MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 13, 3, 1963

О НИЛЬПОТЕНТНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ, ИДЕАЛАХ И РАДИКАЛАХ ПОЛУГРУППЫ

РОБЕРТ ШУЛКА (Robert Šulka), Братислава

В работе рассматриваются некоторые соотношения между множеством всех идеалов полугруппы S и множествами нильпотентных элементов полугруппы S относительно этих идеалов, соотношения между идеалами полугруппы S и нильидеалами (соответственно нильпотентными идеалами) относительно этих идеалов, а также соотношения между множеством всех идеалов полугруппы S и соответственно, множеством всех радикалов Клифорда (A. H. Clifford), Шварца (Š. Schwarz) и Маккойа (И. Н. McCoy) (опред. 4, 5 и 8) относительно этих идеалов. Наконец, рассматриваются соотношения между всеми идеалами полугруппы S и множеством вполне простых радикалов (опред. 12) относительно этих идеалов. Оказывается, что отображение, ставящее в соответствие всякому идеалу полугруппы S множество всех нильпотентных элементов относительно этого идеала, представляет собой $\cap$, $\cup$-гомоморфизм структуры всех идеалов полугруппы S в структуру всех подмножеств полугруппы S, причем структурными операциями являются теоретикомножественные объединение и пересечение. Отображение, ставящее в соответствие всякому идеалу полугруппы S, соответственно радикалы Клифорда, Шварца и Маккойа, представляет собой $\cap$-эндоморфизм структуры, элементами которой являются все идеалы полугруппы S а структурными операциями являются теоретико-множественные пересечение и объединение. Наконец, отображение, ставящее в соответствие всякому идеалу полугруппы S вполне простой радикал относительно этого идеала, представляет собой $\cap$,$\cup$-эндоморфизм приведенной выше структуры всех идеалов полугруппы S. Как показал Босак (J. Bosák) в работе [1], приведенные выше радикалы относительно одного и того же идеала в некоммутативной полугруппе S, могут быть различны. В случае коммутативной полугруппы S, все четыре вида радикалов относительно одного и того же идеала полугруппы S совпадают с множеством нильпотентных элементов относительно этого идеала.

Идеалом в настоящей работе следует понимать двусторонний идеал.

1. Множества нильпотентных элементов относительно идеалов полугруппы S

Определение 1. Пусть S — полугруппа, J — ее идеал. Элемент $x \in S$ мы называем нильпотентным относительно J, если существует такое натуральное число n, что $x^n \in J$.

Множество всех нильпотентных элементов полугруппы S относительно идеала J обозначим через $N(J)$.

Лемма 1. *Пусть S — полугруппа и пусть J_1 и J_2 — ее идеалы. Тогда*

а) $J_1 \subseteq J_2 \Rightarrow N(J_1) \subseteq N(J_2)$,
б) $N(J_1) \cap N(J_2) = N(J_1 \cap J_2)$,
в) $N(J_1) \cup N(J_2) = N(J_1 \cup J_2)$.

Доказательство. а) Первое утверждение очевидно.

б) Всякий элемент $x \in N(J_1 \cap J_2)$ является нильпотентным относительно $J_1 \cap J_2$, значит, также относительно J_1 и J_2, следовательно, он принадлежит к $N(J_1)$ и $N(J_2)$, то есть $N(J_1 \cap J_2) \subseteq N(J_1) \cap N(J_2)$. С другой стороны, если $x \in N(J_1) \cap N(J_2)$, то x нильпотентно относительно $J_1 (x^m \in J_1)$ и $J_2 (x^n \in J_2)$, значит, оно нильпотентно также относительно $J_1 \cap J_2 (x^{m+n} \in J_1 \cap J_2)$, следовательно, оно принадлежит к $N(J_1 \cap J_2)$, т. е. $N(J_1) \cap N(J_2) \subseteq N(J_1 \cap J_2)$.

в) Так как $J_1 \subseteq J_1 \cup J_2$ и $J_2 \subseteq J_1 \cup J_2$, то $N(_1J) \subseteq N(J_1 \cup J_2)$ и $N(J_2) \subseteq$ $\subseteq N(J_1 \cup J_2)$, т. е. $N(J_1) \cup N(J_2) \subseteq N(J_1 \cup J_2)$. Пусть теперь $x \in N(J_1 \cup J_2)$. Тогда x нильпотентно относительно $J_1 \cup J_2$, следовательно, x нильпотентно также относительно $J_1 (x^n \in J_1)$, или относительно $J_2 (x^n \in J_2)$. Поэтому $N(J_1 \cup J_2) \subseteq N(J_1) \cup N(J_2)$.

Теорема 1. *Отображение, ставящее в соответствие всякому идеалу J полугруппы S множество $N(J)$ всех нильпотентных элементов относительно идеала J, представляет собой $\cap$, $\cup$-гомоморфизм структуры всех идеалов полугруппы S в структуру всех подмножеств полугруппы S. Структурными операциями являются при этом теоретикомножественные пересечение и объединение.*

Следствие. *Система всех множеств нильпотентных элементов относительно идеалов полугруппы S является подструктурой структуры всех подмножеств полугруппы S.*

Доказательство вытекает из леммы 1.

2. Ниль- (нильпотентные) идеалы относительно идеалов полугруппы S

Определение 2. Пусть S — полугруппа, J — ее идеал, а I — идеал в S, всякий элемент которого нильпотентен относительно J. В таком случае, идеал I мы называем нильидеалом относительно идеала J.

Лемма 2. *Пусть S — полугруппа, пусть J_1, J_2, и J_κ, $\kappa \in K$ — ее идеалы. Пусть I_1 — нильидеал относительно J_1, I_2 — нильидеал относительно J_2, а I_κ, $\kappa \in K$ — нильидеал относительно J_κ, $\kappa \in K$. Тогда*

а) $J_1 \subseteq J_2 \Rightarrow I_1$ — *нильидеал относительно* J_2,
б) $I_1 \cap I_2$ — *нильидеал относительно* $J_1 \cap J_2$,
в) $\cup_{\kappa \in K} I_\kappa$ — *нильидеал относительно идеала* $\cup_{\kappa \in K} J_\kappa$.

Доказательство. а) Это утверждение очевидно.

б) Всякий элемент из $I_1 \cap I_2$ нильпотентен относительно $J_1 (x^m \in J_1)$ и относительно $J_2 (x^n \in J_2)$. Но тогда x нильпотентно также относительно $J_1 \cap J_2$. Поэтому $I_1 \cap I_2$ является нильидеалом относительно $J_1 \cap J_2$.

в) I_κ, $\kappa \in K$ — нильидеал относительно $\cup_{\kappa \in K} J_\kappa$. Отсюда вытекает, что и $\cup_{\kappa \in K} I_\kappa$ является нильидеалом относительно $\cup_{\kappa \in K} J_\kappa$.

Определение 3. Пусть S — полугруппа, J — ее идеал, а I — такой идеал в S, что для некоторого натурального числа n, $I^n \subseteq J$. Идеал I мы назовем тогда нильпотентным идеалом относительно J.

Лемма 3. *Пусть S — полугруппа, J_1 и J_2 — ее идеалы. Пусть I_1 является нильпотентным идеалом относительно идеала J_1 и I_2 пусть является нильпотентным идеалом относительно J_2. Тогда*

а) $J_1 \subseteq J_2 \Rightarrow I_1$ — *нильпотентный идеал относительно идеала* J_2,
б) $I_1 \cap I_2$ — *нильпотентный идеал относительно идеала* $J_1 \cap J_2$,
в) $I_1 \cup I_2$ — *нильпотентный идеал относительно идеала* $J_1 \cup J_2$.

Доказательство. а) Это утверждение снова очевидно.

б) Существуют такие натуральные числа n_1 и n_2, что $I_1^{n_1} \subseteq J_1$, $I_2^{n_2} \subseteq J_2$. Пусть $n = \mathrm{Max}\,(n_1, n_2)$. Тогда $(I_1 \cap I_2)^n \subseteq J_1$, $(I_1 \cap I_2)^n \subseteq J_2$, значит, $(I_1 \cap I_2)^n \subseteq$ $\subseteq J_1 \cap J_2$ и $I_1 \cap I_2$ — нильпотентный идеал относительно идеала $J_1 \cap J_2$.

в) Существуют такие натуральные числа n_1 и n_2, что $I_1^{n_1} \subseteq J_1$ и $I_2^{n_2} \subseteq J_2$. Всякое произведение $x = x_1 x_2 \dots x_{n_1+n_2}$ с $n_1 + n_2$ элементами из $I_1 \cup I_2$ имеет либо, по крайней мере n_1 элементов из I_1, либо, по крайней мере n_2 элементов из I_2. Поскольку I_1 и I_2 — идеалы, то такое произведение можно написать либо в виде произведения хотя бы n_1 элементов из I_1, либо в виде произведения хотя бы n_2 элементов из I_2. Итак, либо $x \in J_1$, либо $x \in J_2$, т. е. $x \in J_1 \cup J_2$. Поэтому $(I_1 \cup I_2)^{n_1+n_2} \subseteq J_1 \cup J_2$.

3. Радикалы Клифорда относительно идеалов полугруппы S

Определение 4. Пусть S — полугруппа и J — ее идеал. Идеал $R^*(J)$, являющийся объединением всех нильидеалов полугруппы S относительно идеала J, мы назовем радикалом Клифорда относительно J.

Лемма 4. *Пусть S — полугруппа и пусть J_1 и J_2 — ее идеалы. Тогда*

а) $J_1 \subseteq J_2 \Rightarrow R^*(J_1) \subseteq R^*(J_2)$,
б) $R^*(J_1) \cap R^*(J_2) = R^*(J_1 \cap J_2)$,
в) $R^*(J_1) \cup R^*(J_2) \subseteq R^*(J_1 \cup J_2)$.

Доказательство. а) Поскольку $R^*(J_1)$ является нильидеалом относительно J_1, то оно является также нильидеалом относительно J_2, и поэтому $R^*(J_1) \subseteq R^*(J_2)$.

б) Из доказанного только что утверждения вытекает, что $R^*(J_1 \cap J_2) \subseteq R^*(J_1) \cap R^*(J_2)$. Собственно, $J_1 \cap J_2 \subseteq J_1$ и $J_1 \cap J_2 \subseteq J_2$, а поэтому $R^*(J_1 \cap J_2) \subseteq R^*(J_1)$ и $R^*(J_1 \cap J_2) \subseteq R^*(J_2)$.

С другой стороны, $R^*(J_1) \cap R^*(J_2)$ также является идеалом и всякий его элемент нильпотентен относительно J_1 и J_2, значит, также относительно $J_1 \cap J_2$. Поэтому $R^*(J_1) \cap R^*(J_2) \subseteq R^*(J_1 \cap J_2)$ и значит, $R^*(J_1 \cup J_2) = R^*(J_1) \cap R^*(J_2)$.

в) $J_1 \subseteq J_1 \cup J_2 \Rightarrow R^*(J_1) \subseteq R^*(J_1 \cup J_2)$. $J_2 \subseteq J_1 \cup J_2 \Rightarrow R^*(J_2) \subseteq R^*(J_1 \cup J_2)$. Из этого вытекает, что $R^*(J_1) \cup R^*(J_2) \subseteq R^*(J_1 \cup J_2)$.

Теорема 2. *Отображение, ставящее в соответствие всякому идеалу J полугруппы S радикал Клифорда $R^*(J)$ относительно идеала J, представляет собой $\cap$-эндоморфизм структуры, элементами которой являются все идеалы полугруппы S, а структурными операциями — теоретикомножественные пересечение и объединение.*

Следствие. *Множество всех радикалов Клифорда относительно идеалов полугруппы S является подполуструктурой $\cap$-полуструктуры всех идеалов полугруппы S.*

Доказательство вытекает из леммы 4.

4. Радикалы Шварца относительно идеалов полугруппы S

Определение 5. Пусть S — полугруппа, а J — идеал в S. Идеал $R(J)$, который является объединением всех нильпотентных идеалов полугруппы S относительно идеала J, мы назовем радикалом Шварца относительно J.

Лемма 5. *Пусть S — полугруппа, и пусть J_1 и J_2 — ее идеалы. Тогда*

а) $J_1 \subseteq J_2 \Rightarrow R(J_1) \subseteq R(J_2)$,
б) $R(J_1) \cap R(J_2) = R(J_1 \cap J_2)$,
в) $R(J_1) \cup R(J_2) \subseteq R(J_1 \cup J_2)$.

Доказательство. а) Всякий элемент $x \in R(J_1)$ порождает нильпотентный главный идеал (x) относительно J_1. Но (x) — нильпотентный идеал также относительно J_2, и поэтому $x \in (x) \subseteq R(J_2)$.

б) Так как $J_1 \cap J_2 \subseteq J_1$ и $J_1 \cap J_2 \subseteq J_2$, то мы получим $R(J_1 \cap J_2) \subseteq R(J_1)$, $R(J_1 \cap J_2) \subseteq R(J_2)$, значит $R(J_1 \cap J_2) \subseteq R(J_1) \cap R(J_2)$.

С другой стороны, если $x \in R(J_1) \cap R(J_2)$, то главный идеал (x), порожденный элементом x, является нильпотентным идеалом относительно J_1 и относительно J_2. Но (x) является тогда нильпотентным идеалом относительно $J_1 \cap J_2$, т. е. $x \in (x) \subseteq R(J_1 \cap J_2)$. Это означает, что $R(J_1) \cap R(J_2) \subseteq R(J_1 \cap J_2)$ и, следовательно, $R(J_1 \cap J_2) = R(J_1) \cap R(J_2)$.

в) вытекает из а).

Теорема 3. *Отображение, которое всякому идеалу J полугруппы S ставит в соответствие радикал Шварца $R(J)$ относительно идеала J, представляет собой $\cap$-эндоморфизм структуры, элементами которой являются все идеалы полугруппы S, а структурными операциями — теоретикомножественные объединения и пересечения.*

Следствие. *Множество всех радикалов Шварца относительно идеалов полугруппы S является подполуструктурой $\cap$-полуструктуры всех идеалов полугруппы S.*

Следующий пример показывает, что леммы 4 и 5 не могут быть усилены, т. е. невозможно доказать, что всегда $R^*(J_1) \cup R^*(J_2) = R^*(J_1 \cup J_2)$ и $R(J_1) \cup R(J_2) = R(J_1 \cup J_2)$.

Пример. Пусть S — полугруппа, порожденная элементами a, b, c с единственным определяющим соотношением $c^2 = a$. Пусть $J_1 = (a)$, $J_2 = (b)$, т. е. $J_1 \cup J_2 = (a) \cup (b)$. Тогда $(c)^2 \subseteq J_1 \cup J_2$ (уже $(c) - \{c\} \subseteq J_1 \cup J_2$), значит $c \in R(J_1 \cup J_2)$. Пусть $x = ca$ и $y = cb$. Ни для какого натурального числа n не будет в этом случае элемент $x^n \in J_2$ и элемент $y^n \in J_1$. Поэтому не может быть $(c)^n \subseteq J_2$, и не $(c)^n \subseteq J_1$, т. е. не $c \in R(J_1)$, и не $c \in R(J_2)$, значит, не $c \in R(J_1) \cup R(J_2)$, хотя и $c \in R(J_1 \cup J_2)$.

Точно также не может быть $c \in R^*(J_1)$, ни $c \in R^*(J_2)$, значит, не $c \in R^*(J_1) \cup R^*(J_2)$, хотя и $c \in R^*(J_1 \cup J_2)$.

5. Радикалы Маккойа относительно идеалов полугруппы S

Определение 6. Идеал P полугруппы S мы называем простым идеалом, если для всяких двух идеалов A, B из S, для которых $AB \subseteq P$, имеет место либо $A \subseteq P$, либо $B \subseteq P$.

Определение 7. Множество H полугруппы S мы назовем m-системой в S, если для всяких двух элементов c, d из H существует элемент $x \in S$, такой, что $cxd \in H$. Пустое множество мы будем также считать m-системой.

Определение 8. Пусть J — идеал полугруппы S. Пусть $M(J)$ — множество всех элементов $r \in S$, для которых справедливо, что пересечение с J всякой

m-системы из S, содержащей r, непусто. $M(J)$ мы назовем тогда радикалом Маккойа относительно идеала J.

Определение 9. Простой идеал P является минимальным простым идеалом, принадлежащим к идеалу J, если $J \subseteq P$, и не существует такого простого идеала P', для которого имеет место $J \subseteq P' \subset P$.

Тогда справедливо (смотри [2] и [3]).

Лемма 6. *Радикал Маккойа $M(J)$ относительно идеала J полугруппы S является пересечением всех минимальных простых идеалов, принадлежащих к идеалу J. Значит, $M(J)$ является также идеалом в S.*

Лемма 7. *Пусть S — полугруппа и пусть J_1 и J_2 — ее идеалы. Тогда*

а) $J_1 \subseteq J_2 \Rightarrow M(J_1) \subseteq M(J_2)$,
б) $M(J_1) \cap M(J_2) = M(J_1 \cap J_2)$,
в) $M(J_1) \cup M(J_2) \subseteq M(J_1 \cup J_2)$.

Доказательство. а) Это утверждение очевидно.

б) Если $x \in M(J_1 \cap J_2)$, то всякая m-система, содержащая x, содержит также некоторый элемент из $J_1 \cap J_2$. Значит, всякая m-система, содержащая x, содержит также некоторый элемент из J_1 и J_2. Поэтому $x \in M(J_1)$ и $x \in M(J_2)$, значит, $M(J_1 \cap J_2) \subseteq M(J_1) \cap M(J_2)$.

Если $x \in M(J_1) \cap M(J_2)$, то $x \in M(J_1)$ и $x \in M(J_2)$. Итак, всякая m-система $H_\kappa (\kappa \in K)$, содержащая x, содержит также некоторый элемент $c_\kappa \in J_1 (\kappa \in K)$ и некоторый элемент $d_\kappa \in J_2 (\kappa \in K)$. Так как $c_\kappa \in H_\kappa$, $d_\kappa \in H_\kappa$ и H_κ являются m-системой, то существует элемент $s_\kappa \in S$, такой, что $c_\kappa s_\kappa d_\kappa \in H_\kappa$. Но так как $c_\kappa \in J_1$ и $d_\kappa \in J_2$, где J_1 и J_2 — идеалы, то $c_\kappa s_\kappa d_\kappa \in J_1 J_2 \subseteq J_1 \cap J_2$. Поэтому пересечение с $J_1 \cap J_2$ всякой m-системы, содержащей x, также непусто. Из этого вытекает, что $M(J_1) \cap M(J_2) \subseteq M(J_1 \cap J_2)$, что и требовалось доказать.

в) вытекает из а).

Теорема 4. *Отображение, ставящее в соответствие всякому идеалу J полугруппы S радикал Маккойа $M(J)$ относительно идеала J, представляет собой $\cap$-эндоморфизм структуры, элементами которой являются все идеалы полугруппы S, а структурными операциями — теоретикомножественные пересечения и объединения.*

Следствие. *Множество всех радикалов Маккойа относительно идеалов полугруппы S является подполуструктурой $\cap$-полуструктуры всех идеалов полугруппы S.*

Доказательство вытекает из леммы 7.

Примечание. В разделе 8 мы покажем, что в лемме 7 в) не всегда имеет место знак равенства, т. е. лемму 7 в пункте в) нельзя усилить.

Определение 10. Идеал P полугруппы S мы называем вполне простым идеалом, если из $ab \in P$ вытекает либо $a \in P$, либо $b \in P$, для всяких двух элементов a и b из S.

Нам известно, что дополнение $S - P = M$ вполне простого идеала P является подполугруппой, а идеал P является вполне простым идеалом тогда и только тогда, когда $M = S - P$ представляет собой подполугруппу. Здесь и в дальнейшем подполугруппой мы понимаем также пустое множество. Для дальнейшего удобно ввести понятие сильной подполугруппы.

Определение 11. Подмножество M полугруппы S мы будем называть сильной подполугруппой, если $ab \in M$ тогда и только тогда, когда a и b из M. Пустое множество мы будем также рассматривать как сильную подполугруппу.

Из этого определения прямо вытекает

Лемма 8. *Непустое множество P элементов полугруппы S является вполне простым идеалом тогда и только тогда, когда $M = S - P$ — сильная подполугруппа, отличная от S.*

Дадим теперь определение некоторого радикала полугруппы S относительно идеала J полугруппы S.

Определение 12. Пусть S — полугруппа, а J — идеал полугруппы S. Пусть $C(J)$ — множество всех элементов $r \in S$, таких, что всякая сильная подполугруппа, содержащая элемент r, имеет непустое пересечение с идеалом J. Множество $C(J)$ мы назовем вполне простым радикалом относительно идеала J.

В дальнейшем мы сможем установить, что $C(J)$ является идеалом и пересечением всех минимальных вполне простых идеалов (опред. 13), содержащих идеал J. Доказательство происходит аналогично доказательству теоремы 2 в работе [3] для колец. Но, вместо m-систем необходимо привлечение сильных подполугрупп и доказательство для полугрупп значительно короче.

Лемма 9. *$J \subseteq C(J)$; J и $C(J)$ содержатся в одних и тех же вполне простых идеалах.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Далее, очевидно, что всякий вполне простой идеал, содержащий $C(J)$, содержит также J. Если бы для некоторого вполне простого идеала P имело место $J \subseteq P$, но не $C(J) \subseteq P$, то существовал бы элемент $r \in C(J)$, не из P, т. е. $r \in S - P = M$, где M является сильной подполугруппой, пересечение которой с J непусто. Но это невозможно, поэтому $C(J) \subseteq P$.

Лемма 10. *Пусть J — идеал в S, M — сильная подполугруппа, имеющая пустое пересечение с J. Тогда M содержится в максимальной сильной подполугруппе, пересечение которой с J пусто.*

Доказательство вытекает из того, что объединение всякой цепи сильных подполугрупп представляет собой сильную подполугруппу, и из леммы Цорна.

Определение 13. Вполне простой идеал P является минимальным вполне простым идеалом, принадлежащим к идеалу J, если $J \subseteq P$ и не существует вполне простой идеал P', для которого имело бы место $J \subseteq P' \subset P$.

Лемма 11. *Множество P полугруппы S является минимальным вполне простым идеалом, принадлежащим к идеалу J тогда и только тогда, когда $S - P$ является максимальной сильной подполугруппой в классе сильных подполугрупп, пересечение которых с J пусто.*

Доказательство вытекает прямо из леммы 8.

Теперь мы уже можем перейти к доказательству леммы 12.

Лемма 12. *Вполне простой радикал $C(J)$ относительно идеала J полугруппы S является пересечением всех минимальных вполне простых идеалов, принадлежащих к идеалу J.*

Доказательство. Из леммы 9 вытекает, что $C(J)$ содержится в пересечении всех вполне простых идеалов, принадлежащих к J. Из леммы 10 и 11 тогда вытекает, что $C(J)$ содержится в пересечении всех минимальных вполне простых идеалов, принадлежащих к J.

Следовательно, остается доказать, что всякий элемент пересечения минимальных вполне простых идеалов, принадлежащих к J, содержится в $C(J)$. Итак, пусть $r \notin C(J)$. Тогда существует сильная подполугруппа M, такая, что хотя она и содержит r, но пересечение ее с J пусто. Согласно лемме 10 существует максимальная сильная подполугруппа M' содержащая r, пересечение которой с J пусто. Но, так как, согласно лемме 11 $S - M'$ является минимальным вполне простым идеалом, принадлежащим к идеалу J, не содержащим элемент r, то r не будет из пересечения минимальных вполне простых идеалов, принадлежащих к J. Тем самым лемма доказана.

Следствие. *Вполне простой радикал $C(J)$ относительно идеала J является идеалом.*

Теперь мы можем доказать и лемму 13.

Лемма 13. *Пусть S — полугруппа, и пусть J_1 и J_2 — ее идеалы. Тогда*

а) $J_1 \subseteq J_2 \Rightarrow C(J_1) \subseteq C(J_2)$,
б) $C(J_1) \cap C(J_2) = C(J_1 \cap J_2)$,
в) $C(J_1) \cup C(J_2) = C(J_1 \cup J_2)$.

Доказательство. а) и б) доказываются аналогично, как и в лемме 7, но, разумеется, вместо m-систем берутся сильные подполугруппы.

в) Соотношение $C(J_1) \cup C(J_2) \subseteq C(J_1 \cup J_2)$ доказывается как в) в лемме 7.

Значит, достаточно еще доказать, что $C(J_1 \cup J_2) \subseteq C(J_1) \cup C(J_2)$. $C(J_1) = \cap_{\kappa \in K} P^{(1)}_{\kappa}$, где $P^{(1)}_{\kappa}$, $\kappa \in K$ — все вполне простые идеалы, содержащие J_1. $C(J_2) = \cap_{\lambda \in L} P^{(2)}_{\lambda}$ где $P^{(2)}_{\lambda}$, $\lambda \in L$ — все вполне простые идеалы, содержащие J_2. Тогда $P_{(\kappa,\lambda)} = P^{(1)}_{\kappa} \cup P^{(2)}_{\lambda}$ является вполне простым идеалом, содержащим $J_1 \cup J_2$ для всякого $\kappa \in K$, $\lambda \in L$. Кроме того, имеет место $C(J_1) \cup C(J_2) = (\cap_{\kappa \in K} P^{(1)}_{\kappa}) \cup (\cap_{\lambda \in L} P^{(2)}_{\lambda}) = \cap_{\kappa \in K, \lambda \in L}(P^{(1)}_{\kappa} \cup P^{(2)}_{\lambda}) = \cap_{(\kappa,\lambda) \in K \times L} P_{(\kappa,\lambda)} \supseteq C(J_1 \cup J_2)$, поскольку $C(J_1 \cup J_2)$ является пересечением всех вполне простых идеалов, содержащих $J_1 \cup J_2$.

Из леммы 13 вытекает

Теорема 5. *Отображение, ставящее в соответствие всякому идеалу J полугруппы S вполне простой радикал $C(J)$ относительно идеала J, представляет собой $\cap$, $\cup$-эндоморфизм структуры, элементами которой являются все идеалы полугруппы S, а структурными операциями — теоретикомножественные пересечения и объединения.*

Следствие. *Множество всех вполне простых радикалов относительно идеалов полугруппы S является подструктурой структуры всех идеалов полугруппы S.*

7. Множество нильпотентных элементов и радикалы в фактор-полугруппах Риса

Целью этого раздела является доказательство следующей теоремы:

Теорема 6. *Пусть S — полугруппа, J — идеал в S. Пусть $S|J$ — фактор-полугруппа Риса и 0^* — ее нуль. Обозначим через $N(0^*)$, $R^*(0^*)$, $R(0^*)$, $M(0^*)$, $C(0^*)$ соответственно множество нильпотентных элементов, и соответствующие радикалы в $S|J$ относительно идеала в $S|J$, имеющего единственный элемент 0^*. Тогда справедливо*

а) $N(J) = (N(0^*) - \{0^*\}) \cup J$ *т. е.* $N(0^*) = (N(J) - J) \cup \{0^*\}$,
б) $R^*(J) = (R^*(0^*) - \{0^*\}) \cup J$ *т. е.* $R^*(0^*) = (R^*(J) - J) \cup \{0^*\}$,
в) $R(J) = (R(0^*) - \{0^*\}) \cup J$ *т. е.* $R(0^*) = (R(J) - J) \cup \{0^*\}$,
г) $M(J) = (M(0^*) - \{0^*\}) \cup J$ *т. е.* $M(0^*) = (M(J) - J) \cup \{0^*\}$,
д) $C(J) = (C(0^*) - \{0^*\}) \cup J$ *т. е.* $C(0^*) = (C(J) - J) \cup \{0^*\}$.

Доказательство этой теоремы мы проведем по нескольким этапам в леммах 14, 15, 16, 17 и 18.

Лемма 14. $N(J) = (N(0^*) - \{0^*\}) \cup J$.

Доказательство. Сперва мы покажем, что $N(J) - J = N(0^*) - \{0^*\}$. В самом деле, если $x \in N(J) - J$, то $x^n \in J$ для некоторого натурального числа n и $x \notin J$, т. е. в $S|J$ есть $x^n = 0^*$ и $x \neq 0^*$. Из этого $x \in N(0^*) - \{0^*\}$. Если

$x \in N(0^*) - \{0^*\}$, то в S/J — $x^n = 0^*$ для некоторого натурального числа n, $x \neq 0^*$, т. е. в S будет $x^n \in J$, $x \notin J$, значит $x \in N(J) - J$.

Так как $N(J) = (N(J) - J) \cup J$, то мы получаем $N(J) = (N(J) - J) \cup J = (N(0^*) - \{0^*\}) \cup J$.

Лемма 15. $R^*(J) = (R^*(0^*) - \{0^*\}) \cup J$.

Доказательство. Сначала мы докажем следующие два утверждения:

а) Если I — нильидеал в S относительно J, то $I' = (I - J) \cup \{0^*\}$ — нильидеал в S/J относительно $\{0^*\}$.

б) Если I' — нильидеал в S/J относительно $\{0^*\}$, то $I = (I' - \{0^*\}) \cup J$ — нильидеал в S относительно J.

Итак, пусть I — нильидеал в S относительно J. Тогда I' является идеалом в S/J, и поскольку для всякого $x \in I - J = I' - \{0^*\}$ в S будет $x^n \in J$ для некоторого натурального числа n, то в S/J есть $x^n = 0^*$, а I' есть нильидеал в S/J относительно $\{0^*\}$.

Пусть теперь будет I' нильидеалом в S/J относительно $\{0^*\}$. Тогда I является идеалом в S, и так как в S/J для всякого $x \in I' - \{0^*\} = I - J$, будет $x^n = 0^*$ для некоторого натурального числа n, то в S есть $x^n \in J$, а I является нильидеалом в S относительно J.

Определяя радикал Клифорда $R^*(J)$, нам, очевидно, достаточно ограничиться объединением нильидеалов относительно J, содержащих J, так как J является также нильидеалом относительно J. Если $I_\kappa = (I'_\kappa - \{0^*\}) \cup J$, $\kappa \in K$ — все нильидеалы в S относительно J, содержащие J, то I'_κ, $\kappa \in K$ — все нильидеалы в S/J относительно $\{0^*\}$. Поэтому $R^*(J) = \cup_{\kappa\in K} I_\kappa = \cup_{\kappa\in K}((I'_\kappa - \{0^*\}) \cup J) = (\cup_{\kappa\in K} I'_\kappa - \{0^*\}) \cup J = (R^*(0^*) - \{0^*\}) \cup J$ и лемма доказана.

Лемма 16. $R(J) = (R(0^*) - \{0^*\}) \cup J$.

Доказательство. Сперва мы докажем два утверждения:

а) Если I — нильпотентный идеал в S относительно J, то $I' = (I - J) \cup \{0^*\}$ является нильпотентным идеалом в S/J относительно $\{0^*\}$.

б) Если I' — нильпотентный идеал в S/J относительно $\{0^*\}$, то $I = (I' - \{0^*\}) \cup J$ является нильпотентным идеалом в S относительно J.

Если I — нильпотентный идеал в S относительно J, то в S будет $I^n \subseteq J$, для некоторого натурального числа n, стало быть, также $(I - J)^n \subseteq J$. Поэтому в S/J имеем $(I - J)^n = (I' - \{0^*\})^n \subseteq \{0^*\}$, значит, $(I')^n = \{0^*\}$ а I' есть нильпотентный идеал в S/J относительно $\{0^*\}$.

Если I' — нильпотентный идеал в S/J относительно $\{0^*\}$, то в S/J будет $(I')^n = \{0^*\}$ для некоторого натурального числа n, стало быть, также $(I' - \{0^*\})^n \subseteq \{0^*\}$. Оттуда в S — $(I' - \{0^*\})^n = (I - J)^n \subseteq J$, но тогда $I^n = ((I' - \{0^*\}) \cup J)^n \subseteq J$. А это означает, что I является нильпотентным идеалом в S относительно J.

В дальнейшем доказательство проводится аналогично доказательству для радикалов Клифорда.

Лемма 17. $M(J) = (M(0^*) - \{0^*\}) \cup J$.

Доказательство. Прежде всего, определяя радикал Маккойа $M(J)$ в полугруппе S относительно идеала J достаточно рассматривать простые идеалы P, содержащие J. Сначала мы покажем, что справедливо следующее утверждение:

Идеал P, содержащий идеал J, является простым идеалом тогда и только тогда, когда для всяких двух идеалов A и B из S, содержащих идеал J, имеет место, что из $AB \subseteq P$ вытекает либо $A \subseteq P$, либо $B \subseteq P$. (Значит, достаточно ограничиться идеалами A и B, содержащими J.)

Очевидно, если $P \supseteq J$ — простой идеал, то для всяких двух идеалов A и B из S, содержащих J, имеет место: из $AB \subseteq P$ вытекает либо $A \subseteq P$, либо $B \subseteq P$.

Пусть теперь, наоборот, для идеала $P \supseteq J$ справедливо, что для вяских двух идеалов A и B, содержащих J, мы получим, что из $AB \subseteq P$ вытекает либо $A \subseteq P$, либо $B \subseteq P$. Пусть $\bar{A}$ и $\bar{B}$ — два произвольных идеала из S, и пусть $\bar{A}\bar{B} \subseteq P$, но $\bar{A} \nsubseteq P$, $\bar{B} \nsubseteq P$. Тогда для идеалов $\bar{A} \cup J$ и $\bar{B} \cup J$ (содержащих J) также будет иметь место $(\bar{A} \cup J)(\bar{B} \cup J) \subseteq \bar{A}\bar{B} \cup J \subseteq P$, но $\bar{A} \cup J \nsubseteq P$, $\bar{B} \cup J \nsubseteq P$, что противоречит условию. Тем самым наше утверждение доказано.

Далее мы докажем таких два утверждения:

а) Если $P \supseteq J$ — простой идеал в S, то $P' = (P - J) \cup \{0^*\}$ является простым идеалом в S/J.

б) Если P' — простой идеал в S/J, то $P = (P' - \{0^*\}) \cup J$ является простым идеалом в S.

Пусть $P \supseteq J$ будет простым идеалом в S. Пусть $A'B' \subseteq P'$, причем A' и B' являются идеалами в S/J. Тогда $A = (A' - \{0^*\}) \cup J$ и $B = (B' - \{0^*\}) \cup J$ представляют собой идеалы в S и так как $A'B' \subseteq P'$ в S/J, то в S/J будет $(A' - \{0^*\})(B' - \{0^*\}) \subseteq P'$ и поэтому в S будет $(A - J)(B - J) \subseteq P$ и $AB = ((A - J) \cup J)((B - J) \cup J) \subseteq P \cup J = P$. Следовательно, $AB \subseteq P$, и поскольку P является простым идеалом, то либо $A \subseteq P$, либо $B \subseteq P$. Поэтому, либо $A - J \subseteq P - J$, либо $B - J \subseteq P - J$ в S, т. е., либо $A' - \{0^*\} \subseteq P' - \{0^*\}$, либо $B' - \{0^*\} \subseteq P' - \{0^*\}$ в S/J, т. е., либо $A' \subseteq P'$, либо $B' \subseteq P'$. Значит P' есть простой идеал в S/J.

Пусть теперь P' является простым идеалом в S/J. Пусть $AB \subseteq P$, причем A и B — идеалы в S. Тогда $A' = (A - J) \cup \{0^*\}$ и $B' = (B - J) \cup \{0^*\}$ представляют собой идеалы в S/J, и так как $AB \subseteq P$, то будет $(A - J)(B - J) \subseteq P$ в S, значит $(A' - \{0^*\})(B' - \{0^*\}) \subseteq P'$ в S/J, откуда — $A'B' = ((A' - \{0^*\}) \cup \{0^*\})((B' - \{0^*\}) \cup \{0^*\}) \subseteq P'$ в S/J. Значит, $A'B' \subseteq P'$, и так как P' — простой идеал, то либо $A' \subseteq P'$, либо $B' \subseteq P'$. Поэтому либо $(A' - \{0^*\}) \subseteq P'$, либо $(B' - \{0^*\}) \subseteq P'$ в S/J, т. е., либо $(A - J) \subseteq P$, либо $(B - J) \subseteq P$ в S, значит, либо $A \subseteq P$, либо $B \subseteq P$. Поэтому P также является простым идеалом.

Пусть $P_\kappa = (P'_\kappa - \{0^*\}) \cup J$, $\kappa \in K$ — все простые идеалы в S, содержащие идеал J. Тогда P'_κ, $\kappa \in K$ суть все простые идеалы в S/J. Следовательно, $M(J) = \cap_{\kappa \in K} P_\kappa = \cap_{\kappa \in K}((P'_\kappa - \{0^*\}) \cup J) = ((\cap_{\kappa \in K} P'_\kappa) - \{0^*\}) \cup J = M((0^*) - \{0^*\}) \cup J$, и лемма доказана.

Лемма 18. $C(J) = (C(0^*) - \{0^*\}) \cup J$.

Доказательство. Определяя вполне простой радикал $C(J)$, достаточно рассматривать вполне простые идеалы P, содержащие идеал J.

Докажем сначала следующие два утверждения:

а) Если $P \supseteq J$ — вполне простой идеал в S, то $P' = (P - J) \cup \{0^*\}$ — вполне простой идеал в S/J.

б) Если P' — вполне простой идеал в S/J, то $P = (P' - \{0^*\}) \cup J$ — вполне простой идеал в S.

Пусть $P \supseteq J$ — вполне простой идеал в S. Пусть $a'b' \in P'$ в S/J. Пусть a — произвольный прообраз элемента a' при естественном гомоморфизме φ полугруппы S на фактор-полугруппу S/J, и b — произвольный прообраз элемента b' при этом гомоморфизме. Тогда $\varphi(ab) = \varphi(a) . \varphi(b) = a'b' \in P'$, и так как $\varphi^{-1}(P') = P$, то $ab \in P$. Ввиду того, что P — вполне простой идеал, то либо $a \in P$, либо $b \in P$, но, поскольку $\varphi(P) = P'$, то либо $a' = \varphi(a) \in P'$, либо $b' = \varphi(b) \in P'$, и P' есть вполне простой идеал в S/J.

Пусть P' — вполне простой идеал. Пусть $ab \in P$ в S. Тогда $a'b' = \varphi(a) . \varphi(b) = \varphi(ab) \in P'$. Так как P' — вполне простой идеал, то либо $a' = \varphi(a) \in P'$, либо $b' = \varphi(b) \in P'$, т. е. либо $a \in P$, либо $b \in P$. Следовательно, P является вполне простым идеалом.

Далее доказательство ведется аналогично доказательству для радикалов Маккойа.

8. Множества нильпотентных элементов и радикалы относительно идеалов коммутативной полугруппы S

Прежде всего мы обнаружим, что во всякой, и некоммутативной полугруппе S имеет место

Лемма 19. $R(J) \subseteq M(J) \subseteq R^*(J) \subseteq N(J) \subseteq C(J)$.

Доказательство. Если мы образуем фактор-полугруппу Риса S/J и нуль в S/J обозначим через 0^*, то $R(J) = (R(0^*) - \{0^*\}) \cup J$, $M(J) = (M(0^*) - \{0^*\}) \cup J$, $R^*(J) = (R^*(0^*) - \{0^*\}) \cup J$ и $C(J) = (C(0^*) - \{0^*\}) \cup J$. Здесь $R(0^*)$, $M(0^*)$, $R^*(0^*)$ и $C(0^*)$ являются соответствующими радикалами полугруппы S/J относительно идеала полугруппы S/J, имеющего единственный

элемент 0^*. Лух Цзян (Luh Jiang) в работе [2] доказал, что $R(0^*) \subseteq M(0^*) \subseteq R^*(0^*) \subseteq C(0^*)$ (во всякой полугруппе с нулем 0^*). Поэтому справедливо также $R(J) \subseteq M(J) \subseteq R^*(J) \subseteq C(J)$.

Из определения 1 и 4 очевидно, что $R^*(J) \subseteq N(J)$. Требуется еще доказать, что $N(J) \subseteq C(J)$. Если $x \in N(J)$, то существует натуральное число n такое, что $x^n \in J$. Далее, всякая сильная подполугруппа, содержащая x, содержит также все положительные натуральные степени элемента x, следовательно, она содержит также x^n. Следовательно, пересечение всякой сильной подполугруппы, содержащей x, с J непусто и $x \in C(J)$.

Применив лемму 19 и пример раздела 4 мы докажем, что в некоммутативной полугруппе не обязательно $M(J_1) \cup M(J_2) = M(J_1 \cup J_2)$. Если взять полугруппу S и идеалы J_1 и J_2 из приведенного выше примера (см. раздел 4), то согласно лемме 19 $c \in R(J_1 \cup J_2) \Rightarrow c \in M(J_1 \cup J_2)$, $c \notin R^*(J_1) \Rightarrow c \notin M(J_1)$, $c \notin R^*(J_2) \Rightarrow c \notin M(J_2)$ и поэтому $c \notin M(J_1) \cup M(J_2)$. Это означает, что $M(J_1) \cup M(J_2)$ является собственным подмножеством множества $M(J_1 \cup J_2)$, что и требовалось доказать.

Для коммутативной полугруппы справедлива

Теорема 7. *Пусть S — коммутативная полугруппа и пусть J — ее идеал. Тогда $R(J) = M(J) = R^*(J) = N(J) = C(J)$.*

Доказательство. Образуем фактор-полугруппу Риса S/J и ее нуль обозначим, как и в лемме 19, через 0^*. Тогда $R(J) = (R(0^*) - \{0^*\}) \cup J$, $M(J) = (M(0^*) - \{0^*\}) \cup J$, $R^*(J) = (R^*(0^*) - \{0^*\}) \cup J$, $N(J) = (N(0^*) - \{0^*\}) \cup J$, и $C(J) = (C(0^*) - \{0^*\}) \cup J$. Из этих соотношений, из леммы 19 и того, что в коммутативной полугруппе с нулем 0^* имеет место $R(0^*) = M(0^*) = R^*(0^*) = C(0^*)$ (см. Лух Цзян [2]), вытекает справедливость теоремы 7.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bosák J., *О радикалах полугрупп*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV *12* (1962), 230—234.

[2] Jiang Luh, *On the Concepts of Radical of Semigroup Having Kernel*, Portugaliae Mathematica *19* (1960), 189—198.

[3] McCoy N. H. *Prime ideals in general rings*, Amer. J. Math. *71* (1949), 823—833.

Поступило 1. X. 1962 г.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Elektrotechnickej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

ON NILPOTENT ELEMENTS, IDEALS AND RADICALS OF A SEMIGROUP

Robert Šulka

Summary

Let S be a semigroup and J a two-sided ideal of S. An element $x \in S$ is called nilpotent with respect to the ideal J if there exists an integer $n > 0$ such that $x^n \in J$. The set of all nilpotent elements with respect to J will be denoted by $N(J)$. An ideal I every element of which is nilpotent with respect to J will be called a nilideal with respect to J. The union of all nilideals with respect to J will be denoted by $R^*(J)$ and called the Clifford radical with respect to J.

An ideal I of S is called nilpotent with respect to J if $I^n \subseteq J$ for some integer $n > 0$. The union of all nilpotent ideals with respect to J will be denoted by $R(J)$ and called the Schwarz radical with respect to J.

An ideal P of the semigroup S is called a prime ideal if for any two ideals A, B of S $AB \subseteq P$ implies $A \subseteq P$ or $B \subseteq P$. The intersection of all prime ideals containing the ideal J will be denoted by $M(J)$ and called the McCoy radical with respect to J.

An ideal P of the semigroup S is called a completely prime ideal if for every couple of elements $a, b \in S$ $ab \in P$ implies $a \in P$ or $b \in P$. The intersection of all completely prime ideals containing the ideal J will be denoted $C(J)$ and called the completely prime radical with respect to J.

The following results are proved:

1. The mapping $J \to N(J)$ is a $\cap, \cup$-homomorphism of the lattice of all ideals of S into the lattice of all subsets of the semigroup S.
2. The mappings $J \to R^*(J)$, $J \to R(J)$ and $J \to M(J)$ are $\cap$-endomorphisms of the lattice of all ideals of the semigroup S.
3. The mapping $J \to C(J)$ is a $\cap,\cup$-endomorphism of the lattice of all ideals of the semigroup S.
4. In every semigroup $R(J) \subseteq M(J) \subseteq R^*(J) \subseteq N(J) \subseteq C(J)$.
5. In every comutative semigroup $R(J) = M(J) = R^*(J) = N(J) = C(J)$.