POZNÁMKA O FAKTOROVÝCH POLOGRUPÁCH DANEJ POLOGRUPY

ROBERT ŠULKA, Bratislava

L. N. Ševrin sa v niekoľkých svojich prácach [1, 2] a [3] zaoberal nilpologrupami, nilpotentnými a lokálne nilpotentnými pologrupami.

Pod nilpologrupou S budeme rozumieť takú pologrupu S s nulou 0, že ku každému prvku $x \in S$ existuje prirodzené číslo n, pre ktoré $x^n = 0$.

Pologrupu S s nulou 0, ktorá má tú vlastnosť, že pre nejaké prirodzené číslo n je $S^n = 0$, budeme nazývať nilpotentnou pologrupou.

Nech ďalej S je pologrupa s nulou 0, ktorej každá čiastočná pologrupa, vytvorená konečným počtom tvoriacich prvkov, je nilpotentná. Takúto pologrupu budeme nazývať (ako Ševrin) lokálne nilpotentnou pologrupou.

V tejto práci budeme vyšetrovať rôzne vytvárajúce rozklady $\mathscr{C}$ pologrupy S, k nim patriace faktorové pologrupy $\bar{S}$ a vzťahy medzi nimi, keď niektoré z týchto faktorových pologrúp sú nil-(lokálne nilpotentné) [nilpotentné] pologrupy. Špeciálne $S^* = S - J$ bude značiť Reesovu faktorovú pologrupu, ktorej jednou triedou je ideál J a ostatné triedy sú jednoprvkové množiny.

L. N. Ševrin vo svojej práci [2] dokázal, že homomorfným obrazom nil-(lokálne nilpotentnej) [nilpotentnej] pologrupy je nil-(lokálne nilpotentná) [nilpotentná] pologrupa.

Z tohto tvrdenia vyplýva zrejme;

Lemma 1. *Ak S je nil-(lokálne nilpotentná) [nilpotentná] pologrupa, je takouto pologrupou aj faktorová pologrupa $\bar{S}$ (teda špeciálne aj $S^* = S - J$).*

Ľahko sa dokáže (na základe homomorfizmu) tiež táto

Lemma 2. *Nech Reesova faktorová pologrupa $S^* = S - J$ pologrupy S je nil-(lokálne nilpotentná) [nilpotentná] pologrupa. $\mathscr{C}(J)$ nech je jeden (ľubovoľne zvolený) vytvárajúci rozklad na S, ktorého jednou triedou je ideál J. Nech $\bar{S}(J)$ je faktorová pologrupa, patriaca k rozkladu $\mathscr{C}(J)$. Potom $\bar{S}(J)$ je tiež nil-(lokálne nilpotentnou) [nilpotentnou] pologrupou.*

Pretože počítanie s triedami faktorovej pologrupy sa dá previesť na počítanie s reprezentantmi týchto tried, platí

Lemma 3. *Nech faktorová pologrupa $\bar{S}(J)$ pologrupy S je nil-(lokálne nilpotentná)*

[nilpotentná] pologrupa. Potom tiež Reesova faktorová pologrupa $S^* = S - J$ je nil-(lokálne nilpotentnou) [nilpotentnou] pologrupou.

Z lemmy 2. a 3. dostaneme priamo túto vetu:

Veta 1. *Nech $\{\mathscr{C}_\kappa(J) \mid \kappa \in K\}$ je množina všetkých vytvárajúcich rozkladov pologrupy S, ktoré majú za jednu triedu ideál J a $\{\bar{S}_\kappa(J) \mid \kappa \in K\}$ nech je množina k týmto rozkladom patriacich faktorových pologrúp. Potom ak jedna z týchto faktorových pologrúp je nil-(lokálne nilpotentnou) [nilpotentnou] pologrupou, sú všetky.*

Z vety 1. vyplýva

Veta 2. *$\{\mathscr{C}_\kappa(J) \mid \kappa \in K\}$ je podsväzom sväzu všetkých vytvárajúcich rozkladov na S.*

Ďalej zrejme (na základe homomorfizmu) platí

Lemma 4. *Nech faktorová pologrupa $\bar{S}_2$ je zákrytom faktorovej pologrupy $\bar{S}_1$, ktorá je nil-(lokálne nilpotentnou) [nilpotentnou] pologrupou. Potom $\bar{S}_2$ je tiež nil-(lokálne nilpotentnou) [nilpotentnou] pologrupou.*

Odtiaľ vyplýva

Lemma 5. *Najmenší spoločný zákryt $\bar{S}$ ľubovolného počtu faktorových pologrúp pologrupy S, ktoré sú nil-(lokálne nilpotentnými) [nilpotentnými] pologrupami, je nil-(lokálne nilpotentnou) [nilpotentnou] pologrupou.*

Ľahko sa tiež dokáže

Lemma 6. *Nech J_1 a J_2 sú dva ideály pologrupy S a faktorové pologrupy $S_1^* = S - J_1$ a $S_2^* = S - J_2$ nech sú nil-(lokálne nilpotentné) [nilpotentné] pologrupy. Potom faktorová pologrupa $S_{12}^* = S - (J_1 \cap J_2)$ je tiež nil-(lokálne nilpotentnou) [nilpotentnou] pologrupou.*

Dôsledok. *Majme konečný počet ideálov $J_i (i = 1, \ldots, n)$ pologrupy S. Faktorové pologrupy $S_i^* = S - J_i (i = 1, \ldots, n)$ nech sú nil-(lokálne nilpotentné) [nilpotentné] pologrupy. Potom faktorová pologrupa $S - (\bigcap_{i=1}^{n} J_i)$ je tiež nil-(lokálne nilpotentnou) [nilpotentnou] pologrupou.*

Odtiaľ vyplýva

Veta 3. *Nech J_i $(i = 1, \ldots, n)$ je konečný počet ideálov pologrupy S s nulou 0. Nech faktorové pologrupy $S_i^* = S - J_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ sú nil-(lokálne nilpotentné) [nilpotentné] pologrupy a $\bigcap_{i=1}^{n} J_i = \{0\}$. Potom S je tiež nil-(lokálne nilpotentnou) [nilpotentnou] pologrupou.*

Nasledujúci príklad ukazuje, že veta 3 neplatí pre nekonečný počet ideálov.

Príklad. Interval $S = \langle 0, 2/3 \rangle$ s obyčajným násobením ako operáciou je pologrupou. Prenik ideálov $J_n = \langle 0, 1/n \rangle$, $n = 2, 3, \ldots$ je $\{0\}$. Každá z faktorových pologrúp $S_n^* = S - J_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ je nilpotentnou pologrupou. No S zrejme nie je nilpotentná.

Lemma 7. *Najväčšie spoločné zjemnenie konečného počtu faktorových pologrúp pologrupy S, ktoré sú nil-(lokálne nilpotentnými) [nilpotentnými] pologrupami, je nil-(lokálne nilpotentná) [nilpotentná] pologrupa.*

Dôkaz. Nech $\bar{S}_i (i = 1, \ldots, n)$ je konečný počet faktorových pologrúp pologrupy S, ktoré sú nil-(lokálne nilpotentnými) [nilpotentnými] pologrupami a $\bar{S}$ nech je ich najväčšie spoločné zjemnenie. J_i $(i = 1, \ldots, n)$ nech sú tie ideály z S, ktoré sú triedami príslušných vytvárajúcich rozkladov $\mathscr{C}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, patriacich ku faktorovým pologrupám $\bar{S}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Keď označíme $S_i^* = S - J_i$, vyplýva z lemmy 3., že S_i^* sú nil-(lokálne nilpotentné) [nilpotentné] pologrupy. Ďalej je zrejme $J = \bigcap_{i=1}^{n} J_i$ tým ideálom z S, ktorý je triedou vytvárajúceho rozkladu $\mathscr{C}$, patriaceho ku faktorovej pologrupe $\bar{S}$. Potom však z dôsledku lemmy 6. vyplýva, že faktorová pologrupa $S^* = S - J = S - (\bigcap_{i=1}^{n} J_i)$ je tiež nil-(lokálne nilpotentnou) [nilpotentnou] pologrupou. Z lemmy 2. potom ďalej vyplýva, že aj faktorová pologrupa $\bar{S}$ je nil-(lokálne nilpotentnou) [nilpotentnou] pologrupou.

Na základe doteraz dokázaného platí

Veta 4. *Všetky vytvárajúce rozklady $\mathscr{C}_\lambda$, $\lambda \in L$ danej pologrupy S, ku ktorým patriace faktorové pologrupy $\bar{S}_\lambda$, $\lambda \in L$ sú nil-(lokálne nilpotentné) [nilpotentné] pologrupy, tvoria svaz $\mathfrak{S}_1(\mathfrak{S}_2)$ $[\mathfrak{S}_3]$, ktorý je podsväzom sväzu $\mathfrak{S}$ všetkých vytvárajúcich rozkladov pologrupy S.*

Zrejmá je aj

Veta 5. *$\mathfrak{S}_1(\mathfrak{S}_2)[\mathfrak{S}_3]$ obsahuje jednotkový prvok svazu $\mathfrak{S}$ (ktorým je maximálny rozklad pologrupy S) a obsahuje nulový prvok sväzu $\mathfrak{S}$ (ktorým je minimálny rozklad pologrupy S) práve vtedy, keď S je nil-(lokálne nilpotentnou) [nilpotentnou] pologrupou.*

LITERATÚRA

[1] Шеврин Л. Н., *О полугруппах, все подполугруппы которых нильпотентны.* Сибирский математический журнал 2 (1961), 936—942.

[2] Шеврин Л. Н., *К общей теории полугрупп.* Математический сборник 59 (95), (1961), 367—386.

[3] Шеврин, Л. Н., *Нильполугруппы с некоторыми условиями конечности.* Математический сборник 55 (97), (1961), 473—480.

[4] Borůvka O., *Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie*, Berlin, 1960.

Došlo 28. 9. 1962.

*Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Elektrotechnickej fakulty Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave*

ЗАМЕТКА О ФАКТОРПОЛУГРУППАХ ЗАДАННОЙ ПОЛУГРУППЫ

Роберт Шулка

Резюме

Статья занимается правильными разбиениями заданной полугруппы, к которым принадлежащие факторполугруппы являются ниль-(локально нильпотентными) [нильпотентными] полугруппами. Они образуют структуру.

A NOTE ON FACTOR-SEMIGROUPS OF A SEMIGROUP

Robert Šulka

Summary

The paper deals with such determining decompositions (congruence relations) of a semigroup that the factor-semigroups which belong to these decompositions are nil-(locally nilpotent) [nilpotent] semigroups. They form a lattice.