MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, XIV, 1-1964

UNE NOUVELLE DÉMONSTRATION ÉLÉMENTAIRE DE LA FORMULE COMBINATOIRE DE LI JEN-SHU

JOSEF KAUCKÝ, Bratislava

1.

Il s'agit de l'identité combinatoire

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2, \tag{1}$$

qui se trouve sans démostration dans le livre du mathématicien chinois du dernier siècle Li Jen-shu, publié en 1867 à Nanking sous le titre „Tso-ku-hsi-chai hsüan-hsüeh".

En ce qui concerne l'histoire de cette formule remarquable, je renvois le lecteur à mon article récent [1] où l'on trouve aussi les références littéraires plus détaillées.

Dans ce qui suit, je veux montrer comment on peut démontrer l'égalité (1) par une voie élémentaire nouvelle.

2.

Nous sortons de la rélation ($k \leq l$)

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{l}{j} \alpha^{k-j}\beta^{j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{l+j}{j} (\alpha-\beta)^{k-j}\beta^{j}, \tag{2}$$

dont la démonstration se trouve dans le travail de W. Ljunggren [2].

En écrivant l'identité évidente

$$(\alpha x + \beta)^k (1+x)^l = [x(\alpha-\beta) + \beta(1+x)]^k (1+x)^l \tag{3}$$

et en identifiant les coefficients de x^k dans les dévéloppements des deux membres, on obtient la formule (2).

Si nous posons dans la rélation (2)

$$l = k, \quad \alpha = x, \quad \beta = 1,$$

nous obtenons l'équation plus simple

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 x^{k-j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{k+j}{k} (x-1)^{k-j}. \tag{4}$$

Cette rélation a été démontrée à l'aide de quelques propriétés des polynômes de Legendre par P. Turán dans son article [3] et d'une manière élémentaire par moi-même dans la note [4].

3.

Posons maintenant dans la dernière équation

$$x = \mathrm{E},$$

où E désigne l'opérateur défini par l'équation

$$\mathrm{E} f(n) = f(n+1). \tag{5}$$

Ensuite nous avons la rélation

$$\Delta = \mathrm{E} - 1,$$

Δ signifiant l'opérateur de la différence qui jouit de la propriété

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) = (\mathrm{E} - 1) f(n). \tag{6}$$

Nous avons ainsi l'égalité suivante

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \mathrm{E}^{k-j} f(n) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\binom{k+j}{k} \Delta^{k-j} f(n). \tag{7}$$

4.

Pour obtenir la formule demandée (1), nous devons choisir convenablement la fonction f.

Soit

$$f(n) = \binom{n+k}{2k}. \tag{8}$$

Ensuite il est

$$\mathrm{E}^{k-j} f(n) = \binom{n+2k-j}{2k}. \tag{9}$$

D'autre part, nous avons

$$\Delta f(n) = \binom{n+k+1}{2k} - \binom{n+k}{2k} = \binom{n+k}{2k-1}$$

et, en général,

$$\Delta^{k-j} f(n) = \binom{n+k}{2k-(k-j)} = \binom{n+k}{k+j}. \tag{10}$$

En substituant ces résultats dans l'équation (7), on obtient

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \binom{k+j}{k} \binom{n+k}{k+j}. \tag{11}$$

5.

Il nous reste à calculer la deuxième somme. Mais à l'aide de l'égalité connue

$$\binom{m+v}{m}\binom{n}{m+v} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{v} \tag{12}$$

nous avons

$$\binom{k+j}{k}\binom{n+k}{k+j} = \binom{n+k}{k}\binom{n}{j}$$

et la somme mentionnée se réduit à

$$\binom{n+k}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{k}{k-j}. \tag{13}$$

Pour terminer notre démonstration il suffit maintenant de tenir compte de la formule de Vandermonde

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}, \tag{14}$$

d'après laquelle

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}\binom{k}{k-j} = \binom{n+k}{k}.$$

Il en résulte que l'expression (13) se réduit à

$$\binom{n+k}{k}^2 \tag{15}$$

et l'identité (1) est ainsi démonstrée.

LITTÉRATURE

[1] Kaucký J., *O jednom problému z dějin čínské matematiky* (*Über ein Problem aus der Geschichte der chinesischen Mathematik*), Matematicko-fyzikálny časopis SAV *13* (1963), 32–40.

[2] Ljunggren W., *Et elemetaert bevis for en formel av A. C. Dixon*, Norsk Matematisk Tidsskrift *29* (1947), 35–38.

[3] Turán P., *A kínai matematika történetének egy problémájáról*, Matematikai Lapok V (1954), 1–6.

[4] Kaucký J., *Poznámka k jednomu článku P. Turána* (*Remarques à un travail de P. Turán*), Matematicko-fyzikálny časopis SAV *12* (1962), 212–216.

Reçu le 11. mai 1963.

ČSAV, Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie vied
v Bratislave

НОВОЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КОМБИНАТОРНОЙ ФОРМУЛЫ ЛИ ЖЕН-ШУ

Иосеф Кауцки

Резюме

Здесь доказывается комбинаторное тождество (1), о истории и доказательствах которого я говорил в статье [1].

Мы выходим из уравнения (2), доказательство которого находится в работе Льюнггрена [2]. Оно состоит в том, что в тождестве (3) сравниваем коэффициенты при x^k в разложениях выражений, которые стоят в обоих частях.

Особым случаем уравнения (2) является уравнение (4), которое доказал П. Туран в статье [3], а я в примечании [4].

Если теперь положим в этом уравнении $x = E$, где E — оператор, определенный соотношением (5), то $x - 1 = E - 1 = \Delta$, где Δ — разностный оператор, определенный уравнением (6). Так из уравнения (4) мы получим уравнение (7).

Чтобы получить тождество (1), достаточно взять за $f(n)$ функцию (8). Тогда, собственно говоря, имеют место соотношения (9) и (10), при помощи которых мы получаем уравнение (11).

Чтобы закончить доказательство, остается вычислить значение суммы, стоящей в его правой части. Однако, с помощью известной формулы (12) мы получим сначала выражение (13), которое с помощью формулы Вандермонда (14) дает (15).

Так доказано комбинаторное тождество (1).