MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 13, 3, 1963

ЗАМЕТКА К ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПО ТЕОРИИ ГРАФОВ

АЛЕКСАНДЕР РОСА (Alexander Rosa), Братислава

На Семинаре по теории графов поставил в свое время А. Коциг следующий вопрос: Пусть задан некоторый тип разложения полного графа G_{15} с 15 вершинами на квадратичные факторы (множители), состоящие из треугольников. Могут быть заменой треугольников между отдельными квадратичными факторами этого разложения получены другие разложения графа G_{15} на квадратичные факторы, также состоящие из треугольников и сколькими различными способами это может быть сделано? Какого типа будут эти разложения?

Назовем в графе G_{15} дополнением $D(v_1, v_2)$ двух вершин v_1, v_2 относительно заданного разложения вершину v_3 треугольника $v_1v_2v_3$ из некоторого квадратичного фактора данного разложения, если $v_1 \neq v_2$, а саму вершину v_1, если $v_1 = v_2$:

$$D(v_1, v_1) = v_1,$$

$$D(v_1, v_2) = v_3,$$

где v_3 — третья вершина треугольника $v_1v_2v_3$, принадлежащего некоторому квадратичному фактору данного разложения графа G_{15}. Дополнение определено всегдаоднозначно [1].

Будем говорить, что вершина w обладает при заданном разложении графа G_{15} на квадратичные факторы, состоящие из треугольников, свойством (x), если для произвольной пары вершин $a, b \in G_{15}$ выполняется либо

$$D(D(x, a), D(x, b)) = D(x, D(a, b))$$

либо

$$D(D(x, a), D(x, b)) = D(a, b).$$

Путем вычислений можно убедиться, что при разложении G_{15} на квадратичные факторы, состоящие из треугольников, типа A (т. е. при одном из разложений A1, A2, см. [1]), каждая вершина обладает свойством (x); если же мы имеем разложение G_{15} типа B и C, то существует в точности 3 и 1 вершина со свойством (x) соответственно; наконец, при разложении G_{15} типа D не существует никакой вершины графа G_{15} со свойством (x). Поскольку вершина при замене целых треугольников между отдельными квадратными факторами

данного разложения не может свойство (x) ни приобрести ни потерять, то отсюда получается утверждение, дающее ответ на вторую часть заданного в начале вопроса:

Теорема. *Пусть задано разложение графа G_{15} на квадратичные факторы, состоящие нз треугольников, некоторого из типов* A, B, C, D. *Заменами целых треугольников между отдельными квадратичными факторами данного разложения не может быть получено разложение другого чем исходного типа.*

Доказательство очевидно из проведенного рассуждения.

Примечание. Под разложением типа A (соответственно, B и C) здесь понимаются, собственно говоря, два разложения A1, A2 (соответственно, B1, B2 и C1, C2), причем в результате замены треугольников между отдельными квадратичными факторами эти два разложения могут переходить друг в друга, как это показывает следующая таблица:

Тип разложения G_{15} на квадратичные факторы, состоящие из треугольников	Число разложений, получающихся заменой треугольников	Тип получившихся разложений
A1	240	A1, A2
B1	24	B1, B2
C1	2	C1, C2
D	1	D

Тем самым дан ответ и на первую часть вопроса, поставленного в начале.

В заключение можно заметить, что разложения G_{15} на квадратичные факторы, состоящие из треугольников, определяют некоторый тип квазигрупп с 15 элементами, обладающий, кроме других, и тем свойством, что всякая такая квазигруппа может быть 7 способами разбита на 5 подквазигрупп с 3 элементами. Из сказанного вытекает, что существуют четыре и только четыре неизоморфные квазигруппы такого типа.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Роса А., *Использование графов для решения задачи Киркмана*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV 13 (1963), 105—113.

Поступило 4. IV. 1963 г.

ČSAV, Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie v Bratislave

NOTE TO CERTAIN PROBLEM FROM THE THEORY OF GRAPHS

Alexander Rosa

Summary

In this note there is given the affirmative answer to the question whether it is possible to reduce the given type of decomposition of the complete graph with 15 vertices into quadratic factors consisting of triangles into another type of such decomposition of this graph by certain transformations.