MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, XIV, 1-1964

# ÜBER DIE FUNKTIONEN DER ERSTEN BAIRESCHEN KLASSE MIT DER EIGENSCHAFT VON DARBOUX

LADISLAV MIŠÍK, Bratislava

Z. Zahorski hat in [4], S. 7, folgendes bewiesen: Die Menge aller Funktionen der ersten Baireschen Klasse mit der Eigenschaft von Darboux, die auf dem eindimensionalen Euklidischen Raum definiert sind, ist gleich den Mengen $\mathcal{M}_0$ und $\mathcal{M}_1$. So ist jede Funktion $f$ der ersten Baireschen Klasse mit der Eigenschaft von Darboux durch gewisse topologische Eigenschaften der Mengen $\{x : f(x) > a\}$ und $\{x : f(x) < a\}$ charakterisiert. In dieser Arbeit beweist man, daß eine ähnliche Behauptung auch für die Funktionen, welche auf dem $n$-dimensionalen Euklidischen Raum definiert sind, gilt. Dabei wird auch eine Charakterisierung dieser Funktionen durch eine Eigenschaft der Mengen $\{x : f(x) \geqq a\}$ und $\{x : f(x) \leqq a\}$ gegeben.

Es sei $X$ ein topologischer Raum. Ein System $\mathcal{O}$ von Teilmengen des Raumes $X$ heißt eine offene Base, wenn die Mengen aus des Systems $\mathcal{O}$ offen sind und wenn zu jedem $x \in X$ und jeder Umgebung $U$ mit $x \in U$ ein $O \in \mathcal{O}$ existiert, so daß $x \in O \subset U$ ist. Es sei $f$ eine reelle Funktion, die auf $X$ definiert ist, und $\mathcal{O}$ sei eine offene Base. Die Funktion $f$ hat die Eigenschaft von Darboux in starkem Sinne bezüglich der Base $\mathcal{O}$, wenn folgendes gilt: Für jedes $O \in \mathcal{O}$ und jede Zahl $c$, für welche zwei Punkte $x$ und $y$ aus $\bar{O}$ (1) so existieren, daß $f(x) < c < f(y)$ ist, existiert ein Punkt $\xi \in O$ für den $f(\xi) = c$ ist. So zum Beispiel hat jede Funktion, welche in dem $n$-dimensionalen Euklidischen Raum $E_n$ stetig ist, die Eigenschaft von Darboux in starkem Sinne bezüglich der Base aller Umgebungen $O(x, \varepsilon)$ für jedes $x \in E_n$ und $\varepsilon > 0$, wobei $O(x, \varepsilon)$ die Menge aller Punkte $y$ aus $E_n$ ist, die die Entfernung von $x$ kleiner als $\varepsilon$ haben. Jede Funktion die im $E_n$ stetig ist, hat die Eigenschaft von Darboux in starkem Sinne auch bezüglich der Base aller offenen Intervallen. Die Ableitung einer additiven Intervallfunktion hat die Eigenschaft von Darboux in starkem Sinne bezüglich der Base aller offenen Intervallen [2], S. 272.

Es sei $\mathcal{O}$ eine offene Base im topologischen Raum $X$. Eine Menge $A$ hat die Eigenschaft $M'_*(\mathcal{O})$, wenn für jedes $O \in \mathcal{O}$, für das $O \subset A$ ist, $\bar{O} \subset A$ gilt. Die Menge $\mathcal{M}'_*(\mathcal{O})$ sei die Menge aller Funktionen $f$, die auf $X$ definiert sind, und für welche die Mengen $\{x : f(x) \geqq a\}$ und $\{x : f(x) \leqq a\}$ (2) für jede reelle Zahl $a$ die Eigenschaft $M'_*(\mathcal{O})$ haben. Jede Funktion die im $X$ stetig ist, gehört zu der Menge $\mathcal{M}'_*(\mathcal{O})$ für jede offene Base $\mathcal{O}$. Wenn $X = E_n$ und $\mathcal{O}$ die Base aller offenen Intervallen ist, dann ist die Ableitung einer additiven Intervallfunktion aus der Menge $\mathcal{M}'_*(\mathcal{O})$. Das geht aus dem Lemma 4 [2], hervor. Die Menge $\mathcal{M}_*(\mathcal{O})$ sei die Menge aller Funktionen aus $\mathcal{M}'_*(\mathcal{O})$, welche aus der ersten Baireschen Klasse sind, d. h. wenn $X$ ein metrischer Raum ist, die Mengen $\{x : f(x) \geqq a\}$ und $\{x : f(x) \leqq a\}$ sind $G_\delta$ und haben die Eigenschaft $M'_*(\mathcal{O})$ für jede Zahl $a$. Eine Funktion ist aus der ersten Baireschen Klasse, wenn sie der Limes einer Folge von stetigen Funktionen ist.

Wir werden sagen, daß die offene Base $\mathcal{O}$ in topologischem Raum $X$ die Eigenschaft 1 und 2 hat, wenn folgendes gilt:

**1.** *Es existiert zu jedem Punkt $x \in X$ und zu jeder offenen Menge $O$, für welche $x \in O$ ist, eine solche Menge $U \in \mathcal{O}$, für welche $U \subset O$ und $x \in \bar{U} - U$ ist.*

**2.** *Für jedes $O \in \mathcal{O}$ und jede solche Zerlegung der Menge $O$ in zwei nichtleere zueinander disjunkte Mengen $A$ und $B$, $O = A \cup B$,* (3) *für welche $\bar{U} \cap O \subset A$, bzw. $\bar{U} \cap O \subset B$ ist, wenn $U \subset A$, bzw. $U \subset B$ und $U \in \mathcal{O}$ ist, sind die Mengen $A' \cap B$ und $A \cap B'$ nicht leer.* (4)

Es sei $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ die Menge aller Funktionen, die aus der ersten Baireschen Klasse sind, und die die Eigenschaft von Darboux in starkem Sinne bezüglich der Base $\mathcal{O}$ haben.

**Satz 1.** *Es sei $X$ ein vollständiger metrischer Raum. Es sei $\mathcal{O}$ eine offene Base im $X$ mit den Eigenschaften* 1 *und* 2. *Dann ist $\mathcal{M}_*(\mathcal{O}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{O})$.*

Beweis. Es sei $f \in \mathcal{M}_*(\mathcal{O})$. Dann ist $f$ aus der ersten Baireschen Klasse. Wenn die Funktion $f$ nicht aus $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ ist, dann hat die Funktion $f$ nicht die Eigenschaft von Darboux in starkem Sinne bezüglich der Base $\mathcal{O}$. Dann muß eine solche Zahl $c$ und eine solche offene Menge $O \in \mathcal{O}$ existieren, daß $f(x_0) < c < f(y_0)$ für geeignete $x_0, y_0 \in \bar{O}$ ist und die Menge $\{x : x \in O, f(x) = c\}$ leer ist. Es sei $A = \{x : x \in O\ f(x) \geqq c\}$ und $B = \{x : x \in O, f(x) \leqq c\}$. Die Mengen $A$ und $B$ sind nicht leer. (Wäre zum Beispiel $A$ leer, dann $O \subset B$ und auch $\bar{O} \subset \{x : f(x) \leqq c\}$. Das wird aber der Annahme $y_0 \in \bar{O}$ widersprechen.) Es sei $F$ die Menge $\bar{O} \cap A' \cap B'$. Aus der Eigenschaft 2 geht hervor, daß $A' \cap B \subset B'$ und $A \cap B' \supset A'$ gilt. Aus dem folgt nun $A' \cap B = A' \cap B \cap O \subset A' \cap B' \cap O = F \cap O$ und $A \cap B' \subset F \cap O$.

Wir werden zeigen, daß $F \cap O$ nicht leer ist, und daß $F \cap A$ und $F \cap B$ im $F \cap O$ dicht liegen. Da $O = A \cup B$ ist, sind die Mengen $A' \cap B$ und $A \cap B'$ wegen der Eigenschaft 2 nicht leer. Es sei $x \in A' \cap B$ und $U$ eine beliebige Umgebung des Punktes $x$, welche im $O$ enthalten ist. Wegen der Eigenschaft 1 existiert eine offene Menge $V \in \mathcal{O}$, für die $V \subset U$ und $x \in \bar{V} - V$ ist. Dann muß $V \cap B$ nicht

(1) $\bar{O}$ bedeutet die abgeschlossene Hülle der Menge $O$.

(2) $\{x : V(x)\}$ bedeutet die Menge aller Punkte $x$ für welche $V(x)$ gilt.

(3) $A \cup B$, bzw. $A \cap B$, bedeutet die Summe, bzw. den Durchschnitt der Mengen $A$ und $B$. $A \subset B$ bedeutet, daß $A$ eine Teilmenge von $B$ ist.

(4) $A'$ bedeutet die Ableitung der Menge $A$.

leer sein. In anderem Fall wäre $V \subset A$ und so $x \in A$. Das widerspräche aber der Annahme $x \in B$. Es ist also $U \cap B - \{x\}$ für jede Umgebung $U$ des Punktes $x$ nicht leer, und deshalb ist $x$ aus $B'$. Wir haben gezeigt, daß $A' \cap B \subset A' \cap B'$ ist. Ähnlich beweist man, daß $A \cap B' \subset A' \cap B'$ gilt. Es folgt daraus, daß $F \cap O$ nicht leer ist, weil die Mengen $A' \cap B$ und $A \cap B'$ nicht leer sind. Die Mengen $A' \cap B$ und $A \cap B'$ liegen in der Menge $F \cap O$ dicht. Das geht aus folgender Betrachtung hervor: Es sei $x \in F \cap O$ und $x \in U \in \mathcal{O}$, $U \subset O$. Dann existieren zwei Punkte $x_1, y_1 \in U$, für welche $x_1 \in A$, $y_1 \in B$ und $x_1 \neq x$ und $y_1 \neq x$ ist. Es sei $A_1 = U \cap A$ und $B_1 = U \cap B$. Dann ist $U = A_1 \cup B_1$, und $A_1$ und $B_1$ sind nicht leer. Für jedes $V \in \mathcal{O}$, $V \subset A_1$, bzw. $V \subset B_1$ gilt $\bar{V} \cap U = (\bar{V} \cap O) \cap U \subset A \cap U = A_1$, bzw. $\bar{V} \cap U = (\bar{V} \cap O) \cap U \subset B \cap U = B_1$. Wegen der Eigenschaft 2 sind die Mengen $A_1' \cap B_1$ und $A_1 \cap B_1'$ nicht leer. Es existieren im $U$ Punkte aus $A' \cap B$ und auch aus $A \cap B'$, weil $A_1' \cap B_1 \subset A' \cap B$, $A_1 \cap B_1' \subset A \cap B'$ ist. Daraus, daß $A' \cap B$ und $A \cap B'$ im $F \cap O$ dicht liegen, und aus $A' \cap B = A' \cap B' \cap B = (A' \cap B' \cap \bar{O}) \cap B = F \cap B$ und $A \cap B' = F \cap A$ folgt nun, daß die Mengen $F \cap A$ und $F \cap B$ dicht im $F \cap O$ liegen.

Die Funktion $f$ ist aus der ersten Baireschen Klasse und die Menge $F$ ist eine abgeschlossene Menge, deswegen muß die partielle Funktion $f/F$ der Funktion $f$ auf die Menge $F$ in einer dichten Teilmenge von $F$ stetig sein ([1], 9.5.26, S. 260). Es sei $x \in F \cap O$. Dann existieren in jeder Umgebung des Punktes $x$ die Punkte aus $F \cap A$ und auch aus $F \cap B$, weil diese Mengen im $F \cap O$ dicht liegen. Da $f(x) \neq c$ ist, ist die Funktion $f/F$ nicht im $x$ stetig. Die Funktion $f/F$ ist also in keinem Punkt aus $F \cap O$ stetig, und deswegen kann sie nicht in einer dichten Teilmenge von $F$ stetig sein. Das ist aber ein Widerspruch.

Eine Menge $A$ hat die Eigenschaft $\mathrm{M}_0'(\mathcal{O})$, bzw. $\mathrm{M}_1'(\mathcal{O})$ dann und nur dann, wenn für jeden Punkt $x \in A$ und jede offene Menge $O \in \mathcal{O}$, für welche $x \in \bar{O}$ ist, die Menge $A \cap O$ mindestens abzählbar, bzw. unabzählbar ist. Es sei $\mathcal{M}_0'(\mathcal{O})$, bzw. $\mathcal{M}_1'(\mathcal{O})$ die Menge aller Funktionen $f$, für welche die Mengen $\{x : f(x) > a\}$ und $\{x : f(x) < a\}$ für jede Zahl $a$ die Eigenschaft $\mathrm{M}_0'(\mathcal{O})$, bzw. $\mathrm{M}_1'(\mathcal{O})$ haben. Es sei $\mathcal{M}_0(\mathcal{O})$, bzw. $\mathcal{M}_1(\mathcal{O})$ die Menge aller Funktionen aus der ersten Baireschen Klasse und aus $\mathcal{M}_0'(\mathcal{O})$, bzw. $\mathcal{M}_1'(\mathcal{O})$, d. h. wenn $X$ ein metrischer Raum ist, die Mengen $\{x : f(x) > a\}$ und $\{x : f(x) < a\}$ sind $F_\sigma$ und haben die Eigenschaft $\mathrm{M}_0'(\mathcal{O})$, bzw. $\mathrm{M}_1'(\mathcal{O})$ für jede Zahl $a$.

**Lemma.** *Es sei $X$ ein topologischer Raum. Es sei $\mathcal{O}$ eine offene Base im $X$. Dann gilt $\mathcal{M}_1'(\mathcal{O}) \subset \mathcal{M}_0'(\mathcal{O}) \subset \mathcal{M}_*'(\mathcal{O})$.*

Beweis. Die Behauptung $\mathcal{M}_1'(\mathcal{O}) \subset \mathcal{M}_0'(\mathcal{O})$ ist evident.

Es sei jetzt $f \in \mathcal{M}_0'(\mathcal{O})$. Es sei $a$ eine Zahl und $A = \{x : f(x) \geqq a\}$. Weiter sei $O \in \mathcal{O}$ und $O \subset A$. Wenn ein $x_0 \in \bar{O} - A$ existiert, dann muß $O \cap (X - A)$ mindestens abzählbar sein, weil $X - A = \{x : f(x) < a\}$ und $x_0 \in \bar{O} - A$ ist. Das aber widespricht der Annahme, daß $O \subset A$ ist. Deswegen muß $\bar{O} - A$ leer sein und es ist $\bar{O} \subset A$. Die Menge $A$ hat also die Eigenschaft $\mathrm{M}_*'(\mathcal{O})$. Ähnlich



beweist man, daß auch die Menge $\{x : f(x) \leqq a\}$, wo $a$ eine Zahl ist, die Eigenschaft $\mathrm{M}_*'(\mathcal{O})$ hat. Aus dem folgt schon $f \in \mathcal{M}_*'(\mathcal{O})$.

Wenn $X = E_n$ und $\mathcal{O}$ die offene Base aller Umgebungen oder die offene Base aller offenen Intervallen ist, dann gilt $\mathcal{M}_0'(\mathcal{O}) = \mathcal{M}_*'(\mathcal{O})$. Das ist aus folgender Betrachtung evident: Es sei $f \in \mathcal{M}_*'(\mathcal{O})$. Es sei $A = \{x : f(x) > a\}$, wo $a$ eine Zahl ist. Weiter sei $x \in A$ und $O = O_1 \in \mathcal{O}$, für das $x \in \bar{O}$ ist. Dann ist $O_1 \cap A$ nicht leer. Es sei $x_1 \in O_1 \cap A$. Dann existiert $O_2 \in \mathcal{O}$, für das $x_1 \notin O_2$, $x \in O_2$ und $O_2 \subset O_1$ ist. Es folgt daraus, daß $O_2 \cap A$ nicht leer ist. Es existiert also $x_2 \in O_2 \cap A$. Man kann diese Betrachtung wiederholen und man bekommt eine Folge $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}$ von Punkten aus $O \cap A$, die alle verschieden sind. Es hat also die Menge $A$ die Eigenschaft $\mathrm{M}_0'(\mathcal{O})$. Ähnlich beweist man, daß auch die Menge $\{x : f(x) < a\}$, wo $a$ eine Zahl ist, die Eigenschaft $\mathrm{M}_0'(\mathcal{O})$ hat. Die Funktion $f$ ist aus der Menge $\mathcal{M}_0'(\mathcal{O})$.

**Satz 2.** *Es sei $X$ ein topologischer Raum. Es sei $f$ eine Funktion die auf $X$ definiert ist, und die die Eigenschaft von Darboux in starkem Sinne bezüglich der offenen Base $\mathcal{O}$ hat. Dann gilt, daß $f \in \mathcal{M}_*'(\mathcal{O})$ ist. Wenn außer dem jede Menge aus der Base $\mathcal{O}$ unabzählbar ist, dann ist $f \in \mathcal{M}_1'(\mathcal{O})$.*

Beweis. Es sei $a$ eine Zahl und $A = \{x : f(x) \geqq a\}$. Es sei $O \subset A$ für $O \in \mathcal{O}$. Wäre $x_0 \in \bar{O} - A$, dann wäre $f(x_0) < a$ und müßte ein $\xi \in O$ so existieren, daß $f(\xi) = (f(x_0) + a)/2$ wäre. Das wäre ein Widerspruch zu der Annahme, daß $O \subset A$ ist. Die Menge $A$ hat also die Eigenschaft $\mathrm{M}_*'(\mathcal{O})$. Ähnlich beweist man, daß die Menge $\{x : f(x) \leqq a\}$ für jede Zahl $a$ die Eigenschaft $\mathrm{M}_*'(\mathcal{O})$ hat. Deswegen ist $f \in \mathcal{M}_*'(\mathcal{O})$.

Es sei jetzt jede offene Menge aus $\mathcal{O}$ unabzählbar. Weiter sei $a$ eine Zahl und $A = \{x : f(x) > a\}$. Es sei $x_0 \in A$ und $O$ eine solche Menge aus $\mathcal{O}$, für welche $x_0 \in \bar{O}$ ist. Wenn $\bar{O} \subset A$ ist, dann ist der Durchschnitt $A \cap O$ unabzählbar. Wenn es ein $x_1$ so gibt, daß $x_1 \in \bar{O} - A$ ist, dann existiert zu jeder Zahl $c$, für welche $f(x_1) < c < f(x_0)$ ist, ein solcher Punkt $x_c \in O$, für den $f(x_c) = c$ ist. Auch in diesem Fall ist also $A \cap O$ unabzählbar. Ähnlich beweist man, daß die Menge $\{x : f(x) < a\}$ für jede Zahl $a$ die Eigenschaft $\mathrm{M}_1'(\mathcal{O})$ hat. Es ist also $f \in \mathcal{M}_1'(\mathcal{O})$.

**Satz 3.** *Es sei $X$ ein vollständiger metrischer Raum. Es sei $\mathcal{O}$ eine offene Base im $X$ mit den Eigenschaften 1 und 2. Dann gilt $\mathcal{D}(\mathcal{O}) = \mathcal{M}_*(\mathcal{O})$. Wenn außer dem jede offene Menge aus der Base $\mathcal{O}$ unabzählbar ist, dann ist $\mathcal{D}(\mathcal{O}) = \mathcal{M}_1(\mathcal{O}) = \mathcal{M}_0(\mathcal{O}) = \mathcal{M}_*(\mathcal{O})$.*

Beweis. Die Behauptung $\mathcal{D}(\mathcal{O}) = \mathcal{M}_*(\mathcal{O})$ folgt schon aus den Sätzen 1 und 2. Aus dem Lemma, aus dem Satz 2 und aus dem, was wir schon bewiesen haben, folgt jetzt, daß $\mathcal{D}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{M}_1(\mathcal{O}) \subset \mathcal{M}_0(\mathcal{O}) \subset \mathcal{M}_*(\mathcal{O}) = \mathcal{D}(\mathcal{O})$ ist. Es gilt also $\mathcal{D}(\mathcal{O}) = \mathcal{M}_1(\mathcal{O}) = \mathcal{M}_0(\mathcal{O}) = \mathcal{M}_*(\mathcal{O})$.

Für den metrischen Raum $X$ können wir zum Beispiel den $n$-dimensionalen Euklidischen Raum $E_n$ wählen. Für die Base $\mathcal{O}$ können wir zum Beispiel das

System $\mathcal{O}_1$ aller offenen Intervalle oder das System $\mathcal{O}_2$ aller Umgebungen $O(x, \varepsilon)$ im $E_n$ wählen. Die Systeme $\mathcal{O}_1$ und $\mathcal{O}_2$ haben evident die Eigenschaft 1. Das System $\mathcal{O}_1$ hat auch die Eigenschaft 2. Das geht aus dem Lemma 9 der Arbeit [2] hervor. Jetzt werden wir zeigen, daß auch das System $\mathcal{O}_2$ die Eigenschaft 2 hat.

Es sei $O$ eine Umgebung und sei $O = A \cup B$, wobei $A$ und $B$ zwei nichtleere zueinander disjunkte Mengen mit folgender Eigenschaft sind: Es sei $U \in \mathcal{O}$ und $U \subset A$, bzw. $U \subset B$. Dann ist auch $\bar{U} \cap O \subset A$, bzw. $\bar{U} \cap O \subset B$. Da die Mengen $A$ und $B$ nicht leer sind, existieren zwei Punkte $x_0$ und $y_0$, $x_0 \in A$ und $y_0 \in B$. Es sei $L$ der Abschnitt mit den Endpunkten $x_0$ und $y_0$. Für jedes $x \in B - A'$, bzw. $y \in A - B'$ existiert eine Umgebung $O(x, \varepsilon)$, bzw. $O(y, \varepsilon)$, für welche $O(x, \varepsilon) \subset B$, bzw. $O(y, \varepsilon) \subset A$ ist. Es sei $\varepsilon(x)$, bzw. $\varepsilon(y)$ das Supremum der Menge $\{\varepsilon : O(x, \varepsilon) \subset B\}$, bzw. $\{\varepsilon : O(y, \varepsilon) \subset A\}$. Dann ist auch $\overline{O(x, \varepsilon(x))} \subset B$, bzw. $\overline{O(y, \varepsilon(y))} \subset A$. Wenn $\overline{O(x, \varepsilon(x))} \subset O$, bzw. $\overline{O(y, \varepsilon(y))} \subset O$ ist, dann existiert ein Punkt $x_1 \in \overline{O(x, \varepsilon(x))}$, bzw. $y_1 \in \overline{O(y, \varepsilon(y))}$, für den $x_1 \in A'$, bzw. $y_1 \in B'$ gilt. Jetzt kann $x_0 \in A \cap B'$, bzw. $y_0 \in A' \cap B$ oder $x_0 \in A - B'$, bzw. $y_0 \in B - A'$ sein. Im ersten Fall ist $A \cap B'$, bzw. $A' \cap B$ nicht leer. In zweitem Fall existiert die Umgebung $O(x_0, \varepsilon(x_0))$, bzw. $O(y_0, \varepsilon(y_0))$. Im Falle $\overline{O(x_0, \varepsilon(x_0))} \subset O$, bzw. $\overline{O(y_0, \varepsilon(y_0))} \subset O$ ist $A \cap B'$, bzw. $A' \cap B$ nicht leer. Wenn $\overline{O(x_0, \varepsilon(x_0))} \subset O$, bzw. $\overline{O(y_0, \varepsilon(y_0))} \subset O$ nicht gilt, dann wiederholen wir diese Betrachtung mit dem Durchschnitt der Menge $\overline{O(x_0, \varepsilon(x_0))} - O(x_0, \varepsilon(x_0))$, bzw. $\overline{O(y_0, \varepsilon(y_0))} - O(y_0, \varepsilon(y_0))$ und des Abschnitts $L$. Da der Abschnitt $L$ eine endliche Länge und einen positiven Abstand von $\bar{O} - O$ hat, bekommt man durch Wiederholung dieser Methode, daß $A \cap B'$ und $A' \cap B$ nicht leer sind. Deswegen hat das System $\mathcal{O}_2$ die Eigenschaft 2.

Für $X = E_1$ und $\mathcal{O} = \mathcal{O}_1$, bzw. $\mathcal{O} = \mathcal{O}_2$ bekommt man aus dem Satz 3 das Resultat aus [4]. Der Satz 1 aus [3] ist eine unmittelbare Folgerung des ersten Teiles des Satzes 3 für $X = E_1$.

## LITERATUR


[1] Čech E., *Topologické prostory*, Praha, 1959.

[2] Mišík L., *Über den Mittelwertsatz für additive Zellenfunktionen*, Matematicko-fyzikálny časopis *13* (1963), 260–274.

[3] Neugebauer C. J., *Darboux functions of Baire class one and derivates*, Proceedings of the American Mathematical Society *13* (1962), No 6, 838–843.

[4] Zahorski Z., *Sur la première dérivée*, Transactions of the American Mathematical Society *69* (1950), 1–54.


Eingegangen am 25. 4. 1963.

*ČSAV, Kabinet matematiky*
*Slovenskej akadémie vied*
*v Bratislave*



# О ФУНКЦИЯХ ПЕРВОГО КЛАССА БЭРА СО СВОЙСТВОМ ДАРБУ

Ладислав Мишик


## Резюме

З. Загорски в [4], стр. 7 показал, что множество всех функций от одного действительного переменного первого класса Бэра со свойством Дарбу совпадает с каждым из множеств $\mathcal{M}_0$ и $\mathcal{M}_1$. Из теоремы 3 этой работы вытекает, в частности, результат Загорского.

Пусть $X$ — топологическое пространство. Функция $f$ обладает свойством Дарбу в сильном смысле относительно базы $\mathcal{O}$ открытых множеств в $X$, если для каждого $O \in \mathcal{O}$ и для каждого числа $c$, для которого существуют точки $x, y \in O$ со свойством $f(x) < c < f(y)$, существует такая точка $\xi \in O$, что $f(\xi) = c$. Пусть $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ — множество всех функций первого класса Бэра со свойством Дарбу в сильном смысле относительно $\mathcal{O}$.

Множество $A$ обладает свойством $M'_*(\mathcal{O})$, если $\bar{O} \subset A$ для каждого $O \in \mathcal{O}$, для которого $O \subset A$. Множество $A$ обладает свойством $M'_0(\mathcal{O})$ ($M'_1(\mathcal{O})$) если для каждого $x \in A$ и для каждого $O \in \mathcal{O}$ с $x \in \bar{O}$ пересечение $A \cap O$ не менее чем счетно (несчетно). Множество $M_*(\mathcal{O})$, это множество всех функций $f$ первого класса Бэра, для которых множества $\{x : f(x) \geqq a\}$ и $\{x : f(x) \leqq a\}$ при всех числах $a$ обладают свойством $M'_*(\mathcal{O})$. Пусть $M_0(\mathcal{O})$ ($M_1(\mathcal{O})$) — множество всех функций $f$ первого класса Бэра, для которых множества $\{x : f(x) > a\}$ и $\{x : f(x) < a\}$ при всех числах $a$ обладают свойством $M'_0(\mathcal{O})$ ($M'_1(0)$).

База $\mathcal{O}$ открытых множеств $X$ обладает свойством 1 (2), если:

1. Для каждой точки $x \in X$ и для каждого открытого множества $O$, $x \in O$, существует $U \in \mathcal{O}$, что $U \subset O$ и $x \in \bar{U} - U$.

2. Пусть $O \in \mathcal{O}$ и $O = A \cup B$, где $A, B$ — непустые непересекающиеся множества для которых выполнено условие: Если $U \in \mathcal{O}$ и $U \subset A$ ($U \subset B$), то $\bar{U} \cap O \subset A$ ($\bar{U} \cap O \subset B$). Тогда $A' \cap B$ и $A \cap B'$ непусты.

Теорема 3. Пусть $X$ — полное метрическое пространство. Пусть $\mathcal{O}$ — база открытых множеств в $X$ со свойствами 1. и 2. Тогда $\mathcal{D}(\mathcal{O}) = \mathcal{M}_*(\mathcal{O})$. Если, кроме того, каждое множество из $\mathcal{O}$ несчетно, то $\mathcal{D}(\mathcal{O}) = \mathcal{M}_1(\mathcal{O}) = \mathcal{M}_0(\mathcal{O}) = \mathcal{M}_*(\mathcal{O})$.