MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, XIV, 1-1964

CONTRIBUTION À L'APPLICATION DES MATRICES SPATIALES DANS LA THÉORIE DES COURBES ALGÉBRIQUES PLANES DU 4e DEGRÉ

CYRIL PALAJ, Zvolen

La théorie des formes quadratiques est une des parties de la géométrie analytique des plus belles et le plus complètement traitées par les méthodes algébriques. L'exposé particulièrement systématique dans la théorie classique de ces formes a été atteint par l'usage des matrices à deux dimensions ou de leurs déterminants. Il est tout naturel de se poser la question s'il est possible de traiter les formes algébriques de degrés supérieurs en se servant des matrices à plusieurs dimensions. Le traité qui suit veut être une contribution à la théorie des formes algébriques du 4e degré au point de vue de l'application des matrices à 3, 4 et 5 dimensions. Ces matrices à plusieurs dimensions, avec $n \geqq 3$, d'après N. P. Sokolov, seront appelées matrices spatiales.

Considérons une forme quadrilinéaire avec 4 séries de $n + 1$ variables:

$$x_{i_1}^{(1)},\ x_{i_2}^{(2)},\ x_{i_3}^{(3)},\ x_{i_4}^{(4)}; \qquad i_1, \ldots, i_4 = 1, \ldots, n + 1 \tag{1}$$

c. à d. la forme:

$$f = \sum_{i_1, \ldots, i_4 = 1}^{n+1} a_{i_1 \ldots i_4} x_{i_1}^{(1)} \ldots x_{i_4}^{(4)}. \tag{2}$$

D'une façon analogue à la construction de la matrice de la forme bilinéaire à partir de ses coefficients, construisons avec les coefficients de la forme quadrilinéaire (2) la matrice à 4 dimensions

$$\mathbf{A} = \| a_{i_1 \ldots i_4} \|$$

du $(n + 1)^e$ – degré. En nous servant de la théorie des matrices spatiales, nous montrerons que l'hyperdéterminant

$$A = | a_{i_1 \ldots i_4}^{\pm \quad \pm} | \tag{3}$$

de la matrice $\mathbf{A}$ de la forme quadrilinéaire (2) est son invariant de poids 1 par rapport au groupe des transformations linéaires pour chaque série des variables (1). Dans ce but décomposons la matrice $\mathbf{A}$ dans le plan à l'aide de ses coupures bidimensionnelles

d'orientation $(i_1 i_2)$, c. à d. des coupures $\mathbf{A}_{i_1 \ldots i_4}$ avec les valeurs constantes des indices i_1, i_2 des éléments $a_{i_1 \ldots i_4}$ [1]. Nous trouvons un tableau carré

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A}_{11 i_3 i_4} & \mathbf{A}_{12 i_3 i_4} & \ldots & \mathbf{A}_{1, n+1, i_3 i_4} \\ \hline \mathbf{A}_{21 i_3 i_4} & \mathbf{A}_{22 i_3 i_4} & \ldots & \mathbf{A}_{2, n+1, i_3 i_4} \\ \hline \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \ldots & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \hline \mathbf{A}_{n+1, 1, i_3 i_4} & \mathbf{A}_{n+1, 2, i_3 i_4} & \ldots & \mathbf{A}_{n+1, n+1, i_3 i_4} \end{array} \right\| \quad \begin{array}{l} \to (i_2) \\ \to (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ \downarrow (i_1) \end{array} \tag{4}$$

avec

$$\mathbf{A}_{i_1 \ldots i_4} = \left\| \begin{array}{cccc} a_{i_1 i_2 11} & a_{i_1 i_2 12} & \ldots & a_{i_1 i_2 1, n+1} \\ a_{i_1 i_2 21} & a_{i_1 i_2 22} & \ldots & a_{i_1 i_2 2, n+1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \ldots & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{i_1 i_2, n+1, 1} & a_{i_1 i_2, n+1, 2} & \ldots & a_{i_1 i_2, n+1, n+1} \end{array} \right\|, \quad i_1, i_2 = 1, \ldots, n + 1.$$

Sousmettons la forme f à une transformation linéaire régulière

$$x_i^{(\varrho)} = \sum_{j=1}^{n+1} t_{ij}^{(\varrho)} X_j^{(\varrho)}, \tag{5}$$

où ϱ est un des nombres $1, \ldots, 4$ et $i = 1, \ldots, n + 1$.

La matrice de la transformation linéaire (5) est

$$\mathbf{T}^{(\varrho)} = \| t_{ij}^{(\varrho)} \|, \quad i, j = 1, \ldots, n + 1$$

son déterminant $T^{(\varrho)}$ étant différent de zéro.

Après la transformation nous aurons la forme

$$f^{(\varrho)} = \sum_{i_1, \ldots, i_4 = 1}^{4} a_{i_1 \ldots i_{\varrho-1} i_\varrho i_{\varrho+1} \ldots i_4}^{(\varrho)} x_{i_1}^{(1)} \ldots x_{i_{\varrho-1}}^{(\varrho-1)} X_{i_\varrho}^{(\varrho)} x_{i_{\varrho+1}}^{(\varrho+1)} \ldots x_{i_4}^{(4)}$$

avec la matrice

$$\mathbf{A}^{(\varrho)} = \| \sum_{\lambda=1}^{n+1} a_{i_1 \ldots i_{\varrho-1} \lambda i_{\varrho+1} \ldots i_4} t_{\lambda i_\varrho}^{(\varrho)} \| \tag{6}$$

qui, après la décomposition dans le plan d'après leurs coupures bidimensionnelles d'orientation $(i_1 i_2)$, prend la forme

$$\mathbf{A}^{(\varrho)} = \left\| \begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A}_{11 i_3 i_4}^{(\varrho)} & \mathbf{A}_{12 i_3 i_4}^{(\varrho)} & \ldots & \mathbf{A}_{1, n+1, i_3 i_4}^{(\varrho)} \\ \hline \mathbf{A}_{21 i_3 i_4}^{(\varrho)} & \mathbf{A}_{22 i_3 i_4}^{(\varrho)} & \ldots & \mathbf{A}_{2, n+1, i_3 i_4}^{(\varrho)} \\ \hline \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \ldots & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \hline \mathbf{A}_{n+1, 1, i_3 i_4}^{(\varrho)} & \mathbf{A}_{n+1, 2, i_3 i_4}^{(\varrho)} & \ldots & \mathbf{A}_{n+1, n+1, i_3 i_4}^{(\varrho)} \end{array} \right\| \quad \begin{array}{l} \to (i_2) \\ \to (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ \downarrow (i_1) \end{array} \tag{7}$$

où

$$\mathbf{A}_{i_1\dots i_4} = \left\| \begin{matrix} a^{(\varrho)}_{i_1 i_2 1 1} & a^{(\varrho)}_{i_1 i_2 1 2} & \dots & a^{(\varrho)}_{i_1 i_2 1, n+1} \\ a^{(\varrho)}_{i_1 i_2 2 1} & a^{(\varrho)}_{i_1 i_2 2 2} & \dots & a^{(\varrho)}_{i_1 i_2 2, n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{(\varrho)}_{i_1 i_2, n+1, 1} & a^{(\varrho)}_{i_1 i_2, n+1, 2} & \dots & a^{(\varrho)}_{i_1 i_2, n+1, n+1} \end{matrix} \right\|, \quad i_1, i_2 = 1, \dots, n+1 \qquad (8)$$

avec

$$a^{(\varrho)}_{i_1\dots i_4} = \sum_{\lambda=1}^{n+1} a_{i_1\dots i_{\varrho-1}\lambda i_{\varrho+1}\dots i_4} t^{(\varrho)}_{\lambda i_\varrho}. \qquad (9)$$

Posons $\varrho = 4$. Nous aurons:

$$a^{(4)}_{i_1\dots i_4} = \sum_{\lambda=1}^{n+1} a_{i_1 i_2 i_3 \lambda} t^{(4)}_{\lambda i_4}. \qquad (10)$$

En tenant compte de ce que dans les matrices (4) et (8) les deux premiers indices sont constants, introduisons des notations symboliques par les relations suivantes:

$$a^{(\varrho)}_{i_1 i_2 i_3 i_4} = (a^{(\varrho)}_{i_1 i_2})_{i_3 i_4} = \alpha^{(\varrho)}_{i_3 i_4},$$

$$a_{i_1 i_2 i_3 i_4} = (a_{i_1 i_2})_{i_3 i_4} = \alpha_{i_3 i_4}.$$

L'expression (10) prendra alors la forme

$$a^{(4)}_{i_1\dots i_4} = \sum_{\lambda=1}^{n+1} \alpha_{i_3 \lambda} t^{(4)}_{\lambda i_4}. \qquad (11)$$

La relation (11) nous montre que les coupures bidimensionnelles (8) sont les produits des coupures (4) par la matrice $\mathbf{T}^{(4)}$. La matrice $\mathbf{A}^{(4)}$ est alors le produit de la matrice $\mathbf{A}$ par la matrice $\mathbf{T}^{(4)}$ selon l'indice i_4. Nous avons donc

$$\mathbf{A}^{(4)} = \mathbf{A}\{i_4\}\, \mathbf{T}^{(4)}.$$

Si nous transformons la forme quadrilinéaire par les transformations (5) pour $\varrho = 3, 2, 1$, en comparant les coupures bilinéaires correspondantes de la matrice $\mathbf{A}$ et de la matrice $\mathbf{A}^{(\varrho)}$, nous trouvons d'une façon générale

$$\mathbf{A}^{(\varrho)} = \mathbf{A}\{i_\varrho\}\, \mathbf{T}^{(\varrho)} \qquad (12)$$

pour chaque $\varrho = 1, 2, 3, 4$.

La matrice $\mathbf{A}^{(\varrho)}$ a comme l'hyperdéterminant

$$\Big| \sum_{\lambda=1}^{n+1} a_{\underset{i_1}{\pm}\dots \underset{i_{\varrho-1}}{\pm}\lambda \underset{i_{\varrho+1}}{\pm}\dots \underset{i_4}{\pm}} t^{(\varrho)}_{\lambda \underset{i_\varrho}{\pm}} \Big| = | a_{\underset{i_1}{\pm}\dots\underset{i_4}{\pm}} | \,.\, T^{(\varrho)} = A \,.\, T^{(\varrho)}. \qquad (13)$$

Ainsi l'hyperdéterminant A est l'invariant (de poids 1) de la forme quadrilinéaire f par rapport au groupe des transformations linéaires régulières pour chaque série des variables $x^{(\varrho)}_i$, $\varrho = 1, 2, 3, 4$.

Si nous faisons subir successivement à la forme f toute une série de transformations linéaires (5) pour $\varrho = 1, 2, 3, 4$, nous trouverons la forme

$$f' = \sum_{i_1\dots i_4}^{n+1} a_{i_1\dots i_4} X^{(1)}_{i_1} \dots X^{(4)}_{i_4}$$

avec la matrice

$$\mathbf{A}' = \| a'_{i_1\dots i_4} \|, \quad i_1, \dots, i_4 = 1, \dots, n+1.$$

Pour l'hyperdéterminant A' de la matrice $\mathbf{A}'$, d'après (13) nous avons

$$A' = | a'_{\underset{i_1}{\pm}\dots\underset{i_4}{\pm}} | = A \,.\, T^{(1)} \dots T^{(4)}$$

c. à d.

$$A' = A \,.\, \prod_{\varrho=1}^{4} T^{(\varrho)}.$$

Si, dans la forme quadrilinéaire f, nous faisons subir à toutes les séries des variables $x^{(\varrho)}_1$, $\varrho = 1, \dots, 4$ la même transformation linéaire avec la matrice $\mathbf{T}$ dont le déterminant $T \neq 0$, nous aurons la forme f' avec la matrice $\mathbf{A}'$ dont l'hyperdéterminant est lié à l'hyperdéterminant de la forme f, en tenant compte de (14), par la relation

$$A' = A \,.\, T^4. \qquad (15)$$

Si, dans la forme quadrilinéaire (1), nous posons $(x^{(1)}) \equiv (x^{(2)}) \equiv (x^{(3)}) \equiv (x^{(4)}) \equiv (x)$, celle-ci deviendra une forme algébrique du 4^e degré

$$f = \sum_{i_1\dots i_4}^{n+1} a_{i_1\dots i_4} x_{i_1} \dots x_{i_4} \qquad (16)$$

avec une matrice à 4 dimensions symétrique du $(n+1)^e$ degré:

$$\mathbf{A} = \| a_{i_1\dots i_4} \|.$$

Son hyperdéterminant est l'invariant de la forme (16) de poids 4 et la relation (15) reste valable pour lui, A' étant l'hyperdéterminant de la matrice symétrique $\mathbf{A}'$ que nous trouvons à partir de la forme (16) au moyen de la transformation linéaire, avec le déterminant $T \neq 0$.

Nous aurons donc:

Théorème I. *L'hyperdéterminant* (3) *de la matrice* $\mathbf{A}$ *de la forme quadrilinéaire* (1) *est son invariant de poids* 1 *par rapport au groupe des transformations linéaires régulières pour chaque série des variables* $x^{(1)}_{i_1}, \dots, x^{(4)}_{i_4}$; $i_1, \dots, i_4 = 1, \dots, n+1$. *Quant à la forme algébrique du* 4^e *degré* (16), *l'hyperdéterminant de forme* (3) *de la matrice symétrique correspondante de cette forme est son invariant de poids* 4.

Dans la suite nons allons chercher la signification géométrique de l'invariant A, pour $n = 1$ et 2, et des invariants simultanés de deux et trois formes algébriques ternaires du 4^e degré qui se rattachent à l'invariant A.

Considérons d'abord le cas $n = 1$, c. à d. la forme binaire du 4[e] degré:

$$f = \sum_{i_1 \dots i_4 = 1}^{2} a_{i_1 \dots i_4} x_{i_1} \dots x_{i_4}. \tag{17}$$

La matrice $\mathbf{A}$, après le développement dans le plan d'après ses coupures bidimensionnelles d'orientation $(i_1 i_2)$, prendra ici la forme:

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cc|cc} a_{1111} & a_{1112} & a_{1211} & a_{1212} \\ a_{1121} & a_{1122} & a_{1221} & a_{1222} \\ \hline a_{2111} & a_{2112} & a_{2211} & a_{2212} \\ a_{2121} & a_{2122} & a_{2221} & a_{2222} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11 i_3 i_4} & \mathbf{A}_{12 i_3 i_4} \\ \hline \mathbf{A}_{21 i_3 i_4} & \mathbf{A}_{22 i_3 i_4} \end{array} \right\| \tag{18}$$

où les symboles $\mathbf{A}_{i_1 \dots i_4}$ représentent les matrices carrées correspondantes aux indices fixes en 1[ère] et 2[e] place. L'hyperdéterminant A de la matrice quadridimensionnelle (18) est

$$A = \left| \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11 i_3 i_4} & \mathbf{A}_{12 i_3 i_4} \\ \hline \mathbf{A}_{21 i_3 i_4} & \mathbf{A}_{22 i_3 i_4} \end{array} \right|.$$

Celui-ci peut s'exprimer comme la différence de deux déterminants cubiques d'orientation $(\overset{+\pm\pm}{\widehat{i_1 i_2 i_3 i_4}})$.

Nous avons:

$$A = \left| \mathbf{A}_{11 i_3 i_4} \middle| \overrightarrow{\mathbf{A}}_{22 i_3 i_4} \right|^{\overset{+}{(\widehat{i_1 i_2})}}_{(i_3)\,(i_4)} - \left| \mathbf{A}_{12 i_3 i_4} \middle| \overrightarrow{\mathbf{A}}_{21 i_3 i_4} \right|^{\overset{+}{(\widehat{i_1 i_2})}}_{(i_3)\,(i_4)}.$$

En développant les déterminants cubiques et en effectuant l'addition, nous trouvons:

$$A = a_{1111} a_{2222} - 4 a_{1112} a_{1222} + 3 a_{1122}^2. \tag{19}$$

Dans l'expression (19) nous reconnaissons un invariant connu dont la valeur nulle est une condition nécessaire et suffisante pour que les quatre points déterminés par l'équation $f = 0$ soient dans le rapport équianharmonique. Nous avons donc:

Théorème II. *La valeur nulle de l'hyperdéterminant de la matrice quadridimensionnelle de forme* (17) *est une condition nécessaire et suffisante pour que les quatre points déterminés par l'équation $f = 0$ soient dans le rapport équianharmonique.*

Considérons maintenant le cas $n = 2$, c. à d. la forme algébrique ternaire du 4[e] degré:

$$f = \sum_{i_1, \dots, i_4 = 1}^{3} a_{i_1 \dots i_4} x_{i_1} \dots x_{i_4}. \tag{20}$$

L'équation $f = 0$ détermine généralement une courbe algébrique plane du quatrième degré. Passons à la notation symbolique. La forme f s'écrira alors:

$$f = (a_x)^4 \equiv (b_x)^4 \equiv \dots = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i x_i \right)^4 \equiv \left(\sum_{i=1}^{3} b_i x_i \right)^4 \equiv \dots$$

où, après l'élévation des trinômes entre parenthèses à la puissance 4, nous posons:

$$a_{i_1} \dots a_{i_4} = a_{i_1 \dots i_4}, \quad b_{i_1} \dots b_{i_4} = b_{i_1 \dots i_4} \tag{21}$$

avec l'égalité:

$$a_{i_1 \dots i_4} = b_{i_1 \dots i_4}. \tag{22}$$

Ensuite considérons la droite:

$$u_x = \sum_{i=1}^{3} u_i x_i = 0 \tag{23}$$

et cherchons la condition qui doit lier les coefficients u_i de l'équation de cette droite aux coefficients $a_{i_1 \dots i_4}$ de la quartique $f = 0$ pour que la droite $u_x = 0$ coupe la quartique $f = 0$ en quatre points en rapport équianharmonique. En supposant $u_3 \neq 0$, de l'équation (23) nous tirons:

$$x_3 = -\frac{u_1 x_1 + u_2 x_2}{u_3}.$$

Après la substitution de x_3 par cette expression dans $f = (a_x)^4 \equiv (b_x)^4 = 0$ et après la simplification nous aurons:

$$(k_1 x_1 + k_2 x_2)^4 = 0, \quad (l_1 x_1 + l_2 x_2)^4 = 0 \tag{24}$$

avec

$$k_1 = a_1 u_3 - a_3 u_1, \quad k_2 = a_2 u_3 - a_3 u_2, \tag{25}$$

$$l_1 = b_1 u_3 - b_3 u_1, \quad l_2 = b_2 u_3 - b_3 u_2,$$

où

$$a_i \equiv b_i.$$

En élevant les puissances indiquées, les équations (24) donnent

$$\sum_{\lambda=0}^{4} \binom{4}{\lambda} (k_1 x_1)^{4-\lambda} (k_2 x_2)^{\lambda} = 0, \quad \sum_{\lambda=0}^{4} \binom{4}{\lambda} (l_1 x_1)^{4-\lambda} (l_2 x_2)^{\lambda} = 0$$

d'où, en nous servant des expressions:

$$k_{i_1} \dots k_{i_4} = k_{i_1 \dots i_4}, \quad l_{i_1} \dots l_{i_4} = l_{i_1 \dots i_4} \tag{26}$$

nous aurons:

$$\Sigma\, k_{i_1 \dots i_4} x_{i_1} \dots x_{i_4} = 0, \quad \Sigma\, l_{i_1 \dots i_4} x_{i_1} \dots x_{i_4} = 0 \tag{27}$$

avec

$$k_{i_1 \dots i_4} \equiv l_{i_1 \dots i_4}; \qquad i_1, \dots, i_4 = 1, 2. \tag{28}$$

Les deux équation (27) déterminent les mêmes 4 points. Pour que ces quatre points soient dans le rapport équianharmonique, d'après le théorème II il faut et il suffit que

$$A = \left|\begin{array}{cc|cc} k_{1111} & k_{1112} & k_{1211} & k_{1212} \\ k_{1121} & k_{1122} & k_{1221} & k_{1222} \\ \hline k_{2111} & k_{2112} & k_{2211} & k_{2212} \\ k_{2121} & k_{2122} & k_{2221} & k_{2222} \end{array}\right| \begin{array}{l} \overset{\pm}{(i_2)} \\ \overset{\pm}{(i_4)} \\ \overset{\pm}{(i_3)} \\ \overset{\pm}{(i_1)} \end{array} = 0. \tag{29}$$

En nous servant de (26) et (28) nous donnerons à l'expression (29) la forme

$$\left|\begin{array}{cc|cc} k_1^4 & k_1^3k_2 & k_1^3k_2 & k_1^2k_2^2 \\ k_1^3k_2 & k_1^2k_2^2 & k_1^2k_2^2 & k_1k_2^3 \\ \hline l_1^3l_2 & l_2^2l_2^2 & l_1^2l_2^2 & l_1l_2^3 \\ l_1^2l_2^2 & l_1l_2^3 & l_1l_2^3 & l_2^4 \end{array}\right| \begin{array}{l} \overset{\pm}{(i_2)} \\ \overset{\pm}{(i_4)} \\ \overset{\pm}{(i_3)} \\ \overset{\pm}{(i_1)} \end{array} = 0. \tag{30}$$

En mettant en facteur k_1 et l_2 dans les coupures tridimensionnelles respectives de la matrice de l'hyperdéterminant (30) et en décomposant le nouvel hyperdéterminant en différence de deux déterminants cubiques d'orientation $(\overset{+}{\widehat{i_1 i_2}}\overset{\pm}{i_3}\overset{\pm}{i_4})$, la relation (30) deviendra:

$$k_1l_2\left(\left|\begin{array}{cc|cc} k_1^3 & k_1^2k_2 & \vec{l_1^2l_2} & l_1l_2^2 \\ k_1^2k_2 & k_1k_2^2 & l_1l_2^2 & l_2^3 \end{array}\right|^{\overset{+}{\widehat{i_1i_2}}\ (i_4)}_{(i_3)} - \left|\begin{array}{cc|cc} k_1^2k_2 & k_1k_2^2 & \vec{l_1^3} & l_1^2l_2 \\ k_1k_2^2 & k_2^3 & l_1^2l_2 & l_1l_2^2 \end{array}\right|^{\overset{+}{\widehat{i_1i_2}}\ (i_4)}_{(i_3)}\right) = 0. \tag{31}$$

Ensuite en mettant en facteur les coefficients communs des éléments des coupures bidimensionnelles respectives des matrices des déterminants cubiques dans (31), nous aurons:

$$k_1l_2\left(k_1l_2\left|\begin{array}{cc|cc} k_1^2 & k_1k_2 & \vec{l_1^2} & l_1l_2 \\ k_1k_2 & k_2^2 & l_1l_2 & l_2^2 \end{array}\right|^{\overset{+}{(\widehat{i_1i_2})}\ (i_4)}_{(i_3)} - \right.$$

$$\left. - k_2l_1\left|\begin{array}{cc|cc} k_1^2 & k_1k_2 & \vec{l_1^2} & l_1l_2 \\ k_1k_2 & k_2^2 & l_1l_2 & l_2^2 \end{array}\right|^{\overset{+}{(\widehat{i_1i_2})}\ (i_4)}_{(i_3)}\right) = 0.$$

Évidemment, la dernière relation peut être écrite sous la forme:

$$k_1l_2\left|\begin{array}{cc|cc} k_1^2 & k_1k_2 & \vec{l_1^2} & l_1l_2 \\ k_1k_2 & k_2^2 & l_1l_2 & l_2^2 \end{array}\right|^{\overset{+}{(\widehat{i_1i_2})}\ (i_4)}_{(i_3)} . (k_1l_2 - k_2l_1) = 0$$

d'où nous aurons

$$k_1l_2\left(\begin{vmatrix} k_1^2 & k_1k_2 \\ l_1l_2 & l_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} l_1^2 & l_1l_2 \\ k_1k_2 & k_2^2 \end{vmatrix}\right) . (k_1l_2 - k_2l_1) = 0,$$

$$k_1l_2\left(k_1l_2\begin{vmatrix} k_1k_2 \\ l_1l_2 \end{vmatrix} - k_2l_1\begin{vmatrix} k_1k_2 \\ l_1l_2 \end{vmatrix}\right)(k_1l_2 - k_2l_1) = 0$$

ef finalement

$$k_1l_2\begin{vmatrix} k_1k_2 \\ l_1l_2 \end{vmatrix} . (k_1l_2 - k_2l_1)^2 = 0$$

c. à d.

$$(k_1l_2 - k_2l_1)^4 = 0. \tag{32}$$

En substituant k_1, k_2, l_1, l_2 dans (32) par des relations (25) nous aurons:

$$[(a_1u_3 - a_3u_1)(b_2u_3 - b_3u_2) - (a_2u_3 - a_3u_2)(b_1u_3 - b_3u_1)]^4 = 0$$

et après remaniement et divison par le facteur commun u_3^4:

$$(a_1b_2u_3 - a_1b_3u_2 - a_3b_2u_1 - a_2b_1u_3 + a_2b_3u_1 + a_3b_1u_2)^4 = 0$$

c. à d.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix}^4 = 0 \tag{33}$$

ou simplement

$$(abu)^4 = 0. \tag{34}$$

La relation (33) ou (34) est une expression symbolique de la relation cherchée qui doit être remplie par les coefficients u_i de la droite (23) et ceux $a_{i_1 \dots i_4}$ de la quartique $f = 0$ pour que la droite (23) coupe cette quartique en quatre points dans le rapport équianharmonique. Si, la quartique $f = 0$ restant fixe, la droite (23) change de position, l'équation (33) ou (34) est une équation symbolique de l'enveloppe des droites coupant la quartique $f = 0$ en 4 points dans le rapport équianharmonique. Cherchons l'équation non symbolique de cette enveloppe. Les calculs seront de nouveau facilités et raccourcis par l'emploi des matrices et des déterminants à plusieurs dimensions. Dans ce but construisons les matrices quadridimensionnelles du 3^e degré:

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}_{11i_3i_4} & \mathbf{A}_{12i_3i_4} & \mathbf{A}_{13i_3i_4} \\ \hline \mathbf{A}_{21i_3i_4} & \mathbf{A}_{22i_3i_4} & \mathbf{A}_{23i_3i_4} \\ \hline \mathbf{A}_{31i_3i_4} & \mathbf{A}_{32i_3i_4} & \mathbf{A}_{33i_3i_4} \end{array} \right\| \substack{\rightarrow (i_2) \\ \rightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ \downarrow (i_1)}$$

$$\mathbf{B} = \left\| \begin{array}{c|c|c} \mathbf{B}_{11i_3i_4} & \mathbf{B}_{12i_3i_4} & \mathbf{B}_{13i_3i_4} \\ \hline \mathbf{B}_{21i_3i_4} & \mathbf{B}_{22i_3i_4} & \mathbf{B}_{23i_3i_4} \\ \hline \mathbf{B}_{31i_3i_4} & \mathbf{B}_{32i_3i_4} & \mathbf{B}_{33i_3i_4} \end{array} \right\| \substack{\rightarrow (i_2) \\ \rightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ \downarrow (i_1)} \qquad (35)$$

$$\mathbf{U} = \left\| \begin{array}{c|c|c} \mathbf{U}_{11i_3i_4} & \mathbf{U}_{12i_3i_4} & \mathbf{U}_{13i_3i_4} \\ \hline \mathbf{U}_{21i_3i_4} & \mathbf{U}_{22i_3i_4} & \mathbf{U}_{23i_3i_4} \\ \hline \mathbf{U}_{31i_3i_4} & \mathbf{U}_{32i_3i_4} & \mathbf{U}_{33i_3i_4} \end{array} \right\| \substack{\rightarrow (i_2) \\ \rightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ \downarrow (i_1)}$$

où les symboles $\mathbf{A}_{i_1 \ldots i_4}$, $\mathbf{B}_{i_1 \ldots i_4}$ représentent des matrices carrées du 3^e degré aux éléments $a_{i_1 \ldots i_4}$, $b_{i_1 \ldots i_4}$ ayant des indices i_1, i_2 fixes, et les symboles $\mathbf{U}_{i_1 \ldots i_4}$ représentent des matrices carrées du 3^e degré aux éléments $u_{i_1} \ldots u_{i_4}$ aux indices fixes i_1, i_2.

Pour les coupures tridimensionnelles de la matrice **A** ou **B** ou **U** dans (35), d'orientation (i_1), convenons successivement des notations $\mathbf{A}_{r_1}, \mathbf{A}_{r_2}, \mathbf{A}_{r_3}$ où $\mathbf{B}_{r_1}, \mathbf{B}_{r_2}, \mathbf{B}_{r_3}$ où $\mathbf{U}_{r_1}, \mathbf{U}_{r_2}, \mathbf{U}_{r_3}$, c. à d.

$$\mathbf{A}_{r_1} = \| \mathbf{A}_{11i_3i_4} | \mathbf{A}_{12i_3i_4} | \overrightarrow{\mathbf{A}_{13i_3i_4}}^{(i_2)} \| \substack{\rightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3)}$$

$$\mathbf{A}_{r_2} = \| \mathbf{A}_{21i_3i_4} | \mathbf{A}_{22i_3i_4} | \overrightarrow{\mathbf{A}_{23i_3i_4}}^{(i_2)} \| \substack{\rightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3)}$$

$$\mathbf{A}_{r_3} = \| \mathbf{A}_{31i_3i_4} | \mathbf{A}_{32i_3i_4} | \overrightarrow{\mathbf{A}_{33i_3i_4}}^{(i_2)} \| \substack{\rightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3)}$$

$$\mathbf{B}_{r_1} = \| \mathbf{B}_{11i_3i_4} | \mathbf{B}_{12i_3i_4} | \overrightarrow{\mathbf{B}_{13i_3i_4}}^{(i_2)} \| \substack{\rightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3)}$$

$$\mathbf{B}_{r_2} = \| \mathbf{B}_{21i_3i_4} | \mathbf{B}_{22i_3i_4} | \overrightarrow{\mathbf{B}_{23i_3i_4}}^{(i_2)} \| \substack{\rightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3)}$$

$$\mathbf{B}_{r_3} = \| \mathbf{B}_{31i_3i_4} | \mathbf{B}_{32i_3i_4} | \overrightarrow{\mathbf{B}_{33i_3i_4}}^{(i_2)} \| \substack{\rightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3)}$$

$$\mathbf{U}_{r_1} = \| \mathbf{U}_{11i_3i_4} | \mathbf{U}_{12i_3i_4} | \overrightarrow{\mathbf{U}_{13i_3i_4}}^{(i_2)} \| \substack{\rightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3)}$$

$$\mathbf{U}_{r_2} = \| \mathbf{U}_{21i_3i_4} | \mathbf{U}_{22i_3i_4} | \overrightarrow{\mathbf{U}_{23i_3i_4}}^{(i_2)} \| \substack{\rightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3)}$$

$$\mathbf{U}_{r_3} = \| \mathbf{U}_{31i_3i_4} | \mathbf{U}_{32i_3i_4} | \overrightarrow{\mathbf{U}_{33i_3i_4}}^{(i_2)} \| \substack{\rightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3)}.$$

Ainsi les matrices quadridimensionnelles (35) peuvent s'écrire:

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{c} \mathbf{A}_{r_1} \\ \mathbf{A}_{r_2} \\ \mathbf{A}_{r_3} \end{array} \right\| \substack{\rightarrow (i_2) \\ \rightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ \downarrow (i_1)}, \quad \mathbf{B} = \left\| \begin{array}{c} \mathbf{B}_{r_1} \\ \mathbf{B}_{r_2} \\ \mathbf{B}_{r_3} \end{array} \right\| \substack{\rightarrow (i_2) \\ \rightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ \downarrow (i_1)}, \quad \mathbf{U} = \left\| \begin{array}{c} \mathbf{U}_{r_1} \\ \mathbf{U}_{r_2} \\ \mathbf{A}_{r_3} \end{array} \right\| \substack{\rightarrow (i_2) \\ \rightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ \downarrow (i_1)}. \qquad (36)$$

Avec les matrices quadridimensionnelles (36) nous pouvons construire une matrice à cinq dimensions de 3^e degré:

$$\mathbf{P} = \| \overrightarrow{\mathbf{A} | \mathbf{B} | \mathbf{U}}^{(i_0)} \| \substack{\rightarrow (i_2) \\ \rightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ \downarrow (i_1)} = \left\| \begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}_{r_1} & \mathbf{B}_{r_1} & \mathbf{U}_{r_1} \\ \mathbf{A}_{r_2} & \mathbf{B}_{r_2} & \mathbf{U}_{r_2} \\ \mathbf{A}_{r_3} & \mathbf{B}_{r_3} & \mathbf{U}_{r_3} \end{array} \right\|^{\overrightarrow{(i_0)}} \substack{\rightarrow (i_2) \\ \rightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ \downarrow (i_1)} \qquad (37)$$

où l'orientation (i_0) indique le sens du changement des lettres **A**, **B**, **U**.

Le déterminant $P = P_{\substack{+\pm \quad \pm \\ (i_0 i_1 \ldots i_4)}}$ de la matrice **P** à cinq dimensions peut s'exprimer sous la forme:

$$P = M_1 + M_2 + M_3 - M_4 - M_5 - M_6 \qquad (38)$$

avec

$$M_1 = \left| \begin{array}{c} \mathbf{A}_{r_1} \\ \mathbf{B}_{r_2} \\ \mathbf{U}_{r_3} \end{array} \right| \substack{\rightarrow \overset{\pm}{(i_2)} \\ \rightarrow \overset{\pm}{(i_4)} \\ \downarrow \overset{\pm}{(i_3)} \\ \downarrow \overset{\pm}{(\widehat{i_0 i_1})}} = \left| \begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}_{11i_3i_4} & \mathbf{A}_{12i_3i_4} & \mathbf{A}_{13i_3i_4} \\ \hline \mathbf{B}_{21i_3i_4} & \mathbf{B}_{22i_3i_4} & \mathbf{B}_{23i_3i_4} \\ \hline \mathbf{U}_{31i_3i_4} & \mathbf{U}_{32i_3i_4} & \mathbf{U}_{33i_3i_4} \end{array} \right| \substack{\rightarrow \overset{\pm}{(i_2)} \\ \rightarrow \overset{\pm}{(i_4)} \\ \downarrow \overset{\pm}{(i_3)} \\ \downarrow \overset{\pm}{(\widehat{i_0 i_1})}}$$

$$M_2 = \left| \begin{array}{c} \mathbf{A}_{r_2} \\ \mathbf{B}_{r_3} \\ \mathbf{U}_{r_1} \end{array} \right| \substack{\rightarrow \overset{\pm}{(i_2)} \\ \rightarrow \overset{\pm}{(i_4)} \\ \downarrow \overset{\pm}{(i_3)} \\ \downarrow \overset{\pm}{(\widehat{i_0 i_1})}} = \left| \begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}_{21i_3i_4} & \mathbf{A}_{22i_3i_4} & \mathbf{A}_{23i_3i_4} \\ \hline \mathbf{B}_{31i_3i_4} & \mathbf{B}_{32i_3i_4} & \mathbf{B}_{33i_3i_4} \\ \hline \mathbf{U}_{11i_3i_4} & \mathbf{U}_{12i_3i_4} & \mathbf{U}_{13i_3i_4} \end{array} \right| \substack{\rightarrow \overset{\pm}{(i_2)} \\ \rightarrow \overset{\pm}{(i_4)} \\ \downarrow \overset{\pm}{(i_3)} \\ \downarrow \overset{\pm}{(\widehat{i_0 i_1})}}$$

$$M_3 = \left| \begin{array}{c} \mathbf{A}_{r_3} \\ \mathbf{B}_{r_1} \\ \mathbf{U}_{r_2} \end{array} \right| \substack{\rightarrow \overset{\pm}{(i_2)} \\ \rightarrow \overset{\pm}{(i_4)} \\ \downarrow \overset{\pm}{(i_3)} \\ \downarrow \overset{\pm}{(\widehat{i_0 i_1})}} = \left| \begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}_{31i_3i_4} & \mathbf{A}_{32i_3i_4} & \mathbf{A}_{33i_3i_4} \\ \hline \mathbf{B}_{11i_3i_4} & \mathbf{B}_{12i_3i_4} & \mathbf{B}_{13i_3i_4} \\ \hline \mathbf{U}_{21i_3i_4} & \mathbf{U}_{22i_3i_4} & \mathbf{U}_{23i_3i_4} \end{array} \right| \substack{\rightarrow \overset{\pm}{(i_2)} \\ \rightarrow \overset{\pm}{(i_4)} \\ \downarrow \overset{\pm}{(i_3)} \\ \downarrow \overset{\pm}{(\widehat{i_0 i_1})}}$$

$$M_4 = \left|\begin{matrix} \mathbf{A}_{r_3} \\ \mathbf{B}_{r_2} \\ \mathbf{U}_{r_1} \end{matrix}\right|^{\overset{\pm}{(i_2)}\ \overset{\pm}{(i_4)}}_{\underset{(\widehat{i_0 i_1})}{\pm}\ \underset{(i_3)}{\pm}} = \left|\begin{matrix} \mathbf{A}_{31i_3i_4} & \mathbf{A}_{32i_3i_4} & \mathbf{A}_{33i_3i_4} \\ \mathbf{B}_{21i_3i_4} & \mathbf{B}_{22i_3i_4} & \mathbf{B}_{23i_3i_4} \\ \mathbf{U}_{11i_3i_4} & \mathbf{U}_{12i_3i_4} & \mathbf{U}_{13i_3i_4} \end{matrix}\right|^{\overset{\pm}{(i_2)}\ \overset{\pm}{(i_4)}}_{\underset{(\widehat{i_0 i_1})}{\pm}\ \underset{(i_3)}{\pm}}$$

$$M_5 = \left|\begin{matrix} \mathbf{A}_{r_2} \\ \mathbf{B}_{r_1} \\ \mathbf{U}_{r_3} \end{matrix}\right|^{\overset{\pm}{(i_2)}\ \overset{\pm}{(i_4)}}_{\underset{(\widehat{i_0 i_1})}{\pm}\ \underset{(i_3)}{\pm}} = \left|\begin{matrix} \mathbf{A}_{21i_3i_4} & \mathbf{A}_{22i_3i_4} & \mathbf{A}_{23i_3i_4} \\ \mathbf{B}_{11i_3i_4} & \mathbf{B}_{12i_3i_4} & \mathbf{B}_{13i_3i_4} \\ \mathbf{U}_{31i_3i_4} & \mathbf{U}_{32i_3i_4} & \mathbf{U}_{33i_3i_4} \end{matrix}\right|^{\overset{\pm}{(i_2)}\ \overset{\pm}{(i_4)}}_{\underset{(\widehat{i_0 i_1})}{\pm}\ \underset{(i_3)}{\pm}}$$

$$M_6 = \left|\begin{matrix} \mathbf{A}_{r_1} \\ \mathbf{B}_{r_3} \\ \mathbf{U}_{r_2} \end{matrix}\right|^{\overset{\pm}{(i_2)}\ \overset{\pm}{(i_4)}}_{\underset{(\widehat{i_0 i_1})}{\pm}\ \underset{(i_3)}{\pm}} = \left|\begin{matrix} \mathbf{A}_{11i_3i_4} & \mathbf{A}_{12i_3i_4} & \mathbf{A}_{13i_3i_4} \\ \mathbf{B}_{31i_3i_4} & \mathbf{B}_{32i_3i_4} & \mathbf{B}_{33i_3i_4} \\ \mathbf{U}_{21i_3i_4} & \mathbf{U}_{22i_3i_4} & \mathbf{U}_{23i_3i_4} \end{matrix}\right|^{\overset{\pm}{(i_2)}\ \overset{\pm}{(i_4)}}_{\underset{(\widehat{i_0 i_1})}{\pm}\ \underset{(i_3)}{\pm}}$$

qui sont des hyperdéterminants quadridimensionnels.

Pour l'hyperdéterminant quadridimensionnel M_1 nous avons

$$M_1 = N_1 + N_2 + N_3 - N_4 - N_5 - N_6 \tag{39}$$

où

$$N_1 = |\,\mathbf{A}_{11i_3i_4}\,|\,\mathbf{B}_{22i_3i_4}\,|\,\mathbf{U}_{33i_3i_4}\,|^{\overset{+}{\overrightarrow{(\widehat{i_0i_1i_2})}}\ (i_4)}_{(i_3)}$$

$$N_2 = |\,\mathbf{A}_{12i_3i_4}\,|\,\mathbf{B}_{23i_3i_4}\,|\,\mathbf{U}_{31i_3i_4}\,|^{\overset{+}{\overrightarrow{(\widehat{i_0i_1i_2})}}\ (i_4)}_{(i_3)}$$

$$N_3 = |\,\mathbf{A}_{13i_3i_4}\,|\,\mathbf{B}_{21i_3i_4}\,|\,\mathbf{U}_{32i_3i_4}\,|^{\overset{+}{\overrightarrow{(\widehat{i_0i_1i_2})}}\ (i_4)}_{(i_3)}$$

$$N_4 = |\,\mathbf{A}_{13i_3i_4}\,|\,\mathbf{B}_{22i_3i_4}\,|\,\mathbf{U}_{31i_3i_4}\,|^{\overset{+}{\overrightarrow{(\widehat{i_0i_1i_2})}}\ (i_4)}_{(i_3)}$$

$$N_5 = |\,\mathbf{A}_{12i_3i_4}\,|\,\mathbf{B}_{21i_3i_4}\,|\,\mathbf{U}_{33i_3i_4}\,|^{\overset{+}{\overrightarrow{(\widehat{i_0i_1i_2})}}\ (i_4)}_{(i_3)}$$

$$N_6 = |\,\mathbf{A}_{11i_3i_4}\,|\,\mathbf{B}_{23i_3i_4}\,|\,\mathbf{U}_{32i_3i_4}\,|^{\overset{+}{\overrightarrow{(\widehat{i_0i_1i_2})}}\ (i_4)}_{(i_3)}.$$

Si nous exprimons les matrices $\mathbf{A}_{i_1 \dots i_4}$, $\mathbf{B}_{i_1 \dots i_4}$, $\mathbf{U}_{i_1 \dots i_4}$ au moyen de leurs éléments et si nous introduisons les produits symboliques par les relations

$$a_{i_1 \dots i_4} = a_{i_1 i_2} a_{i_3 i_4}, \qquad b_{i_1 \dots i_4} = b_{i_1 i_2} b_{i_3 i_4} \tag{40}$$

et si nous mettons en facteur les coefficients communs des éléments dans les coupures bidimensionelles correspondantes, nous aurons:

$$N_1 = a_{11}b_{22}u_3^2\,|\,a_{i_3i_4}\,|\,b_{i_3i_4}\,|\,u_{i_3}u_{i_4}\,|^{\overset{+}{\overrightarrow{(i_0)}}\ (i_4)}_{(i_3)}$$

$$N_2 = a_{12}b_{23}u_3u_1\,|\,a_{i_3i_4}\,|\,b_{i_3i_4}\,|\,u_{i_3}u_{i_4}\,|^{\overset{+}{\overrightarrow{(i_0)}}\ (i_4)}_{(i_3)}$$

$$N_3 = a_{13}b_{21}u_3u_2\,|\,a_{i_3i_4}\,|\,b_{i_3i_4}\,|\,u_{i_3}u_{i_4}\,|^{\overset{+}{\overrightarrow{(i_0)}}\ (i_4)}_{(i_3)}$$

$$N_4 = a_{13}b_{22}u_3u_1\,|\,a_{i_3i_4}\,|\,b_{i_3i_4}\,|\,u_{i_3}u_{i_4}\,|^{\overset{+}{\overrightarrow{(i_0)}}\ (i_4)}_{(i_3)}$$

$$N_5 = a_{12}b_{21}u_3^2\,|\,a_{i_3i_4}\,|\,b_{i_3i_4}\,|\,u_{i_3}u_{i_4}\,|^{\overset{+}{\overrightarrow{(i_0)}}\ (i_4)}_{(i_3)}$$

$$N_6 = a_{11}b_{23}u_3u_2\,|\,a_{i_3i_4}\,|\,b_{i_3i_4}\,|\,u_{i_3}u_{i_4}\,|^{\overset{+}{\overrightarrow{(i_0)}}\ (i_4)}_{(i_3)}$$

en sorte que d'après (36) nous pouvons écrire:

$$M_1 = (a_{11}b_{22}u_3^2 + a_{12}b_{23}u_3u_1 + a_{13}b_{21}u_3u_2 - a_{13}b_{22}u_3u_1 -$$
$$- a_{12}b_{21}u_3^2 - a_{11}b_{23}u_3u_2)\,.\,|\,a_{i_3i_4}\,|\,b_{i_3i_4}\,|\,u_{i_3}u_{i_4}\,|^{\overset{+}{\overrightarrow{(i_0)}}\ (i_4)}_{(i_3)}.$$

Après l'introduction d'une décomposition symbolique des éléments $a_{i_3i_4}$, $b_{i_3i_4}$ par les relations

$$a_{i_3i_4} = a_{i_3}a_{i_4}, \qquad b_{i_3i_4} = b_{i_3}b_{i_4} \tag{41}$$

et en utilisant la notation

$$|\,a_{i_3i_4}\,|\,b_{i_3i_4}\,|\,u_{i_3}u_{i_4}\,|^{\overrightarrow{(i_0)}\ (i_4)}_{(i_3)} = |\,a_{i_3}a_{i_4}\,|\,b_{i_3}b_{i_4}\,|\,u_{i_3}u_{i_4}\,|^{\overrightarrow{(i_0)}\ (i_4)}_{(i_3)}$$

nous aurons

$$M_1 = \omega\,.\,\omega_1 \tag{42}$$

avec

$$\omega_1 = a_1^2 b_2^2 u_3^2 + a_1 a_2 b_2 b_3 u_3 b_1 + a_1 a_3 b_2 b_1 u_3 u_2 - a_1 a_3 b_2^2 u_1 u_3 - \\ - a_1 a_2 b_2 b_1 u_3^2 - a_1^2 b_2 b_3 u_3 u_2.$$

Pour le déterminant cubique ω nous avons:

$$\omega = \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ b_2b_1 & b_2^2 & b_2b_3 \\ u_3u_1 & u_3u_2 & u_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ b_3b_1 & b_3b_2 & b_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ u_2u_1 & u_2^2 & u_2u_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 \end{vmatrix} +$$
$$+ \begin{vmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & u_1u_3 \\ b_2b_1 & b_2^2 & b_2b_3 \\ a_3a_1 & a_3a_2 & a_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1^2 & b_1b_2 & b_1b_3 \\ a_2a_1 & a_2^2 & a_2a_3 \\ u_3u_2 & u_3u_2 & u_3^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ u_2u_1 & u_2^2 & u_2u_3 \\ b_3b_1 & b_3b_2 & b_3^2 \end{vmatrix}$$

et après simplification

$$\omega = (a_1b_2u_3 + b_1u_2a_3 + u_1a_2b_3 - u_1b_2a_3 - a_1u_2b_3 - b_1a_2u_3) \,.\, \varphi \qquad (43)$$

avec

$$\varphi = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = (abu).$$

L'expression entre parenthèses dans la relation (43) est évidemment aussi égale à φ. Nous avons donc:

$$\omega = \varphi^2 = (abu)^2. \qquad (44)$$

En substituant dans (42) nous avons

$$M_1 = (abu)^2 \,.\, \omega_1 \qquad (45)$$

En procédant d'une façon analogue pour $M_2, M_3, \ldots, M_6$ nous trouvons

$$M_i = (abu)^2 \,.\, \omega_i, \qquad i = 2, 3, \ldots, 6 \qquad (46)$$

avec

$$\omega_2 = a_3^2 b_1^2 u_2^2 + a_2 a_3 b_1 b_3 u_1 u_2 + a_1 a_3 b_1 b_2 u_2 u_3 - a_1 a_3 b_1 b_3 u_2^2 - \\ - a_3^2 b_1 b_2 u_1 u_2 - a_2 a_3 b_1^2 u_2 u_3,$$

$$\omega_3 = a_2^2 b_3^2 u_1^2 + a_1 a_2 b_2 b_3 u_1 u_3 + a_2 a_3 b_1 b_3 u_1 u_2 - a_2^2 b_1 b_3 u_1 u_3 - \\ - a_2 a_3 b_2 b_3 u_1^2 - a_1 a_2 b_3^2 u_1 u_2,$$

$$\omega_4 = b_2^3 a_3^2 u_2^2 + a_2 a_3 b_1 b_2 u_1 u_3 + a_1 a_3 b_2 b_3 u_1 u_2 - a_1 a_3 b_2^2 u_1 u_3 - \\ - a_2 a_3 b_2 b_3 u_1^2 - a_3^2 b_1 b_2 u_1 u_2,$$

$$\omega_5 = a_1^2 b_3^2 u_2^2 + a_1 a_3 b_2 b_3 u_1 u_2 + a_1 a_2 b_1 b_3 u_2 u_3 - a_1 a_3 b_1 b_3 u_2^2 - \\ - a_1 a_2 b_3^2 u_1 u_2 - a_1^2 b_2 b_3 u_2 u_3,$$

$$\omega_6 = a_2^2 b_1^2 u_3^2 + a_1 a_2 b_1 b_3 b_2 u_3 + a_2 a_3 b_1 b_2 u_1 u_3 - a_2^2 b_1 b_3 u_1 u_3 - \\ - a_1 a_2 b_1 b_2 u_3^2 - a_2 a_3 b_1^2 u_2 u_3.$$

En substituant dans (38) les M_i par les valeurs (46) nous avons:

$$P_{\substack{+\pm\ \pm \\ (i_0 i_1 \ldots i_4)}} = (abu)^2 \,.\, (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 - \omega_5 - \omega_6). \qquad (47)$$

Nous trouvons facilement que

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4 - \omega_5 - \omega_6 = \omega = (abu)^2.$$

En substituant dans (47) nous avons

$$P_{\substack{+\pm\ \pm \\ (i_0 i_1 \ldots i_4)}} = (abu)^4. \qquad (48)$$

Ainsi le déterminant $P_{\substack{+\pm\ \pm \\ (i_0 i_1 \ldots i_4)}}$ de la matrice à 5 dimensions (37) prend la forme symbolique du 1[er] membre de l'équation (34). Il est évident que le procédé inverse permet de transformer l'équation de l'enveloppe des droites coupant la quartique $f = 0$ en quatre points dans le rapport équianharmonique, écrite sous forme symbolique (34), en une équation de la forme

$$P = P_{\substack{+\pm\ \pm \\ (i_0 i_1 \ldots i_4)}} = \left| \overrightarrow{\mathbf{A}} \,|\, \mathbf{B} \,|\, \mathbf{U} \right|^{\overset{+}{(i_0)}\ (i_2)(i_4)}_{(i_1)(i_3)} = 0. \qquad (49)$$

En tenant compte de la relation imposée $a_{i_1 \ldots i_4} = b_{i_1 \ldots i_4}$ nous pouvons donner à l'équation (49) une forme définitive

$$P = \left| \overrightarrow{\mathbf{A}} \,|\, \mathbf{A} \,|\, \mathbf{U} \right|^{\overset{+}{(i_0)}\ (i_2)(i_4)}_{(i_1)(i_3)} = 0. \qquad (50)$$

Nous avons donc:

Théorème III. *L'équation* (50) *dans laquelle* **A**, **U** *sont des matrices quadridimensionnelles de* (35) *est une équation de l'enveloppe des droites* (23) *coupant la quartique* (20) *en quatre points dans le rapport équianharmonique.*

Considérons ensuite deux quartiques

$$f = (a_x)^4 = 0, \qquad g = (b_x)^4 = 0 \qquad (51)$$

avec les matrices

$$\mathbf{A} = \| \overrightarrow{a_{i_0 i_1 \ldots i_4}} \|^{(i_0)\ (i_2)(i_4)}_{(i_1)(i_3)}, \qquad \mathbf{B} = \| \overrightarrow{b_{i_0 i_1 \ldots i_4}} \|^{(i_0)\ (i_2)(i_4)}_{(i_1)(i_3)}$$

où les relations (22) ne sont généralement pas valables. Coupons ces quartiques par la droite

$$u_x = 0. \tag{52}$$

En éliminant la variable u_3 des équations (52) et (51) nous aurons, après simplification, les relations

$$(k_1x_1 + k_2x_2)^4 = 0, \qquad (l_1x_1 + l_2x_2)^4 = 0 \tag{53}$$

où

$$k_1 = a_1u_3 - a_3u_1, \qquad k_2 = a_2u_3 - a_3u_2,$$
$$l_1 = b_1u_3 - b_3u_1, \qquad l_2 = b_2u_3 - b_3u_2.$$

En développant les relations (53), pour les points d'intersection de la droite (52) avec les quartiques (51), nous aurons les équations

$$\sum_{\lambda=0}^{4}\binom{4}{\lambda}(k_1x_1)^{4-\lambda}(k_2x_2)^{\lambda} = 0, \qquad \sum_{\lambda=0}^{4}\binom{4}{\lambda}(l_1x_1)^{4-\lambda}(l_2x_2)^{\lambda} = 0.$$

Demandons que ces deux ensembles de points soient apolaires. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi s'écrit:

$$\sum_{\lambda=0}^{4}(-1)^{\lambda}\binom{4}{\lambda}(k_1l_2)^{4-\lambda}(k_2l_1)^{\lambda} = 0$$

c. à d.

$$\begin{vmatrix} k_1k_2 \\ l_1l_2 \end{vmatrix}^4 = 0$$

que nous pouvons, d'après (32), (33) et (34), écrire sous la forme

$$(abu)^4 = 0, \tag{54}$$

les relations (22) n'étant pas valables.

En comparant la relation (54) avec les relations (48) et (49) nous trouvons que la condition (54) peut s'écrire sous la forme

$$|\overrightarrow{\mathbf{A}}|\mathbf{B}|\mathbf{U}|\;\overset{+}{(i_0)}\begin{smallmatrix} \to (i_2) \\ \to (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ (i_1) \end{smallmatrix} = 0, \tag{55}$$

où $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sont des matrices quadridimensionnelles symétriques formées des coefficients des quartiques (51).

La droite (52) n'a été soumise à aucune autre condition que celle de couper les quartiques (51) en deux divisions de quatre points mutuellement apolaires. Ainsi donc l'équation (55) est celle de l'enveloppe des droites coupant les quartiques (51) en divisions apolaires. Nous avons donc:

Théorème IV. *L'enveloppe des droites coupant les quartiques* (48) *en deux divisions de 4 points mutuellement apolaires a pour équation*

$$|\overrightarrow{\mathbf{A}}|\mathbf{B}|\mathbf{U}|\;\overset{+}{(i_0)}\begin{smallmatrix} \to (i_2) \\ \to (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ (i_1) \end{smallmatrix} = 0,$$

où $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{U}$ *sont les matrices* (35).

Considérons ensuite trois quartiques:

$$f = (a_x)^4 = 0; \qquad g = (b_x)^4 = 0, \qquad h = (c_x)^4 = 0. \tag{56}$$

L'enveloppe des droites coupant les quartiques f et g en deux divisions de quatre points mutuellement apolaires est donnée par l'équation tangentielle (55). Demandons que cette courbe soit apolaire envers la quartique h. Pour y satisfaire il faut et il suffit que la somme des produits des coefficients correspondants de l'équation ponctuelle de la courbe h et de l'équation tangentielle de la courbe (55) soit égale à zéro. Cette somme des produits peut etre effectuée de telle sorte que dans l'équation (55) nous poserons

$$u_{i_1}\ldots u_{i_4} = c_{i_1\ldots i_4}$$

où les $c_{i_1\ldots i_4}$ sont les coefficients de l'équation de la quartique h. Nous aurons

$$|\overrightarrow{\mathbf{A}}|\mathbf{B}|\mathbf{C}|\;\overset{+}{(i_0)}\begin{smallmatrix} \to (i_2) \\ \to (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ (i_1) \end{smallmatrix} = 0. \tag{57}$$

Nous pouvons arriver à la condition (57) aussi en demandant que la quartique g soit apolaire envers l'enveloppe des droites coupant les quartiques f et h en deux divisions de 4 points mutuellement apolaires. Nous aurons

$$|\overrightarrow{\mathbf{A}}|\mathbf{C}|\mathbf{B}|\;\overset{+}{(i_0)}\begin{smallmatrix} \to (i_2) \\ \to (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ (i_1) \end{smallmatrix} = |\overrightarrow{\mathbf{A}}|\mathbf{B}|\mathbf{C}|\;\overset{+}{(i_0)}\begin{smallmatrix} \to (i_2) \\ \to (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ (i_1) \end{smallmatrix} = 0$$

ce qui est aussi l'équation (57).

Pour que la quartique f soit apolaire envers l'enveloppe des droites coupant les quartiques g et h en deux divisions de 4 points mutuellement apolaires, la condition en est:

$$|\overrightarrow{\mathbf{B}}|\mathbf{C}|\mathbf{A}|\;\overset{+}{(i_0)}\begin{smallmatrix} \to (i_2) \\ \to (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ (i_1) \end{smallmatrix} = |\overrightarrow{\mathbf{A}}|\mathbf{B}|\mathbf{C}|\;\overset{+}{(i_0)}\begin{smallmatrix} \to (i_2) \\ \to (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ (i_1) \end{smallmatrix} = 0$$

ce qui est de nouveau l'équation (57). Nous avons donc:

Théorème V. *La condition nécessaire et suffisante pour que chacune des trois quartiques f, g, h soit apolaire envers l'enveloppe des droites coupant les deux autres quartiques en deux divisions de 4 points mutuellement apolaires, s'exprime par*

$$\overrightarrow{|\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{C}|}\ \overset{+}{(i_0)}\ \begin{array}{l}\rightarrow (i_2)\\ \rightarrow (i_4)\\ \downarrow (i_3)\\ \downarrow (i_1)\end{array} = 0$$

où **A**, **B**, **C** *sont les matrices des quartiques f, g, h.*

Cela signifie que la relation (57) est une condition nécessaire et suffisante pour que la quartique f soit apolaire envers la courbe

$$\overrightarrow{|\mathbf{B}|\mathbf{C}|\mathbf{U}|}\ \overset{+}{(i_0)}\ \begin{array}{l}\rightarrow (i_2)\\ \rightarrow (i_4)\\ \downarrow (i_3)\\ \downarrow (i_1)\end{array} = 0$$

la quartique g apolaire envers la courbe

$$\overrightarrow{|\mathbf{A}|\mathbf{C}|\mathbf{U}|}\ \overset{+}{(i_0)}\ \begin{array}{l}\rightarrow (i_2)\\ \rightarrow (i_4)\\ \downarrow (i_3)\\ \downarrow (i_1)\end{array} = 0$$

et la quartique h apolaire envers la courbe

$$\overrightarrow{|\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{U}|}\ \overset{+}{(i_0)}\ \begin{array}{l}\rightarrow (i_2)\\ \rightarrow (i_4)\\ \downarrow (i_3)\\ \downarrow (i_1)\end{array} = 0.$$

Admettons maintenant que deux des trois quartiques (56) se confondent, soit par exemple h, g. La relation (57) deviendra

$$\overrightarrow{|\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{B}|}\ \overset{+}{(i_0)}\ \begin{array}{l}\rightarrow (i_2)\\ \rightarrow (i_4)\\ \downarrow (i_3)\\ \downarrow (i_1)\end{array} = 0. \qquad (58)$$

En prenant en considération que, d'après le théorème IV, l'équation

$$\overrightarrow{|\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{U}|}\ \overset{+}{(i_0)}\ \begin{array}{l}\rightarrow (i_2)\\ \rightarrow (i_4)\\ \downarrow (i_3)\\ \downarrow (i_1)\end{array} = 0$$

est celle de l'enveloppe des droites coupant les quartiques f et g en deux divisions de quatre points mutuellement apolaires et que, d'après (58), l'équation

$$\overrightarrow{|\mathbf{B}|\mathbf{B}|\mathbf{U}|}\ \overset{+}{(i_0)}\ \begin{array}{l}\rightarrow (i_2)\\ \rightarrow (i_4)\\ \downarrow (i_3)\\ \downarrow (i_1)\end{array} = 0$$

est celle de l'enveloppe des droites coupant la quartique g en 4 points dans le rapport équianharmonique, nous trouvons facilement que la relation (58) exprime une condition nécessaire et suffisante d'une part pour que la quartique g soit apolaire envers l'enveloppe des droites coupant les quartiques f et g en deux divisions de 4 points mutuellement apolaires, d'autre part pour que la quartique f soit apolaire envers l'enveloppe des droites coupant la quartique g en 4 points dans le rapport équianharmonique. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème VI. *La valeur nulle du déterminant à cinq dimensions*

$$\overrightarrow{|\mathbf{A}|\mathbf{B}|\mathbf{B}|}\ \overset{+}{(i_0)}\ \begin{array}{l}\rightarrow (i_2)\\ \rightarrow (i_4)\\ \downarrow (i_3)\\ \downarrow (i_1)\end{array}$$

où **A**, **B** *sont des matrices quadridimensionnelles symétriques formées des coefficients des quartiques f et g, est une condition nécessaire et suffisante d'une part pour que la quartique g soit apolaire envers l'enveloppe des droites coupant les quartiques f et g en deux divisions de quatre points mutuellement apolaires, d'autre part pour que la quartique f soit apolaire envers l'enveloppe des droites coupant la quartique g en quatre points formant un rapport équianharmonique.*

Il est évident que

$$\overrightarrow{|\mathbf{A}|\mathbf{A}|\mathbf{B}|}\ \overset{+}{(i_0)}\ \begin{array}{l}\rightarrow (i_2)\\ \rightarrow (i_4)\\ \downarrow (i_3)\\ \downarrow (i_1)\end{array} = 0$$

est une condition nécessaire et suffisante pour la propriété que nous aurons à partir du théorème VI en échangeant mutuellement les quartiques f et g.

Si toutes les trois quartiques f, g, h se confondent, la relation (57) deviendra

$$\overrightarrow{|\mathbf{A}|\mathbf{A}|\mathbf{A}|}\ \overset{+}{(i_0)}\ \begin{array}{l}\rightarrow (i_2)\\ \rightarrow (i_4)\\ \downarrow (i_3)\\ \downarrow (i_1)\end{array} = 0. \qquad (59)$$

En considérant que l'enveloppe des droites coupant la quartique $f\,g\,h$ en quatre points dans le rapport équianharmonique a pour équation

$$\overrightarrow{|\mathbf{A}|\mathbf{A}|\mathbf{U}|}\ \overset{+}{(i_0)}\ \begin{array}{l}\rightarrow (i_2)\\ \rightarrow (i_4)\\ \downarrow (i_3)\\ \downarrow (i_1)\end{array} = 0,$$

il en ressort que la relation (59) est une condition nécessaire et suffisante pour que la quartique f soit apolaire avec l'enveloppe des droites coupant la même quartique en quatre points dans le rapport équianharmonique. Nous avons donc:

Théorème VII. *La relation*

$$|\overrightarrow{\mathbf{A}}|\mathbf{A}|\mathbf{A}| \begin{array}{l} \overset{+}{(i_0)} \to (i_2),\ \to (i_4) \\ \downarrow (i_3),\ \downarrow (i_1) \end{array} = 0 \tag{60}$$

est une condition nécessaire et suffisante pour que la quartique f soit apolaire envers l'enveloppe des droites coupant cette quartique en quatre points dans le rapport équianharmonique, c. à d. envers son contravariant équianharmonique.

Le déterminant à 5 dimensions du 3e degré dans la relation (60) avec les coupures quadridimensionnelles égales $\mathbf{A}$ d'orientation (i_0) peut s'exprimer comme un 3!-multiple de l'hyperdéterminant de la matrice $\mathbf{A}$. Nous avons

$$|\overrightarrow{\mathbf{A}}|\mathbf{A}|\mathbf{A}| \begin{array}{l} \overset{+}{(i_0)} \to (i_2),\ \to (i_4) \\ \downarrow (i_3),\ \downarrow (i_1) \end{array} = \left|\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathbf{A}_{11i_3i_4} & \mathbf{A}_{12i_3i_4} & \mathbf{A}_{13i_3i_4} & & \\ \hline \mathbf{A}_{21i_3i_4} & \mathbf{A}_{22i_3i_4} & \mathbf{A}_{23i_3i_4} & \bullet & \bullet \\ \hline \mathbf{A}_{31i_3i_4} & \mathbf{A}_{32i_3i_4} & \mathbf{A}_{33i_3i_4} & & \end{array}\right| \begin{array}{l} \overset{+}{\overrightarrow{(i_0)}} \to (i_2),\ \to (i_4) \\ \downarrow (i_3),\ \downarrow (i_1) \end{array} \tag{61}$$

où le signe $\bullet$ signifie la répétition de la couche quadridimensionnelle $\mathbf{A}$. En développant le déterminant à cinq dimensions (61), selon la règle de Sarrus généralisée, en une somme de déterminants quadridimensionnels, nous aurons

$$|\overrightarrow{\mathbf{A}}|\mathbf{A}|\mathbf{A}| \begin{array}{l} \overset{+}{(i_0)} \to (i_2),\ \to (i_4) \\ \downarrow (i_3),\ \downarrow (i_1) \end{array} = 3! \left|\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}_{11i_3i_4} & \mathbf{A}_{12i_3i_4} & \mathbf{A}_{13i_3i_4} \\ \hline \mathbf{A}_{21i_3i_4} & \mathbf{A}_{22i_3i_4} & \mathbf{A}_{23i_3i_4} \\ \hline \mathbf{A}_{31i_3i_4} & \mathbf{A}_{32i_3i_4} & \mathbf{A}_{33i_3i_4} \end{array}\right| \begin{array}{l} \to (i_2),\ \to (i_4) \\ \downarrow (i_3),\ \downarrow (i_1) \end{array} = 3!\,A$$

où A est l'hyperdéterminant de la matrice quadridimensionnelle $\mathbf{A}$.

Ainsi la relation (60) peut s'écrire sous la forme

$$A = 0.$$

En même temps nous avons trouvé aussi la signification géométrique de l'invariant A pour $n = 2$. Nous avons donc:

Théorème VIII. *La condition nécessaire et suffisante pour que la quartique f soit apolaire envers son contravariant équianharmonique est $A = 0$, A étant l'hyperdéterminant de la matrice quadridimensionnelle $\mathbf{A}$ de la quartique f.*

En résummant les résultats précédents nous pouvons constater qu'au cours de nos recherches nous sommes arrivés aux relations de deux types, à savoir celle du type (55) et celle du type (57). Les relations du type (55) représentent les formes contravariantes simultanées équianharmoniques de deux courbes algébriques planes du 4e degré. Si, dans les relations (55), une de ces courbes se trouve représentée deux fois par sa matrice, la relation (55) donne un contravariant équianharmonique de cette courbe.

La relation du type (57) représente la valeur nulle de l'invariant simultané de trois courbes algébriques du 4e degré. Sa signification géométrique est exprimée par le théorème V. Si une des courbes considérées est représentée deux fois par sa matrice dans la relation (57), nous en déduisons des relations invariantes simultanées spéciales pour deux courbes algébriques du 4e degré. Si $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{C}$, la relation (57) peut être mise sous la forme (62) dont la signification géométrique est donnée par le théorème VIII. L'expression $|\overrightarrow{\mathbf{A}}|\mathbf{B}|\mathbf{C}| \begin{array}{l} \overset{+}{(i_0)} \to (i_2),\ \to (i_4) \\ \downarrow (i_3),\ \downarrow (i_1) \end{array}$ est donc un invariant simultané fondamental de trois courbes algébriques du 4e degré. Des cas spéciaux de cet invariant (lorsque les courbes se confondent) donnent des invariants simultanés de deux courbes et l'invariant d'une courbe du 4e degré en même temps que leurs significations geométriques.

LITTÉRATURE

[1] Соколов Н. П., *Пространственные матрицы и их приложения*, Москва 1960.

Reçu le 24. aout 1963.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Vysokej školy lesníckej a drevárskej
vo Zvolene

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МАТРИЦ В ТЕОРИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Цирил Палай

Резюме

В статье автор сначала констатирует, что в классической теории квадратных фигур было достигнуто особой наглядности использованием двумерных матриц или же их детерминантов. В предлагаемой статье он указывает на то, что аналогично возможно обработать алгебраические фигуры высших степеней использованием многомерных матриц, которые автор в соответствии с названием, введенным Н. П. Соколовым для натуральных $n \geqq 3$, называет пространственными матрицами. Статья содержит новые результаты об использовании пространственных матриц в теории алгебраических плоских кривых четвертого порядка.

Автор разбирает одну, две и три алгебраические тернарные формы четвертого порядка f, g, h с четырехмерными симметрическими матрицами $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и образует пятимерные детерминанты вида

$$|\overrightarrow{\mathbf{A}}|\mathbf{B}|\mathbf{U}| \begin{array}{l} \overset{+}{(i_0)} \to (i_2),\ \to (i_4) \\ \downarrow (i_3),\ \downarrow (i_1) \end{array} \tag{63}$$

где $\mathbf{U}$ является четырехмерной матрицей элементов $u_{i_1} \dots u_{i_4}$ и вида

$$\left| \overrightarrow{\mathbf{A}} \,\middle|\, \mathbf{B} \,\middle|\, \overset{\overset{+}{(i_0)}}{\mathbf{C}} \right| \begin{array}{l} \rightarrow (i_2) \\ \rightarrow (i_4) \\ \downarrow (i_3) \\ \downarrow (i_1) \end{array} . \tag{64}$$

Выражение (63) является совместным контравариантом формы f, g. Его геометрическое значение выражено теоремой III. При равенстве четырехмерных матриц форм f, g, т. е. при $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ геометрическое значение контраварианта (63) выражено теоремой IV. Геометрическое значение нулевой величины совместного инварианта (64) трех алгебраических форм f, g, h выражено теоремой V. При $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ имеется совместный инвариант двух алгебраических форм с геометрическим значением, выраженным теоремой VI. При $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{C}$ инвариант (64) равняется гипердетерминанту четырехмерной матрицы $\mathbf{A}$ формы f и его геометрическое значение выражают теоремы VII и VIII.