MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 13, 3, 1963

ZUR DARSTELLUNG DES GRAVITATIONSFELDES HOMOGENER KÖRPER DURCH FLÄCHENINTEGRALE

TIBOR KOLBENHEYER, Košice

Die Berechnung des Gravitationsfeldes verschiedenartiger homogener Körper, die in vielen Fällen die notwendigen Unterlagen entweder zu einer quantitativen Deutung, oder zu gewissen Reduktionen der Ergebnisse gravimetrischer Messungen bietet, beruht meistens entweder auf einer exakten, oder einer angenäherten numerischen (eventuell auch graphischen) Auswertung der Volumintegrale

$$U = \kappa\varrho \int_\tau \frac{d\tau}{R}, \qquad \vec{F} = \kappa\varrho \int_\tau \frac{\vec{R}\, d\tau}{R^3}. \tag{1}$$

Dabei bedeutet U das Potential, der Vektor $\vec{F}$ die Intensität des Gravitationsfeldes in einem beliebigen Punkte $P(x, y, z)$, κ die Gravitationskonstante, ϱ die Dichte, τ das Volumen des Körpers, $\vec{R}$ den Radiusvektor des laufenden Punktes $Q(\xi, \eta, \zeta)$ im Integrationsgebiet in Bezug auf P und $R = \overline{PQ}$ den von P gemessenen Abstand. Die exakte Berechnung der Integrale (1) ist jedoch auch für verhältnismäßig einfache Körper oft ziemlich verwickelt. Vom Gesichtspunkt der gravimetrischen Interpretation interessieren uns außerdem in steigendem Maße auch noch die höheren Ableitungen des Potentials nach den rechtwinkligen Koordinaten (x, y, z). Ihre Berechnung durch mehrmalige Differentiation des Potentials ist ebenfalls ziemlich kompliziert, selbst in solchen Fällen, wenn U explizit mittels bekannter elementarer Funktionen ausgedrückt werden kann. Es ist deshalb oft zweckmäßiger die höheren Ableitungen des Potentials durch die entsprechenden Volumintegrale auszudrücken und die letzteren zu berechnen. In allen solchen Fällen, wo man bei der Berechnung der Integrale (1) auf numerische Verfahren angewiesen ist, stellt ein solches Vorgehen praktisch den einzigen zuverläßigen Weg dar.

Im vorliegenden Aufsatz soll gezeigt werden, daß sowohl die Integrale (1), als auch die entsprechenden Volumintegrale für die höheren Ableitungen des Potentials stets in Flächenintegrale über die Oberfläche des Körpers verwandelt werden können. Die Anzahl der zur Berechnung der Schwerewirkung notwendigen Integrationen verringert sich dadurch um eins und diese Vereinfachung bedeutet methodisch einen nicht zu unterschätzenden Vorteil. Es war das Ziel des Verfassers im folgenden die theoretischen Grundlagen der erwähnten Methode klarzulegen.

Der Gedanke die Integrale (1) auf Flächenintegrale zurückzuführen ist nich ganz
neu. Für zweidimensionale homogene (und zum Teil auch nichthomogene) Körper
sind mehrere Berechnungsmethoden bekannt, die auf einer Zurückführung der das
Potential und seine Ableitungen ausdrückenden Flächenintegrale auf Kurven-
integrale beruhen, wobei der Schnitt des Körpers mit der zu seiner Streichrichtung
senkrechten Ebene (z, x) als geschlossener Integrationsweg zu nehmen ist [1], [2], [3].
Auf demselben Prinzip arbeiten auch die meisten, zur Auswertung der Schwere-
wirkungen zweidimensionaler Körper dienenden mechanischen Integratoren. Einige
von den weiter unten angegebenen Formeln, wie (2) und (6), sind sogar unmittelbar
dem bekannten Formelapparat der Potentialtheorie entnommen. Sie dienen dort
allerdings nicht zur Berechnung von Feldern, sondern zum Beweis einiger grund-
legender Sätze. Einige Versuche, wie [4] oder [5], zeigen zwar, wie diese Formeln
auch für gravimetrische Zwecke nutzbar gemacht werden können, ihre Anwendungs-
möglichkeiten sind jedoch in dieser Hinsicht noch bei weitem nicht erschöpft. Eine
zusammenfassende Darlegung der theoretischen Grundlagen der erwähnten Methode,
die einerseits auch die höheren Ableitungen des Potentials, andererseits das Feld
sowohl im Außenraum, als auch im Innern der anziehenden Massen erfassen würde,
fehlt vollkommen.

Wir können in der Potentialgleichung (1) den reziproken Abstand $1/R$ durch $\frac{1}{2}\,\Delta R$ ersetzen, wo Δ den Laplaceschen Operator bedeutet und erhalten dann nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$U = \frac{\kappa\varrho}{2} \oint_S \frac{\partial R}{\partial u}\, dS = \frac{\kappa\varrho}{2} \oint_S \cos(nR)\, dS, \tag{2}$$

wo wir mit S die Oberfläche des Körpers und mit n ihre äußere Normale bezeichnet haben. Es sei h der Abstand des Aufpunktes P von der Berührungsebene zu S in demjenigen Punkte dieser Fläche, in dem wir das Flächenelement betrachten. Das Vorzeichen von h wählen wir positiv oder negativ je nachdem cos (nR) positiv oder negativ ist. Dann können wir (2) auch in der Form

$$U = \frac{\kappa\varrho}{2} \oint_S \frac{h}{R}\, dS \tag{3}$$

Schreiben. Es sei bemerkt, daß in den praktisch in Frage kommenden Fällen eventuelle
singularitäten der Fläche S keine Rolle spielen.
Für das Feld außerhalb des Körpers war die Beziehung (2) schon Gauß bekannt.
Es läßt sich jedoch leicht zeigen, daß (2) und (3) auch im Innern des Körpers gelten.
Liegt nähmlich der Aufpunkt P im inneren Gebiet, so schließen wir ihn als singulären
Punkt mit Hilfe einer Kugelfläche K, deren Mittelpunkt in P liegt, aus dem Integrationsgebiet aus. Den Halbmesser a dieser Kugel wählen wir so klein, daß K ganz im Innern des Körpers liegt. Das Potential in P denken wir uns dann aus dem Potential des homogenen Körpers mit dem kugelförmigen Hohlraum und dem Potential $U^{(K)}$ der homogenen Kugel zusammengesetzt und es ist

$$U = \frac{\kappa\varrho}{2}\left[\oint_S \frac{\partial R}{\partial n}\, dS - \oint_K \frac{\partial R}{\partial n}\, dS\right] + U^{(K)}.$$

Auf der Fläche K ist aber $\partial R/\partial n = 1$ und aus der bekannten Formel für das Potential im Innern einer homogenen Kugel,

$$U_i = 2\pi\kappa\varrho\left[a^2 - \frac{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}{3}\right], \tag{4}$$

wo (ξ, η, ζ) die Koordinaten des laufenden Punktes Q und (x, y, z) die Koordinaten des Kugelmittelpunktes bedeuten, folgt $U^{(K)} = 2\pi\kappa\varrho a^2$. Man sieht dann leicht, daß (2) und folglich auch (3) im inneren Gebiet tatsächlich gelten.

Da das Gravitationsfeld eines homogenen Körpers stets als Grenzfall des Feldes eines homogenen Polyeders aufgefaßt werden kann, kommt dem Feld eines solchen Polyeders prinzipiell eine besondere Bedeutung zu. Bezeichnen wir die einzelnen Flächen des Polyeders mit S_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, so ist der Abstand h_ν des Aufpunktes P von S_ν für alle ν konstant und es ist

$$U = \frac{1}{2}\sum_\nu h_\nu U^{(\nu)}, \qquad U^{(\nu)} = \kappa\varrho \int_{S_\nu} \frac{dS}{R}, \tag{5}$$

wo sich die Summenbildung auf alle Flächen des Polyeders bezieht und $U^{(\nu)}$ das Newtonsche Potential des mit einer Flächendichte ϱ belegten homogenen Vielecks S_ν darstellt.

Ist ϱ eine stetig differenzierbare Ortsfunktion, so gilt für die Komponente X der Feldstärke nach einer in [6] abgeleiteten Beziehung

$$X = -\kappa \oint_S \frac{\varrho \cos(nx)}{R}\, dS + \kappa \int_\tau \frac{1}{R}\frac{\partial \varrho}{\partial \xi}\, d\tau, \tag{6}$$

wo wir, wie vorher, unter ξ die x-Koordinate des laufenden Punktes im Integrationsgebiet τ verstehen. Letztere Formel ist, wie ebendort bewiesen wird, sowohl für das äußere, als auch für das innere Feld gültig. Für homogene Körper kann also der Vektor $\vec{F}$ der Feldstärke durch die Formel

$$\vec{F} = -\kappa\varrho \oint_b \frac{\vec{n}\, dS}{R} \tag{7}$$

ausgedrückt werden, wo wir mit $\vec{n}$ den Normaleneinheitsvektor der Fläche S bezeichnet haben.

Auf den einzelnen Flächen eines Polyeders ist $\vec{n}$ konstant. Bezeichnen wir mit $\vec{n}_\nu$ den zu S_ν gehörigen Normaleneinheitsvektor, so folgt aus (7) für ein homogenes Polyeder die nach Mehler benannte Beziehung

$$\vec{F} = -\sum_\nu \vec{n}_\nu U^{(\nu)}, \tag{8}$$

wo $U^{(\nu)}$, wie in (5), das Newtonsche Potential des homogenen Vielecks S_ν bedeutet.

Die Beziehung (7) ermöglicht eine in vielen Fällen einfache Berechnung der zu den Grundflächen senkrechten Komponente Z des Feldes eines geraden Zylinders oder Prismas von beliebigem Querschnitt. In Abb. 1 ist ein solcher Zylinder dargestellt, dessen Grundflächen S_i $(i = 1, 2)$ in den Ebenen $z = z_i$ liegen. Die x-Achse

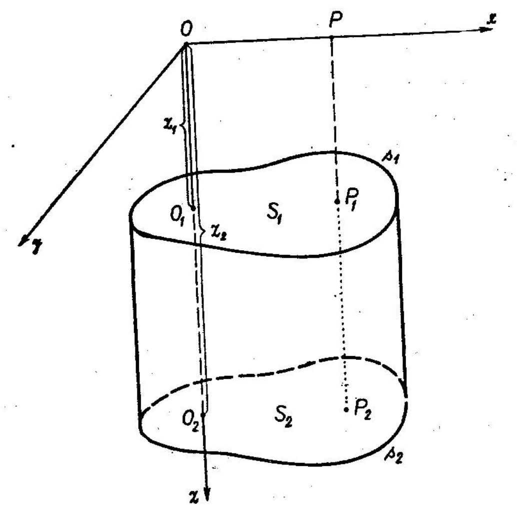

Abb. 1.

des rechtwinkligen Koordinatensystems haben wir wegen der Einfachheit der Zeichnung durch den Aufpunkt P gelegt, diese spezielle Wahl des Systems spielt jedoch bei den weiteren Überlegungen keine wesentliche Rolle. Da an der Mantelfläche des Zylinders (oder Prismas) $n_z = 0$, an den einzelnen Grundflächen dagegen $n_z = (-1)^i$ ist, erhalten wir

$$Z = U^{(1)} - U^{(2)}, \tag{9}$$

wo $U^{(i)}$ das Newtonsche Potential des mit einer Flächendichte ϱ homogen belegten beenen Flächenstücks S_i im Punkt P bedeutet. Man sieht also, daß in dem soeben

betrachteten Falle die Vertikalintensität des Störfeldes gleich der Differenz der Newtonschen Potentiale der beiden Grundflächen ist. Die Berechnung der Potentiale homogener ebener Flächenstücke läßt sich jedoch, wie wir sogleich zeigen werden, auf eine Integration über die Berandung s_i des betreffenden ebenen Gebietes zurückführen. Es sei S_i (Abb. 2) das betrachtete Flächenstück, P_i die orthogonale Projektion von P auf die Ebene von S_i, $z_i = \overline{PP}_i$ der Abstand des Aufpunkts von dieser Ebene

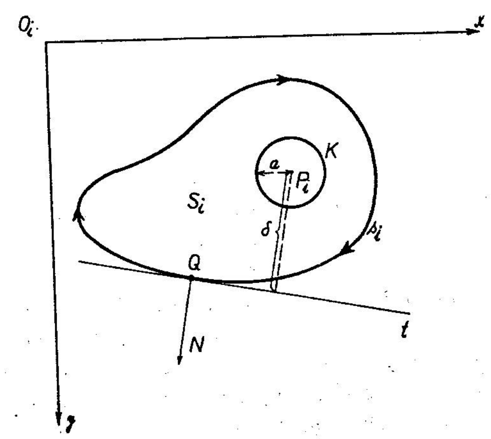

Abb. 2.

und r der von P_i gemessene Abstand. Die bis auf eine additive, für das Weitere belanglose Konstante bestimmte Funktion

$$\Phi_{(r)} = \kappa\varrho \int \frac{\sqrt{z_i^2 + r^2}}{r} \mathrm{d}r, \tag{10}$$

wo $\sqrt{z_i^2 + r^2} = R$ ist, genügt der Poissonschen Gleichung $\Delta\Phi = \kappa\varrho/R$. Liegt nun P_i im Innern der geschlossenen Kurve s_i, so umschließen wir diesen Punkt mit einem Kreis K, dessen Radius wir so wählen, daß K ganz im Gebiet S_i liegt. Alsdann ist nach dem Gaußschen Satze, wenn wir die äußere Normale zu s_i mit N bezeichnen,

$$\oint_{s_i} \Phi'_{(r)} \frac{\partial r}{\partial N} \mathrm{d}s - \oint_K \Phi'_{(r)} \mathrm{d}s = \kappa\varrho \int_{S_i - K} \frac{\mathrm{d}S}{R}. \tag{11}$$

Es ist jedoch

$$\frac{\partial r}{\partial N} = \cos(Nr) = \frac{\delta}{r},$$

wo nun r den Abstand des laufenden Punktes Q der Kurve s_i von P_i und δ den Abstand des Punktes P_i von der Tangente t bedeutet, die s_i in Q berührt. Die Größe δ ist positiv oder negativ, je nachdem bei dem in Abb. 2 durch Pfeile angedeuteten Umlauf P_i rechts oder links von t liegt.

Das zweite Integral an der linken Seite von (11) hat infolge (10) den Wert $2\pi\kappa\varrho\sqrt{z_i^2 + a^2}$ und durch den Grenzübergang $a \to 0$ erhalten wir schließlich

$$U^{(i)} = \kappa\varrho \oint\limits_{s_i} \frac{\delta\sqrt{z_i^2 + r^2}}{r^2}\,ds - 2\pi\kappa\varrho\,|z_i|. \tag{12}$$

Liegt P_i außerhalb der Kurve s_i, so fällt das Glied $2\pi\kappa\varrho\,|z_i|$ aus naheliegenden Gründen weg. Durch (5), (8), (9) und (12) wird die Berechnung des Feldes eines homogenen Polyeders, oder der zu den Grundflächen eines geraden Zylinders von beliebigem Querschnitt senkrechten Komponente der Feldstärke auf einfache Integrationen zurückgeführt. Für Polyeder hat man allerdings, entsprechend der früher getroffenen Vereinbarung, in (10) und (12) h_v statt z_i und s_v anstatt s_i zu schreiben. Es sei dem Leser überlassen sich davon zu überzeugen, daß sich das Integral in (12), wenn s_i ein Vieleck ist, in geschlossener Form durch elementare Funktionen darstellen läßt. Ohne die Lösung der gravimetrischen Aufgabe für ein homogenes Polyeder hier in expliziter Form anzugeben, können wir also schließen, daß diese Lösung in einer solchen, nur elementare Funktionen enthaltenden Form angegeben werden kann. Für einen homogenen endlichen geraden Kreiszylinder können die Komponenten der Feldstärke in abgeschlossener Form durch die vollständigen elliptischen Normalintegrale aller drei Gattungen ausgedrückt werden.

Wir kehren nun wieder zur Anziehung durch ganz beliebig geformte Körper zurück, indem wir von (7) ausgehen und beachten, daß $\vec{n} = \partial\vec{R}/\partial n$ und $\Delta\vec{R} = 0$ ist. Aus dem Greenschen Satze folgt dann

$$\oint\limits_{S} \left[\frac{1}{R}\frac{\partial\vec{R}}{\partial n} - \vec{R}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right] dS = 0 \tag{13}$$

und für den Fall, daß P ein äußerer Punkt ist, haben wir

$$\oint\limits_{S} \frac{\vec{n}\,dS}{R} = \oint\limits_{S} \vec{R}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) dS = -\oint\limits_{S} \frac{h\vec{R}}{R^3}\,dS. \tag{14}$$

Zu derselben Formel gelangt man offensichtlich auch wenn P im Innern des anziehenden Körpers liegt, nur hat man in diesem Falle anstatt des Greenschen Satzes die Greensche Formel anzuwenden, also an der rechten Seite von (13) zunächst $4\pi\vec{R}_P$ zu schreiben, was wegen $\vec{R}_P = 0$ am Ergebnis nichts ändert. Aus (7) und (14)

folgt dann eine andere Darstellung des Feldvektors $\vec{F}$ durch ein Flächenintegral in der Form

$$\vec{F} = \kappa\varrho \oint\limits_{S} \frac{h\vec{R}}{R^3}\,dS. \tag{15}$$

Für die zweite Ableitung U_{xx} des Potentials eines inhomogenen Körpers mit stetig differenzierbarer Dichteverteilung $\varrho = \varrho(\xi, \eta, \zeta)$ gilt sowohl im äußeren, als auch im inneren Gebiet die aus der Potentialtheorie bekannte Formel

$$U_{xx} = \kappa \oint\limits_{S} \varrho \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{R}\right)\cos(nx)\,dS - \kappa \int\limits_{\tau} \frac{\partial\varrho}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau$$

und analoge Beziehungen gelten auch für U_{zz} und U_{yy} [6]. Für homogene Körper folgt hieraus eine Darstellung dieser zweiten Ableitungen durch Flächenintegrale in der Form

$$U_{xx} = \kappa\varrho \oint\limits_{S} \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{R}\right)\cos(nx)\,dS, \qquad U_{yy} = \kappa\varrho \oint\limits_{S} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{R}\right)\cos(ny)\,dS,$$
$$U_{zz} = \kappa\varrho \oint\limits_{S} \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{1}{R}\right)\cos(nz)\,dS. \tag{16}$$

Ähnliche Formeln können auch für die gemischten Ableitungen U_{xy}, U_{yz} und U_{zx} erhalten werden. Es ist z. B.

$$U_{xy} = \kappa\varrho \int\limits_{\tau} \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau = \kappa\varrho \int\limits_{\tau} \frac{\partial^2}{\partial\xi\,\partial\eta}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau$$

und durch Anwendung des Gaußschen Satzes folgt hieraus

$$U_{xy} = \kappa\varrho \oint\limits_{S} \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{R}\right)\cos(ny)\,dS = \kappa\varrho \oint\limits_{S} \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{R}\right)\cos(nx)\,dS. \tag{17}$$

Der obige Beweis gilt zwar wieder nur für das äußere Feld, die Formeln (17) sind jedoch auch für das Innere des anziehenden Körpers richtig. Schließt man nämlich den im Innern liegenden Aufpunkt aus dem Integrationsgebiet τ, wie früher, durch die Kugelfläche K mit hinreichend kleinem Radius aus, so ist der Beitrag zu U_{xy} der innerhalb K liegenden Massen nach (4) gleich Null und (17) gilt mit der Abänderung, daß nunmehr zum Integral über S noch das entsprechende, über K erstreckte Oberflächenintegral hinzugefügt werden soll. Letzteres verschwindet jedoch, wie man sich leicht überzeugt, identisch für alle Werte des Kugelhalbmessers.

Führt man vorübergehend $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \eta$, $\xi_3 = \zeta$ ein, ordnet entsprechenderweise auch den Koordinaten x, y, z der Reihe nach die Symbole x_1, x_2, x_3 zu und setzt $\cos(nx_i) = n_i$, so sind, wie man sich ohne besondere Schwierigkeit überzeugen kann,

$$T_{ik} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{1}{R}\right)n_k + \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(\frac{1}{R}\right)n_i\right] \qquad (18)$$

$$(i, k = 1, 2, 3)$$

die rechtwinkligen Komponenten eines symmetrischen Tensors (T_{ik}) zweiter Stufe. Ebenso bilden auch die U_{ik} einen symmetrischen Tensor (U_{ik}). Die Gleichungen (16) und (17) lassen sich dann in einer einzigen tensoriellen Gleichung

$$(U_{ik}) = \kappa\varrho \oint_S (T_{ik})\, dS \qquad (19)$$

zusammenfassen.

Für den in Abb. 1 dargestellten Zylinder (oder für ein Prisma) ergibt sich aus (16)

$$U_{zz} = \kappa\varrho\left[\int_{S_2} \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{R}\right) dS - \int_{S_1} \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{R}\right) dS\right].$$

Beachtet man nun, daß

$$Z^{(i)} = -\kappa\varrho \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{1}{R}\right) dS = \kappa\varrho \int_{S_i} \frac{\zeta - z}{R^3}\, dS$$

die Z-Komponente der in P von der homogenen Grundfläche S_i ausgeübten Anziehung darstellt, so erhält man

$$U_{zz} = Z^{(1)} - Z^{(2)}, \qquad (20)$$

eine Formel, die (9) analog ist und die Berechnung von U_{zz} wesentlich erleichtert. Die Größen $Z^{(i)}$ können, ähnlich wie $U^{(i)}$ in (12), durch Integrale längs der geschlosse- nen Kurven s_i ausgedrückt werden. Beachtet man, daß $Z^{(i)} = -\partial U^{(i)}/\partial z_i$ ist, so folgt aus (12) sofort

$$Z^{(i)} = -\kappa\varrho z_i \oint_{s_i} \frac{\delta\, ds}{r^2\sqrt{z_i^2 + r^2}} + 2\pi\kappa\varrho \frac{z_i}{|z_i|}$$

falls P_i innerhalb S_i liegt. Ist hingegen P_i in Bezug auf S_i ein äußerer Punkt, so muß das Glied mit $2\pi\kappa\varrho$ weggelassen werden. Handelt es sich um das Feld eines homo- genen Prismas, so ist S_i ein Vieleck und die zu seiner Ebene senkrechte Komponente $Z^{(i)}$ der Anziehung kann mit Vorteil mittels der durch Talwani und Ewing in [7] ausgearbeiteten Methode, oder des in [8] beschriebenen Goguelschen Verfahrens berechnet werden.

Genauso wie (20) können für den in Abb. 2 betrachteten Fall auch die Beziehungen

$$U_{xz} = X^{(1)} - X^{(2)}, \qquad U_{yz} = Y^{(1)} - Y^{(2)}\,.$$

bewiesen werden, wo $X^{(i)}$ und $Y^{(i)}$ die Horizontalkomponenten der durch das homogene ebene Flächenstück S_i in P ausgeübten Anziehung bedeuten. Letztere können zunächst durch die Flächenintegrale

$$X^{(i)} = -\kappa\varrho \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{R}\right) dS, \qquad Y^{(i)} = -\kappa\varrho \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{1}{R}\right) dS$$

und dann, nach Anwendung der Greenschen Integralformel, durch die über die geschlossene Randkurve s_i erstreckten Kurvenintegrale

$$X^{(i)} = -\kappa\varrho \oint_{s_i} \frac{d\eta}{R}, \qquad Y^{(i)} = \kappa\varrho \oint_{s_i} \frac{d\xi}{R} \qquad (21)$$

ausgedrückt werden. Im betrachteten Falle reduziert sich also die Bestimmung der gemischten Ableitungen U_{xz} und U_{yz} ebenfalls auf einfache Integrale. Ist s_i ein beliebiges Vieleck, so lassen sich, wie man leicht nachweist, die Integrationen in (21) in geschlossener Form, mit Hilfe elementarer Funktionen durchführen.

Für ein Polyeder kann (19) mit Rücksicht auf (18) in der Form

$$(U_{ik}) = \frac{1}{2}\kappa\varrho \sum_{\nu}\left[n_k^{(\nu)} \int_{S_\nu} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{1}{R}\right) dS + n_i^{(\nu)} \int_{S_\nu} \frac{\partial}{\partial \xi_k}\left(\frac{1}{R}\right) dS\right].$$

$$(i, k = 1, 2, 3)$$

geschrieben werden, wo nun $n_i^{(\nu)}$ und $n_k^{(\nu)}$ die betreffenden Komponenten des zu S_ν gehörigen Normaleneinheitsvektors $\vec{n}^{(\nu)}$ bedeuten. Es ist jedoch

$$X_i^{(\nu)} = -\kappa\varrho \int_{S_\nu} \frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\frac{1}{R}\right) dS$$

die i-te Komponente der Intensität des von S_ν hervorgerufenen Feldes und mit dieser Bezeichnung hat man

$$(U_{ik}) = -\frac{1}{2}\sum_{\nu}\left[n_k^{(\nu)} X_i^{(\nu)} + n_i^{(\nu)} X_k^{(\nu)}\right] \qquad (22)$$

als Erweiterung der Mehlerschen Formel (8) auf die zweiten Ableitungen des Po- tentials, die übrigens auch unmittelbar aus der letzterwähnten Formel abgeleitet werden kann. Da alle S_ν Polygone sind, lassen sich die Größen $X_i^{(\nu)}$ mit Hilfe des bereits erörterten Formelapparates in endlicher Form durch elementare Funktionen ausdrücken.

Vom Gesichtspunkt der gravimetrischen Interpretationsmethoden interessieren jedoch nicht nur die ersten und zweiten Ableitungen des Potentials, sondern in steigendem Maße auch einige von seinen höheren Ableitungen. Es wird deshalb wohl nicht ohne Interesse sein, die Frage nach der Darstellbarkeit der höheren Ableitungen des Potentials durch Integrale über die Oberfläche des Körpers in allgemeiner Form zu behandeln. Zu diesem Zweck führen wir die Bezeichnung

$$U_{ijk} = \frac{\partial^N U}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}, \qquad (N = i + j + k > 0;\ i, j, k = 0, 1, 2, \ldots)$$

ein und beachten, daß dann

$$U_{ijk} = (-1)^N \kappa \varrho \int\limits_\tau \frac{\partial^N}{\partial \xi^i \partial \eta^j \partial \zeta^k} \left(\frac{1}{R}\right) d\tau \tag{23}$$

ist. Das obige Volumintegral läßt sich mit Hilfe des Gaußschen Satzes auf so viele Arten in Integrale über die Oberfläche S des Körpers verwandeln, wie es unter den Koordinaten ξ, η, ζ solche gibt, nach denen man in (23) mindestens einmal zu differenzieren hat. Es besteht nämlich immer wenigstens eine der Beziehungen

$$U_{ijk} = (-1)^N \kappa \varrho \oint\limits_S \frac{\partial^{N-1}}{\partial \xi^{i-1} \partial \eta^j \partial \zeta^k} \left(\frac{1}{R}\right) \cos(nx)\, dS, \qquad i > 0,$$

$$U_{ijk} = (-1)^N \kappa \varrho \oint\limits_S \frac{\partial^{N-1}}{\partial \xi^i \partial \eta^{j-1} \partial \zeta^k} \left(\frac{1}{R}\right) \cos(ny)\, dS, \qquad j > 0, \tag{24}$$

$$U_{ijk} = (-1)^N \kappa \varrho \oint\limits_S \frac{\partial^{N-1}}{\partial \xi^i \partial \eta^j \partial \zeta^{k-1}} \left(\frac{1}{R}\right) \cos(nz)\, dS, \qquad k > 0. \tag{25}$$

Um zu beweisen, daß diese Formeln auch dann gelten, wenn sich der Aufpunkt im Innern der anziehenden Massen befindet, setzen wir voraus, daß etwa $k > 0$ ist. Wir umschließen wieder, wie oben, P mit der Kugelfläche K und beachten, daß der Beitrag zu U_{ijk} der innerhalbt K liegenden Massen für $N > 2$ entsprechend (4) verschwindet (für $N \leqq 2$ ist der Beweis schon erbracht). Um den Beitrag der Kugelfläche zum Flächenintegral (24) zu untersuchen, führen wir Polarkoordinaten mit P als Anfangspunkt derart ein, daß die Polarachse die Richtung z habe. Dann ist

$$\frac{\partial^{N-1}}{\partial \xi^i \partial \eta^j \partial \zeta^{k-1}} \left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\Phi(\xi - x, \eta - y, \zeta - z)}{R^{2N-1}},$$

wo Φ ein homogenes harmonisches Polynom vom Grade $N-1$ in den Veränderlichen $(\xi - x,\ \eta - y,\ \zeta - z)$ ist [9]. Letzteres läßt sich in Polarkoordinaten bekanntlich in der Form

$$\Phi = R^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)\, P_{N-1}^m(\cos \vartheta)$$

schreiben, wo $P_{N-1}^m(\cos \vartheta)$ die Legendreschen Funktionen, A_m und B_m irgendwelche Konstanten bedeuten. Weiter ist

$$\cos(nz) = P_1(\cos \vartheta), \quad dS = a^2 \sin \vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

und bildet man entsprechend (24) das Integral über K, so sieht man sofort, daß es wegen der Orthogonalität der Legendreschen Funktionen identisch verschwindet. Die Gültigkeit der Gleichungen (24) ist damit auch für das innere Gebiet erwiesen.

Außer (24) gibt es noch eine Reihe anderer Möglichkeiten die Ableitungen des Potentials durch Flächenintegrale darzustellen. Schreibt man z. B. in (25) k statt $k - 1$, so ist

$$\Phi = R^{2N+1} \frac{\partial^N}{\partial \xi^i \partial \eta^j \partial \zeta^k} \left(\frac{1}{R}\right), \quad (N = i + j + k > 0;\ i, j, k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{26}$$

ein harmonisches Polynom vom Grade N in den Veränderlichen $(\xi - x,\ \eta - y,\ \zeta - z)$. Da Φ homogen ist, hat man

$$\vec{R} \operatorname{grad} \Phi = N\Phi. \tag{27}$$

Andererseits ergibt sich aus dem Gaußschen Satze, da Φ harmonisch und also $\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = 0$ ist,

$$\oint\limits_S \frac{1}{R^{2N-1}} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = \int\limits_\tau \operatorname{div}(R^{-2N+1} \operatorname{grad} \Phi)\, d\tau = \int\limits_\tau \operatorname{grad} \Phi \operatorname{grad} R^{-2N+1}\, d\tau$$

und weiter, da $\operatorname{grad} R^{-2N+1} = -(2N - 1)\, \vec{R}/R^{2N+1}$, mit Rücksicht auf (27)

$$\oint\limits_S \frac{1}{R^{2N-1}} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = -N(2N - 1) \int\limits_\tau \frac{\Phi}{R^{2N+1}} d\tau. \tag{28}$$

Beachtet man nun (26), so sieht man an Hand der Beziehung (23), daß das an der rechten Seite von (28) auftretende Volumintegral bis auf den Faktor $(-1)^N \kappa\varrho$ mit der Potentialableitung U_{ijk} übereinstimmt. Es ergibt sich auf diesem Wege eine weitere Darstellung der Ableitungen des Potentials durch Flächeintegrale, und zwar in der Form

$$U_{ijk} = \frac{(-1)^{N+1} \kappa \varrho}{N(2N - 1)} \oint\limits_S \frac{1}{R^{2N-1}} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS, \tag{29}$$

die für das äußere Gebiet für alle $N \geqq 1$ gilt. Man kann indessen mit Hilfe des oben schon mehrmals angewandten Verfahrens leicht zeigen, daß diese Formel für alle Ableitungen, U_{200}, U_{020} und U_{002} ausgenommen, ihre Gültigkeit auch im inneren Gebiet bewahrt. Der Beweis stütz sich auf die Tatsache, daß der Beitrag der innerhalb der Kugel K befindlichen Massen gleich Null ist und das über K genommene Integral $\oint\limits_K \frac{1}{R^{2N-1}} \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds$ verschwindet, weil R konstant und Φ harmonisch ist. In den

Ausnahmefällen U_{200}, U_{020} und U_{002} muß in (29) rechts noch das Glied $-(4/3)\,\pi\kappa\varrho$ hinzugefügt werden.

Eine weitere Darstellung durch Flächenintegrale, die besonders bei homogenen Polyedern zu interessanten Beziehungen führt, ergibt sich, wenn man (29) mit Hilfe des Greenschen Satzes umformt. Nach diesem ist nämlich

$$\oint_S \frac{1}{R^{2N-1}} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS + \int_\tau \Phi \, \Delta R^{-2N+1} d\tau = \oint_S \Phi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R^{2N-1}}\right) dS,$$

wobei zu beachten ist, daß $\Delta\Phi = 0$. Wir setzen hier

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R^{2N-1}}\right) = -\frac{(2N-1)\,h}{R^{2N+1}}, \qquad \Delta R^{-2N+1} = \frac{2(N-1)(2N-1)}{R^{2N-1}},$$

wo h wieder den (verabredungsgemäß positiven oder negativen) Abstand des Aufpunktes von der Berührungsebene zur Körperoberfläche bedeutet, und erhalten weiter unter Beachtung von (26)

$$\oint_S \frac{1}{R^{2N-1}} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS + 2(N-1)(2N-1) \int_\tau \frac{\partial^N}{\partial \xi^i \partial \eta^j \partial \zeta^k}\left(\frac{1}{R}\right) d\tau =$$
$$= -(2N-1) \oint_S \frac{h}{R^{2N+1}} dS.$$

Setzt man hierin für die links stehenden beiden Integrale ihre aus (23) und (29) folgenden Werte ein, so ergibt sich schließlich

$$U_{ijk} = \frac{(-1)^{N+1}\kappa\varrho}{N-2} \oint_S \frac{h\Phi}{R^{2N+1}} dS. \tag{30}$$

Einen bereits früher erörterten Sonderfall der letzteren Formel stellt die Gleichung (15) dar, wenn man sie für die einzelnen Komponenten der Feldstärke hinschreibt. Wie man sofort sieht, gilt (30) für alle $N > 0$ mit der Ausnahme $N = 2$. Dies erklärt sich dadurch, daß für $N = 2$ das Integral in (30) verschwindet. Sonst gilt (30) wieder nicht nur im Außenraum, sondern, wie wir für $N = 1$ bereits gezeigt haben, auch im inneren Gebiet. Für $N > 2$ erkennt man dies daran, daß für die Kugel K das Integral in (30) verschwindet, weil $h = R$ konstant und $\oint_K \Phi \, dS = 0$ ist für jedes homogene harmonische Polynom vom Grade $N > 0$.

Beachtet man wieder, daß an den einzelnen Flächen eines Polyeders $\cos(nz)$ konstant ist, so folgt für $k > 0$ aus der dritten Formel (24)

$$U_{ijk} = (-1)^N \kappa\varrho \sum_\nu \cos(n_\nu z) \int_{S_\nu} \frac{\partial^{N-1}}{\partial \xi^i \partial \eta^j \partial \zeta^{k-1}}\left(\frac{1}{R}\right) dS.$$

Es ist jedoch, wie man leicht sieht,

$$U^{(\nu)}_{i,j,k-1} = (-1)^{N-1} \kappa\varrho \int_{S_\nu} \frac{\partial^{N-1}}{\partial \xi^i \partial \eta^j \partial \zeta^{k-1}}\left(\frac{1}{R}\right) dS \tag{31}$$

nichts anderes, als die durch die unteren Indizes angedeutete Ableitung des Potentials der mit der konstanten Flächendichte ϱ belegten Fläche S_ν. Für ein Polyeder folgt also

$$U_{ijk} = -\sum_\nu U^{(\nu)}_{i,j,k-1} \cos(n_\nu z), \qquad (k > 0) \tag{32}$$

als eine weitere Verallgemeinerung der Mehlerschen Formel (8) und ebenso beweist man auch die Formeln

$$U_{ijk} = -\sum_\nu U^{(\nu)}_{i-1,j,k} \cos(n_\nu x), \qquad U_{ijk} = -\sum_\nu U^{(\nu)}_{i,j-1,k} \cos(n_\nu y),$$

die für $i > 0$ bzw. $j > 0$ sowohl im Außenraum, als im Innern des Körpers gelten. Für den in Abb. 2 dargestellten geraden Zylinder folgt aus (32) eine Erweiterung der Beziehungen (9) und (20) in der Form

$$U_{ijk} = U^{(1)}_{i,j,k-1} - U^{(2)}_{i,j,k-1}, \qquad (k = 1, 2, \ldots) \tag{33}$$

die sich in praktischer Hinsicht gut bewährt.

Da h an den einzelnen Flächen des Polyeders ebenfalls konstant ist, hat man an Hand von (30) für $N \neq 2$ auch

$$U_{ijk} = \frac{(-1)^{N+1}}{N-2} \kappa\varrho \sum_\nu h_\nu \int_{S_\nu} \frac{\Phi}{R^{2N+1}} dS$$

und das Integral unter dem Summenzeichen kann infolge (26) und (31) in der Form

$$\int_{S_\nu} \frac{\Phi}{R^{2N+1}} dS = \frac{(-1)^N}{\kappa\varrho} U^{(\nu)}_{ijk}$$

geschrieben werden. Man erhält auf diese Weise

$$U_{ijk} = \frac{1}{2-N} \sum_\nu h_\nu U^{(\nu)}_{ijk} \tag{34}$$

als allgemeinere Form der Gleichung (5).

Abschließend sei noch bemerkt, daß der Greensche Satz auch unmittelbar eine Darstellung des Potentials und seiner Ableitungen durch Flächenintegrale gestattet. Ist nämlich $\Psi(\xi, \eta, \zeta)$ irgendeine partikuläre Lösung der Poissonschen Gleichung

$\Delta\Psi = \kappa\varrho$ (also z. B. $\Psi = 1/2\,\kappa\varrho\xi^2$, $\Psi = 1/2\,\kappa\varrho(\eta - y)^2$, $\Psi = \kappa\varrho R^2/6$ usf.) und beachten wir, daß $(\Delta\Phi/R^{2N+1}) = 0$ ist für die durch (26) definierte Funktion Φ, so ist

$$U_{ijk} = (-1)^N \oint\limits_S \left[\frac{\Phi}{R^{2N+1}} \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\Phi}{R^{2N+1}} \right) \right] \mathrm{d}S$$

eine solche (für praktische Zwecke allerdings nicht sehr handliche) Darstellung der Ableitungen des Potentials im Außenraum.

LITERATUR

[1] King Hubbert M., *A line-integral method of computing the gravimetric effects of two-dimensional masses*, Geophysics XIII (1948).
[2] Talwani M., Worzel J. L., Landisman M., *Rapid gravity computations for two-dimensional bodies with application to the Mendocino submarine fracture zone*, Journ. Geophys. Res. 1959, 1.
[3] Kolbenheyer T., *К теории гравитационных полей однородных и неоднородных бесконечных призм*, Studia geophys. et geod. 5 (1961), 108.
[4] Kolbenheyer T., *Гравитационное поле однородного круглого цилиндра*, Studia geophys. et geod. 5 (1961), 3.
[5] Kolbenheyer T., *Riešenie priamej úlohy gravimetrie pre homogénny guľový úsek pomocou povrchových integrálov*. Sborník ved. prác Vys. školy techn. v Košiciach 1963, 1.
[6] Kneschke A., *Differentialgleichungen und Randwertprobleme*, *2*, 133—135, Berlin 1960.
[7] Talwani M., Ewing M., *Rapid computation of gravitational attraction of three-dimensional bodies of arbitrary shape*, Geophysics, XXV (1960), 1.
[8] Jung K., *Schwerkraftverfahren in der angewandten Geophysik*, 329—334, Leipzig 1961.
[9] Lense J., *Kugelfunktionen*, 11. 2. Aufl., Leipzig 1954.

Eingelangt am 8. Februar 1963.

Katedra banského meračstva a geofyziky
Baníckej fakulty Vysokej školy technickej
v Košiciach

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ ОДНОРОДНЫХ ТЕЛ ПРИ ПОМОЩИ ИНТЕГРАЛОВ ПО ПОВЕРХНОСТИ ТЕЛА

Тибор Кольбенхейер

Резюме

В статье разработаны теоретические основы метода решения прямой гравиметрической задачи, основанного на представлении гравитационного поля произвольного однородного тела при помощи поверхностных интегралов. Интегралы, фигурирующие в известных формулах (1) можно привести, при помощи теоремы Остроградского-Гаусса, к интегралам по поверхности притягивающего тела. Тем самым понижается число интеграций, необходимых для вычисления гравитационного поля тела, что может иметь, с точки зрения практических вычислений, крупное значение. Потенциал тела произвольной формы можно представить при помощи соотношений (2) и (3), вектор напряженности поля при помощи общих формул (7)

и (15), где h обозначает расстояние точки, в которой мы рассматриваем поле и касательной плоскости поверхности тела в переменной точке, в которой мы рассматриваем элемент поверхности dS. В следующей части работы выводятся соотношения, при помощи которых выражаются также вторые производные потенциала по прямоугольным координатам (x, y, z), через поверхностные интегралы. Так как для истолкования гравиметрических данных применяются все более некоторые производные еще высших порядков, то заключение статьи посвящено выводу общих соотношений для выражения общих производных потенциала однородного тела при помощи поверхностных интегралов. Особое внимание уделяется выражению потенциала и его производных для случая произвольного многогранника. Напряженность поля можно выразить в этом случае, при помощи потенциалов отдельных граней многогранника и некоторых геометрических параметров известной формулой Меллера (8), но аналогичные простые соотношения (5), (22) и (32) могут быть получены и для потенциала и его производных высших порядков.