + u' \cdot \bar{y}_2 + u'^2 &= 0, \\ 1. \bar{x}_2 + v' \cdot \bar{y}_2 + v'^2 &= 0, \\ w' \cdot \bar{x}_2 + 0 \cdot \bar{y}_2 - 1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

Отсюда находим $\bar{x}_2 = u'v'$, $\bar{y}_2 = -(u' + v')$ или

$$\bar{x}_2 = \frac{x_1}{y_1}, \quad \bar{y}_2 = -\left(x_1 + \frac{1}{y_1}\right). \quad (6.25)$$

Принимая во внимание (6.15) и (6.3), получим теперь отображение на сетку

$$(6.3): \quad \bar{x}_2 = e^{x+y}, \quad \bar{y}_2 = -(e^x + e^y). \quad (6.26)$$

Для отображения сетки (6.20) имеем:

$$\left. \begin{aligned} 1. \bar{x}_3 + u'' \cdot \bar{y}_3 + u''^2 &= 0, \\ 1. \bar{x}_3 + v'' \cdot \bar{y}_3 + v''^2 &= 0, \\ 1. \bar{x}_3 + 1 \cdot \bar{y}_3 - w'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

Отсюда находим: $\bar{x}_3 = u''v''$, $\bar{y}_3 = -(u'' + v'')$. С помощью (6.17) и (6.3) найдем искомого отображение:

$$\bar{x}_3 = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y, \quad \bar{y}_3 = -(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y). \quad (6.28)$$

Для уравнения (6.1) теперь напишем упомянутые представления на трех уже названных уникарсальных кривых:

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} u^3 & u & 1 & u^3 & u & 1 \\ v^3 & v & 1 & v^3 & v & 1 \\ w^3 & w & 1 & w^3 & w & 1 \end{array} \right| = 0, \quad (6.29)$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} u'^3 & -1 & u'^2 & u'^3 & -1 & u'^2 \\ v'^3 & & v'^2 & v'^3 & & v'^2 \\ w'^3 & & w'^2 & w'^3 & & w'^2 \end{array} \right| = 0, \quad (6.30)$$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} u''^3 & & u''^2 + 1 & u''^3 & & u''^2 + 1 \\ v''^3 & & v''^2 + 1 & v''^3 & & v''^2 + 1 \\ w''^3 & & w''^2 + 1 & w''^3 & & w''^2 + 1 \end{array} \right| = 0. \quad (6.31)$$

Уравнения первой сетки суть

$$\left. \begin{aligned} u^3 \cdot \bar{x}_{(1)} + u \cdot \bar{y}_{(1)} + 1 &= 0, \\ v^3 \cdot \bar{x}_{(1)} + v \cdot \bar{y}_{(1)} + 1 &= 0, \\ w^3 \cdot \bar{x}_{(1)} + w \cdot \bar{y}_{(1)} + 1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.32)$$

Отсюда находим с помощью (6.3) искомого отображение:

$$\bar{x}_{(1)} = \frac{1}{xy(x+y)}, \quad \bar{y}_{(1)} = \frac{x^2 + xy + y^2}{xy(x+y)}. \quad (6.33)$$

Уравнения сетки (6.30) будут:

$$\left. \begin{aligned} (u^3 - 1) \bar{x}_{(2)} + u'^2 \bar{y}_{(2)} + u' &= 0, \\ (v^3 - 1) \bar{x}_{(2)} + v'^2 \bar{y}_{(2)} + v' &= 0, \\ (w^3 - 1) \bar{x}_{(2)} + w'^2 \bar{y}_{(2)} + w' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.34)$$

Отсюда находим

$$\bar{x}_{(2)} = \frac{u'v'}{u'^2v'^2 + u' + v'}, \quad \bar{y}_{(2)} = \frac{u'v'(u' + v') + 1}{u'^2v'^2 + u' + v'} \quad (6.34')$$

или, принимая во внимание (6.15) и (6.3), получим

$$\bar{x}_{(2)} = \frac{e^{x+y}}{e^{2(x+y)} + e^x + e^y}, \quad \bar{y}_{(2)} = \frac{e^{x+y}(e^x + e^y) + 1}{e^{2(x+y)} + e^x + e^y}. \quad (6.35)$$

Уравнения сетки (6.31) запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} u''^3 \cdot \bar{x}_{(3)} + (u''^2 + 1) \bar{y}_{(3)} + u'' &= 0, \\ v''^3 \cdot \bar{x}_{(3)} + (v''^2 + 1) \bar{y}_{(3)} + v'' &= 0, \\ w''^3 \cdot \bar{x}_{(3)} + (w''^2 + 1) \bar{y}_{(3)} + w'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

Отсюда легко найдем:

$$\bar{x}_{(3)} = \frac{u''v'' - 1}{u''^2v''^2 + u''^2 + u''v'' + v''^2}, \quad \bar{y}_{(3)} = \frac{u''v''(u'' + v'')}{u''^2v''^2 + u''^2 + u''v'' + v''^2}. \quad (6.36')$$

или, принимая во внимание (6.17) и (6.3), получим

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_{(3)} &= \frac{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y - 1}{\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y + \operatorname{tg}^2 y}, \\ \bar{y}_{(3)} &= \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)}{\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y + \operatorname{tg}^2 y} \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

Формулы (6.22), (6.26), (6.28), (6.33), (6.35), (6.37) и доказывают утверждения, следящие в начале § 6 и содержащие утверждения Зауэра и Графа.

Заметим, что отгибание наших сеток будут также уникальными или расправимися кривыми третьего класса.

Так как три семейства параллельных прямых образуют гексагональную сетку, то есть каждый шестиугольник, образованный вместе со своими главными диагоналями из кривых трех семейств замкнут, то в силу непрерывности нашего отгибания этим же свойством обладает и семейство касательных к кривой третьего класса.

И это в силу изложенного есть наиболее общее семейство прямых, точнее — наиболее общий вид прямоугольной сетки, отображаемой на три пучка параллельных прямых. От исследования $n + 1$ параметрической сетки гиперплоскостей в n -мерном пространстве мы воздержимся за недостатком места.

Мы получим (случай $n = 2$) результат Графа и Зауэра [16].

§ 7. Если $n = 3$, то придерживаясь обычных обозначений, положим

$$\begin{aligned} x_0 &= \sigma, & x_1 &= u, & x_2 &= v, & x_3 &= w; \\ y_1 &= x_1, & y_2 &= y_1, & y_3 &= z, & \bar{y}_1 &= \bar{x}_1, \\ y_2 &= y, & y_3 &= z. \end{aligned}$$

Уравнения (4.5) примут вид

$$x = u, \quad y = v, \quad z = w, \quad \sigma + x + y + z = 0. \quad (7.1)$$

Получим четыре семейства параллельных плоскостей.

Уравнение (5.2) переписывается так:

$$1 + \varphi(u) \cdot \bar{x} + \varphi'(u) \bar{y} + \varphi''(u) \bar{z} = 0. \quad (7.1')$$

дифференцируя по u , получим

$$\varphi'(u) \bar{x} + \varphi''(u) \bar{y} + \varphi'''(u) \bar{z} = 0. \quad (7.2)$$

Решая совместно систему уравнений (7.1) и (7.2), получим линейчатую поверхность, обладающую тем свойством, что через каждую точку пространства к ней вообще можно провести четыре касательные плоскости

$$\left. \begin{aligned} 1 + \varphi(u) \bar{x} + \varphi'(u) \bar{y} + \varphi''(u) \bar{z} &= 0, \\ 1 + \varphi(v) \bar{x} + \varphi'(v) \bar{y} + \varphi''(v) \bar{z} &= 0, \\ 1 + \varphi(w) \bar{x} + \varphi'(w) \bar{y} + \varphi''(w) \bar{z} &= 0, \\ 1 + \varphi(\sigma) \bar{x} + \varphi'(\sigma) \bar{y} + \varphi''(\sigma) \bar{z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

(7) Нетрудно найти ребро возврата отгибавшей линейчатой поверхности.

параметры которых связаны соотношением

$$u + w + v + \sigma = 0. \quad (7.4)$$

Прямолинейные образующие имеют значение параметров, совпадающие со значениями параметров, касавшихся к развертывающейся линейчатой поверхности вдоль них плоскостей. Мы имеем номограмму со „шкалой“, расположенной на всей линейчатой поверхности, элементом которой (шкалы) служат параметризованные образующие. Вместе с тем, мы имеем отображение таких параметризованных развертывающихся линейчатых поверхностей на параметризованные пространственные кривые, что дает и известный метод изучения их взаимных свойств, но мы на этом не останавливаемся.

Уравнения отображения мы получим без труда, решив относительно x, y, z первые три уравнения (6.3), заменив в них затем u, v и w через x, y, z с помощью первых трех равенств (7.1).

Сетка из четырех пучков параллельных плоскостей должна обладать, очевидно, аналогичным плоской (гексагональной) сетке свойством октаэдричности, т. е. когда все восьмигранники, построенные из четырех пучков плоскостей, замкнуты (замкнутые октаэдры). Таким же свойством обладает, следовательно, и семейство плоскостей, касательных к нашей линейчатой поверхности. И такое семейство плоскостей можно отобразить на четыре семейства параллельных плоскостей.

Для теоремы сложения (7.4), помимо этой „сетчатой“ номограммы из четырех семейств параллельных плоскостей (7.1) и номограммы типа Мемке из выравненных точек (см. (4.4)) нулевого жанра

$$\begin{vmatrix} u & -1 & 0 & 0 \\ v & 1 & -1 & 0 \\ w & 0 & 1 & -1 \\ \sigma & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad (7.5)$$

имеется еще номограмма из выравненных точек

$$\begin{vmatrix} 1 & \varphi(u) & \varphi'(u) & \varphi''(u) \\ 1 & \varphi(v) & \varphi'(v) & \varphi''(v) \\ 1 & \varphi(w) & \varphi'(w) & \varphi''(w) \\ 1 & \varphi(\sigma) & \varphi'(\sigma) & \varphi''(\sigma) \end{vmatrix} = 0 \quad (7.6)$$

на одной пространственной кривой

$$x = \varphi(u), \quad y = \varphi'(u), \quad z = \varphi''(u), \quad (7.7)$$

причем любая плоскость пересекает эту кривую в четырех точках, параметры которых u, v, w, σ связаны уравнением (7.4). Имеем номограмму на пространственной кривой четвертого порядка первого жанра и первого типа. Однако, в пространстве номографирование на пространственной кривой четвертого порядка (их существует два типа) более сложно, чем номографирование на кривой третьего порядка в плоскости.

§ 8. В заключение отметим, что, считая в (4.3) $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_p}$ параметрами, сможем преобразовать определитель к виду определителя Массо порядка $n - p + 1$, причем элементы строк будут уже зависеть от всех параметров. Получаем номограммы с многопараметрическими шкалами. Так, при $n = 3$ и $p = 1$ получим уже плоскую номограмму с тремя бинарными полями, например (если $x_{k_1} = x_0$) с полями $(x_1; x_0), (x_2; x_0), (x_3; x_0)$. Но если $x_0 = \cos \theta$, будем иметь обычную номограмму из выравненных точек для $n = 2$.

Как мы уже отметили в конце § 7 по частному поводу, общая теория номографирования, теория канонических форм, аналогов условий Сен-Робера, нарушение единственности и учение о жанре номограммы развиваются значительно сложнее, чем для плоскости.

Алгоритм решения проблемы общей анаморфозы в многомерном пространстве, при котором возможность анаморфозы проверяется в ходе построения многомерного определителя Массо (согласно принципу игнорирования кривых) дан автором в работе [3], [7] и в § 3 работы [8] (см. также [8] [9]).

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вильнер И. А., *О линейной зависимости функций*, Сборник статей ВЭПИ 7 (1954), 126—127.
- [2] Вильнер И. А., *Номографирование систем уравнений и аналитических функций*, Номографический сборник МГУ 1951.
- [3] Вильнер И. А., *Проблема общей анаморфозы в пространстве и на плоскости, ее алгебраическая и стереометрическая номография*, Сборник статей ВЭПИ 21 (1958).
- [4] Фітске, Клейн, *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen* II, 1892.
- [5] SotEAU R., *Traité des Abcides* II, 1921.
- [6] Вильнер И. А., *Номограммы для вычисления эллиптических функций и интегралов*, УМН IX (1954), вып. 2 (60), 113—124.
- [7] Вильнер И. А., *Проблема номографической интерпретации функций комплексного переменного и задачи Коши*, Сборник Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, Физматгиз 1960.
- [8] Вильнер И. А., *Стереометрическая номография и решение проблем общей анаморфозы в N -мерном пространстве*, УМН XI (1956), 4 (70), 123—130.
- [9] Вильнер И. А., *Стереометрическая номография и пространственная анаморфоза с наперед заданной шкалой*, Укр. Мат. Журнал IX (1957), 2, 121—133.
- [10] d'Ossagne, *Traité de Nomographie*, Paris 1921.

- [11] Gronwall T. H., *Sur les équations entre trois variables représentables par des nomogrammes à points alignés*, J. math. pur. appl., sér. 6, 8, 59 (1912).
- [12] Глаголев Н. А., *Теоретические основы номографии*, Изд. ОНТИ НКТП 1934.
- [13] Пенковский М. В., *Номография*, изд. ГИТТЛ 1949.
- [14] Невский Б. А., *Сравочная книга по номографии*, ГИТТЛ 1951.
- [15] Вильнер И. А., *Топология и геометрия пространств минимой анаморфозы*, УМН XIII (1958), 4 (82).
- [16] Graf H., Sauer R., *Über dreifache Geraden in der Ebene, welche Dreiecknetze bilden*, Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Heft 1 (1924).
- [17] Нетшле, Proc. Math. Congress, Chicago 1896.
- [18] Ахмезер Н. И., *Элементы теории эллиптических функций*, ОГИЗ Гостехиздат 1948.
- [19] Уокер Р., *Алгебраические кривые*, изд. Иностр. литературы 1952.
- [20] Van der Waerden B. L., *Einführung in die algebraische Geometrie*, Berlin 1939.
- [21] Вильнер И. А., *О номографической аппроксимации эллиптических функций и номограммах в комплексных проективных пространствах*, Вычислительная математика 7 (1961), 3—74.
- [22] Vilner I. A., *Nelementarni pomagaru govnie tretno pomagafekho řadi a řeřich automorfni pomagafekho metody*, CSAV, Praha 1962, 37—85.

Поступило 1. 3. 1963.

Главное управление инженерно-технических ВУЗов
Всесоюзный заочный инженерно-строительный институт
Москва

Катедра математики
Строительской факультета
в Кошице

RELATIONS NON ÉLÉMENTAIRES DES ÉQUATIONS DU TROISIÈME ORDRE NOMOGRAPHIQUE ET LEURS TRANSFORMATIONS AUTOMORPHES

Josipih A. Vilner, Pavel Galajda

Résumé

Dans ce mémoire nous considérons les représentations diverses du théorème de l'addition de fonctions elliptiques par des points alignés et quelques applications.