MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK 14 1964 ČÍSLO 1

ЗАМЕТКИ О РЕБРАХ К-ПОЛИЭДРА

ЭРНЕСТ ЮЦОВИЧ (Ernest Jucovič), Прешов

Понятия эйлеровский полиэдр, К-полиэдр, самосопряженный К-полиэдр мы употребим в смысле [1], [4], [2].

Обозначение $\sigma_{A\alpha}$ – так же как и в [5] – обозначает число ребер инцидирующих с вершиной A или с гранью α полиэдра. При этом A инцидирует с α.

В [5] мы доказали:

1. Самосопряженный К-полиэдр или

а) содержит хотя бы две пары $A\alpha$, $B\beta$ вершина – грань таких, что $\sigma_{A\alpha} = \sigma_{B\beta} \leqq 11$ или

б) содержит хотя бы одну пару грань γ – вершина C так, что вершина C и грань γ инцидируют с таким же числом ребер $u \leqq 6$. При этом случаи а) и б) взаимно себя не исключают.

2. Если самосопряженный К-полиэдр не содержит грань, которая инцидентна с $n = 4, 5, 6, \ldots, 10$ ребрами, то он содержит по крайней мере одну пару грань α – вершина A такую, что $\sigma_{A\alpha} = 4$.

В этой статье докажем больше:

Теорема 1. *К-полиэдр (каждый эйлеровский полиэдр) содержит не менее двенадцати пар вершина A – грань α таких, что имеет место $\sigma_{A\alpha} \leqq 6$.*

Теорема 2. *Самосопряженный К-полиэдр имеет по крайней мере шесть пар трехгранная вершина – i-угольник и по крайней мере шесть пар j-гранная вершина – треугольник, где $i, j = 3, 4, 5$.*

Теорема 3. *Если у самосопряженного К-полиэдра нет четырехугольных и пятиугольных граней, то он имеет по крайней мере двенадцать пар вершина A – грань α таких, что имеет место $\sigma_{A\alpha} = 4$ (треугольная грань α инцидирует с трехгранной вершиной A).*

Так же как в [5] используем так называемый Θ-процесс, определение которого следующее: пусть комплекс $M = V + S + H$ есть К-полиэдр с множеством V вершин, S граней, H ребер, и прибавим к нему множество U его углов. Комплексу $M + U = V + S + H + U$ поставим в соответствие комплекс $M' = \Theta(M) = S' + V' + H'$ с множеством граней S', ребер H', вершин V' так, чтобы были взаимно однозначно отнесены элементы множеств H и V', U и H', $(S + V)$ и S'. Инцидирующими назовем такие два элемента комплекса M', для которых соответствующие элементы комплекса $M + U$ инцидентны.

Имеет место: а) M' есть тоже К-полиэдр, топологически правильный четвертой степени (это означает, что все его вершины инцидируют с четырьмя ребрами);

б) грани полиэдра M' можно разделить на два класса T_1, T_2 так, что никакие две его соседние грани не принадлежат к тому же классу. При этом грани из одного класса отнесены вершинам, грани второго класса граням полиэдра M;

в) если M является самосопряженным К-полиэдром, то в M' существует по крайней мере одно взаимно однозначное соответствие π граней класса T_1 и граней класса T_2 такое, что остается сохранено соседство граней.

Пусть $g_{i,j}$ обозначает число ребер эйлеровского полиэдра, из которых каждое инцидирует с i-угольником и j-угольником. А. Коциг [3] доказал, что для правильного эйлеровского полиэдра (а тем самым у каждого К-полиэдра) четвертой степени имеет место

$$10g_{3,3} + 5g_{3,4} + 2g_{3,5} \geqq 120.$$

Но $g_{i,j}$ – неотрицательное число, потому имеет место неравенство

$$10(g_{3,3} + g_{3,4} + g_{3,5}) \geqq 120,$$

из чего

$$g_{3,3} + g_{3,4} + g_{3,5} \geqq 12. \tag{1}$$

Если M есть К-полиэдр, то о $M' = \Theta(M)$ можно сказать, что M' содержит по крайней мере двенадцать пар соседних граней треугольник – j-угольник, где $j = 3, 4, 5$. У полиэдра M каждой из этих пар отнесена инцидирующая пара элементов вершина A – грань α, из которых одна инцидирует с тремя и другая с j ребрами, где $j = 3, 4, 5$, т. е. $\sigma_{A\alpha} = 3 + j - 2 = j + 1$ (два ребра инцидируют с α и с A). Этим и доказана первая теорема.

Если M самосопряженный К-полиэдр, то по свойству в) Θ-процесса о $M' = \Theta(M)$ имеет место: Каждой паре соседних граней треугольник из класса T_1 – j-угольник из T_2, где $j = 3, 4, 5$ есть отображением π отнесена пара j-угольник из класса T_1 – треугольник из класса T_2, и обратно. Поэтому существует по крайней мере шесть пар соседних граней треугольник из T_1 – j-угольник из T_2 и по крайней мере шесть соседних пар треугольник из T_2 – j-угольник из T_1. Пусть Θ-процесс проведен так, что к классу граней T_1 полиэдра M' отнесены грани, к классу T_2 вершины полиэдра M. Соседней паре треугольник из T_1 – j-угольник из T_2 отнесена инцидирующая пара треугольная грань α – j-гранная вершина A. Таких пар по крайней мере шесть. Для

каждой такой пары существует пара j-угольная грань α_1 – трехгранная вершина A_1. Таких пар опять по крайней мере шесть. Этим и доказана теорема 2.

Если самосопряженный К-полиэдр N не имеет четырехугольную ни пятиугольную грань, то он не имеет ни четырегранную ни пятигранную вершину. Поэтому $N' = \Theta(N)$ не имеет ни четырехугольную ни пятиугольную грань и в (1) $g_{3,4} = g_{3,5} = 0$, т. е. $g_{3,3} \geqq 12$. Для полиэдра N это означает, что он имеет по крайней мере двенадцать инцидирующих пар треугольная грань – трехгранная вершина. Этим и доказана теорема 3.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Brückner M., *Vielecke und Vielflache*, Leipzig 1900.
[2] Steinitz E.—Rademacher H., *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Berlin 1934.
[3] Kotzig A., *Из теории эйлеровских многогранников*, Mat.-fyz. časopis SAV *13* (1963), 20–31.
[4] Jucovič E., *Самосопряженные К-полиэдры*, Mat.-fyz. časopis SAV *12* (1962), 1–22.
[5] Jucovič E., *Niektoré vlastnosti hrán autokonjugovaného K-polyédra*, Mat.-fyz. časopis SAV *12* (1962), 203–208.

Поступило 4. 4. 1963.

Katedra matematiky
Pedagogického inštitútu v Prešove

BEMERKUNGEN ÜBER DIE KANTEN EINES K-POLYEDERS

Ernest Jucovič

Zusammenfassung

Wir bezeichnen durch $\sigma_{A\alpha}$ die Anzahl aller derjenigen Kanten eines K-Polyeders, die entweder mit seiner Ecke A oder mit seiner Fläche α inzidieren, wobei A Ecke der Fläche α ist.

Es gilt:

1. Das K-Polyeder besitzt wenigstens zwölf solche Paare Ecke A—Fläche α, daß $\sigma_{A\alpha} \leqq 6$ gilt.
2. Ein autokonjugiertes K-Polyeder besitzt wenigstens sechs inzidierende Paare dreikantige Ecke – i-kantige Fläche und wenigstens sechs inzidierende Paare j-kantige Ecke-Dreieckfläche, $i, j = 3, 4, 5$.
3. Besitzt das autokonjugierte K-Polyeder keine Viereckfläche und keine Fünfeckfläche, dann besitzt es wenigstens zwölf solche Paare Ecke A—Fläche α, daß $\sigma_{A\alpha} = 4$ gilt.