MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 13, 3, 1963

# О ПЛОТНОСТИ НЕКОТОРЫХ ВНЕШНИХ МЕР В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

БЕЛОСЛАВ РИЕЧАН (Beloslav Riečan), Братислава

Пусть $X$ — $n$-мерное эвклидово пространство, $\mu$ — мера Лебега. Обозначим через $c(x, r)$ замкнутый шар с центром $x$ радиуса $r$. Пусть $M$ — произвольное $\mu$-измеримое множество. Известно, что функция

$$d(x) = \lim_{r \to 0} \frac{\mu(c(x, r) \cap M)}{\mu(c(x, r))}$$

равна $\mu$-почти всюду характеристической функции $\chi_M$ множества $M$.

Э. Й. Микл (E. J. Mickle) и Т. Радо (T. Rado) в работе [3] дали обзор по подобным теоремам о плотности для некоторых внешних мер в сепарабельном метрическом пространстве.

В настоящей работе мы докажем методами, аналогичными методам, использованным в [3], некоторые теоремы о плотности в топологических, не обязательно метрических пространствах. Эти теоремы сформулированы в разделах 13 и 14. Обозначения и названия, необходимые для их формулировки, находятся в 2,1, 9,1, 10,2 и 12,1. Все теоремы вытекают почти непосредственно из теоремы 12,2, а эта теорема из весьма общей теоремы 6.

1. Пусть $X$ — абстрактное пространство, $\mathbf{X}$ — система всех подмножеств $X$, $\mathbf{K} \subset \mathbf{X}$, $f$ — отображение, определенное на $\mathbf{K}$ со значениями в $\mathbf{X}$. Мы будем предполагать, что $\mathbf{K}$ и $f$ удовлетворяют следующим предположениям:

a) $\cup \{f(E) : E \in K\} = X$.

b) К произвольному элементу $x \in X$ и к произвольным множествам $E, F \in \mathbf{K}$ таким, что $x \in f(E) \cap f(F)$, существует множество $G \in \mathbf{K}$ такое, что $x \in f(G)$ и $G \subset E \cap F$.

c) $f(E) \subset E$ для всех $E \in \mathbf{K}$.

1,1. Пример. Пусть $X$ — локально компактное хаусдорфово пространство, $\mathbf{K}$ — система всех компактных подмножеств $X$ с непустым открытым ядром. Для $E \in \mathbf{K}$ положим $f(E)$ = открытое ядро множества $E$ (т. е. множество всех внутренних точек $E$).

1,2. Пример. Пусть $X$ метрическое пространство, $\mathbf{K}$ система замкнутых шаров. Для $E \in \mathbf{K}$ положим $f(E)$ равным множеству центров шара $E$.[1]

До раздела 8 мы будем предполагать, что $X$ — абстрактное пространство и $\mathbf{K}$, $f$ имеют только что определенное значение.

2. Пусть $\varphi$ действительная функция, определенная на системе $\mathbf{L}$, $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$. Мы будем говорить, что число $C$ является предельной точкой множества $\{\varphi(E) : E \subset \mathbf{L}\}$, если к произвольному $\varepsilon > 0$ и множеству $E \in \mathbf{L}$ существует множество $F \in \mathbf{L}$ такое, что $F \subset E$ и $\varphi(E) \in (C - \varepsilon, C + \varepsilon)$. Через $\limsup$ $\{\varphi(E) : E \in \mathbf{L}\}$ и $\liminf$ $\{\varphi(E) : E \in \mathbf{L}\}$ обозначим соответственно верхнюю и нижнюю грань множества предельных точек $\{\varphi(E) : E \in \mathbf{L}\}$. В случае $\liminf$ $\{\varphi(E) : E \in \mathbf{L}\} = \limsup \{\varphi(E) : E \in \mathbf{L}\}$ мы будем говорить, что множество $\{\varphi(E) : E \in \mathbf{L}\}$ имеет предел и обозначим его через $\lim \{\varphi(E) : E \in L\}$.

2,1. Пусть $x$ — произвольный элемент $X$, $M \subset X$ — произвольное множество, $\mu$ положительная и конечная функция на $\mathbf{K}$, $\omega$ неотрицательная функция на $\mathbf{X}$. Положим $\mathbf{K}(x) = \{E \in \mathbf{K} : x \in f(E)\}$. Предел

$$d(x) = \lim \left\{ \frac{\omega(E \cap M)}{\mu(E)} : E \in \mathbf{K}(x) \right\}$$

мы будем понимать в только что определенном смысле (с $\mathbf{L} = \mathbf{K}(x)$ и $\varphi(E) = \omega(E \cap M)/\mu(E)$). Аналогичным способом мы определяем $\underline{d(x)} = \liminf\{\ldots\}$ и $\overline{d(x)} = \limsup\{\ldots\}$.

2,2. Примечание. Нетрудно доказать, что функции (1) и (2) тождественны, если системе $\mathbf{K}$ и отображению $f$ придать то же значение, как в примере 1,2.

3. Теорему о плотности в топологическом пространстве мы докажем, грубо говоря, для тех внешних мер, для которых справедлива теорема Витали. Но мы раньше всего докажем теорему о плотности для $B_\mu$-почти всех $x \in X$ (см. теорему 6). Если для $\mu$ справедлива теорема Витали, то из сходимости $B_\mu$-почти всюду вытекает сходимость $\mu$-почти всюду (см. лемму 10,3) и, значит, справедлива соответствующая теорема для $\mu$-почти всех $x \in X$ (см. теорему 11).

3,1. Определение. Пусть $\mu$ — функция множества, определенная на $\mathbf{K}$. Пусть $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$. Положим

$$B_\mu(L) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i),$$

где верхняя грань берется через все последовательности $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ взаимно непересекающихся множеств из $\mathbf{L}$.

[1] Под центром шара $E$ мы понимаем всякий элемент $x \in E$, для которого существует число $r > 0$ такое, что $E = C(x, r)$.



Пусть $\emptyset \neq E \subset X$. Обозначим знаком $\mathscr{K}(E)$ множество всех систем $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$, обладающих следующим свойством: Для произвольного элемента $x \in E$ и произвольного множества $F \in \mathbf{K}$ такого, что $x \in f(F)$, существует $G \in \mathbf{L}$ такое, что $G \subset F$ и $x \in f(G)$.

Положим, наконец, $B_\mu(\emptyset) = 0$ и для непустого $E$

$$B_\mu(E) = \inf \{B_\mu(\mathbf{L}) : \mathbf{L} \in \mathscr{K}(E)\}.$$

3,2. Лемма. *Если $\mu$ неотрицательная на $\mathbf{K}$, то функция множества $B_\mu$ является внешней мерой.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать неравенство

$$B_\mu(E) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} B_\mu(E_i) \tag{3}$$

для всех $E$, $E_i$ таких, что $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. В силу определения $B_\mu$ существуют системы $\mathbf{L}_i \in \mathscr{K}(E_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ такие, что

$$B_\mu(E_i) + \varepsilon 2^{-i} > B_\mu(\mathbf{L}_i). \tag{4}$$

Положим $\mathbf{L} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbf{L}_i$. Очевидно, $\mathbf{L} \in \mathscr{K}(E)$, значит,

$$B_\mu(E) \leqq B_\mu(\mathbf{L}). \tag{5}$$

Для системы $\mathbf{L}$ существует согласно определению последовательность множеств $\{F_j\}_{j=1}^{\infty}$, $F_i \cap F_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, $F_j \in \mathbf{L}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ такая, что

$$B_\mu(\mathbf{L}) - \varepsilon < \sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j). \tag{6}$$

Обозначим $\alpha_i = \{j : F_j \in \mathbf{L}_i\}$. Очевидно $\bigcup_{i=1}^{\infty} \alpha_i \supset \{1, 2, \ldots\}$.

Из определений $\alpha_i$ и $B_\mu(\mathbf{L}_i)$ вытекает

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(F_j) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j \in \alpha_i} \mu(F_j) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} B_\mu(\mathbf{L}_i). \tag{7}$$

Из соотношений (4)—(7) вытекает

$$B_\mu(E) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{\infty} B_\mu(E_i) + \varepsilon$$

для всякого $\varepsilon > 0$. Из последнего вытекает (3).

4. Определение. Знаком $\mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbf{K})$ мы обозначим систему функций множества $\mu$ с областью определения $\mathbf{X}$, обладающих следующим свойством:

Пусть $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность взаимно непересекающихся множеств из $\mathbf{K}$, $M$ — произвольное множество. Тогда справедливо неравенство

$$\mu(M) \geqq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(M \cap E_i).$$

4,1. Примечание. В разделе 9 мы приведем два примера функций из $\mathscr{B}$.

5. Определение. Пусть $\mathbf{N} \subset \mathbf{X}$, $\omega$ — функция множества, определенная на $\mathbf{X}$. Мы будем говорить, что множество $M \subset X$ внешне (внутренне) $(\mathbf{N}, \omega)$-регулярно, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $E \in \mathbf{N}$ такое, что $E \supset M$ и $\omega(E - M) < \varepsilon$ $(E \subset M, \omega(M - E) < \varepsilon)$.

6. Теорема. *Пусть $\mathbf{K} \subset \mathbf{X}$, $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$, $f$ — отображение из $\mathbf{K}$ в $\mathbf{X}$, причем $\mathbf{K}$, $f$ удовлетворяют предположениям 1. Пусть для произвольного множества $E \in \mathbf{M}$ и элемента $x \notin E$ существует множество $F \in \mathbf{K}$ такое, что $E \cap F = \emptyset$ и $x \in f(F)$. Пусть $\mu$ положительна и конечна на $\mathbf{K}$ и $\omega \in \mathscr{B}(\mathbf{K})$. Пусть $M$ — произвольное внутренне $(\mathbf{M}, \omega)$-регулярное множество.*

*Тогда для $B_\mu$-почти всех $x \notin M$ справедливо*

$$\lim \left\{ \frac{\omega(E \cap M)}{\mu(E)} : E \in \mathbf{K}(x) \right\} = 0.$$

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 6, мы докажем следующую лемму.

7. Лемма. *Пусть $X$, $\mathbf{K}$, $f$ имеют то же значение, что и в теореме 6. Пусть $\mu$ — функция множества, положительная и конечная на $\mathbf{K}$, $\omega \in \mathscr{B}(\mathbf{K})$. Для произвольного $t \in (0, \infty)$ и $M \subset X$ положим*

$$G_t = \left\{ x : \left[ \limsup \left\{ \frac{\omega(E \cap M)}{\mu(E)} : E \in \mathbf{K}(x) \right\} \right] > t \right\}.$$

*Тогда*

$$B_\mu(G_t) \leqq \frac{\omega(M)}{t}.$$

Доказательство. Обозначим знаком $\mathbf{N}$ систему тех $F \in \mathbf{K}$, для которых $\omega(F \cap M)/\mu(F) > t$. Пусть $x \in G_t$, $F \in \mathbf{K}$, $x \in f(F)$ (мы следуем определению 3,1). Из свойств lim sup вытекает существование множества $G \in \mathbf{K}(x)$ такого, что $\mu(G \cap M)/\mu(G) > t$, $G \subset F$. Очевидно, $G \in \mathbf{N}$, $x \in f(G)$. Значит, $\mathbf{N} \in \mathscr{K}(G_t)$.

Из последнего вытекает неравенство

$$B_\mu(G_t) \leqq B_\mu(\mathbf{N}). \tag{10}$$



Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. По определению $B_\mu(\mathbf{N})$ существует последовательность $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ взаимно непересекающихся множеств из $\mathbf{N}$ такая, что

$$B_\mu(\mathbf{N}) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i).$$

Так как $E_i \in \mathbf{N}$, то справедливо $\omega(E_i \cap M)/\mu(E_i) > t$ $(i = 1, 2, \ldots)$ значит,

$$B_\mu(\mathbf{N}) - \varepsilon < \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) \leqq \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{\infty} \omega(E_i \cap M) \leqq \frac{1}{t}\,\omega(M).$$

Так как последнее неравенство справедливо для всякого $\varepsilon > 0$, то

$$B_\mu(\mathbf{N}) \leqq \frac{1}{t}\,\omega(M). \tag{11}$$

Из (10) и (11) вытекает (9).

8. Доказательство теоремы 6. Обозначим через $H_t$ множество тех $x \in X - M$, для которых $\limsup \{\omega(E \cap M)/\mu(E) : E \in \mathbf{K}(x)\} > t$. Очевидно, достаточно доказать, что $B_\mu(H_t) = 0$ для всех $t \in (0, \infty)$. Выберем произвольное $t$. Так как $M$ — внутренне $(\mathbf{M}, \omega)$-регулярное множество, то к произвольному $\varepsilon > 0$ существует множество $E \in \mathbf{M}$ такое, что $\omega(M - E) < \varepsilon$, $E \subset M$.

Положим

$$G_t = \left\{ x : \limsup \left\{ \frac{\omega(F \cap (M - E))}{\mu(F)} : F \in \mathbf{K}(x) \right\} > t \right\}.$$

Согласно лемме 7 справедливо

$$B_\mu(G_t) \leqq \frac{\omega(M - E)}{t} < \frac{\varepsilon}{t}. \tag{12}$$

Возьмем $x \notin M$. Так как $E \subset M$, то $x \notin E$. В силу предположения существует $F \in \mathbf{K}$ такое, что $E \cap F = \emptyset$ и $x \in f(F)$. Это означает, что для $G \in \mathbf{K}(x)$, $G \subset F$ справедливо $G \cap M = G \cap (M - E)$. Из этого вытекает, что

$$\limsup \left\{ \frac{\omega(G \cap (M - E))}{\mu(G)} : G \in \mathbf{K}(x) \right\} = \limsup \left\{ \frac{\omega(G \cap M)}{\mu(G)} : G \in \mathbf{K}(x) \right\}.$$

Значит, $H_t \subset G_t$. Кроме того, $B_\mu(H_t) < \varepsilon/t$ вследствие (12). Отсюда вытекает, что $B_\mu(H_t) = 0$.

9. В дальнейшем будет $X$ топологическим пространством.

**9,1. Определение.** Знаком $\mathscr{C}$ мы обозначим систему всех внешних мер в $X$, обладающих следующим свойством:

Если $U, V$ — произвольные открытые непересевкающиеся множества, и $\bar{A} \subset U, \bar{B} \subset V$,(²) то

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Примечание. Внешние меры, принадлежащие системе $\mathscr{C}$, мы будем называть внешними мерами Каратэодори. Основные свойства таких мер рассмотрены в работах [1] и [5].

Следующую лемму мы приведем без доказательства.

**9,2. Лемма.** *Пусть $X$ — хаусдорфово (соотв. нормальное) пространство. Пусть $\mathbf{K}$ — система компактных (соотв. замкнутых) множеств. Тогда $\mathscr{C} \subset \mathscr{B}(\mathbf{K})$.*

Другой пример функции, принадлежащей системе $\mathscr{B}$, таков:

**9,3. Определение.**(³) Пусть $\mathbf{K} \subset \mathbf{X}$, $\mu$ — функция множества, определенная на $\mathbf{K}$. Для произвольного открытого множества $U$ положим

$$C_\mu(U) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$$

где верхняя грань берется через все последовательности $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ взаимно непересекающихся множеств из $\mathbf{K}$, $E_i \subset U (i = 1, 2, \ldots)$. Для произвольного множества $E \subset X$ положим

$$C_\mu(E) = \inf \{C_\mu(U) : E \subset U,\ U \text{ открытое}\}.$$

**9,4. Лемма.** *Пусть $\mathbf{K}$ — какая-нибудь система компактных подмножеств хаусдорфова пространства $X$. Пусть $\mu$ — неотрицательная функция множества, определенная на $\mathbf{K}$. Тогда $C_\mu \in \mathscr{B} = \mathscr{B}(\mathbf{K})$.*

Примечание. Функция множества $C_\mu$ может и не быть внешней мерой. В работе [6] приведено достаточное условие для того, чтобы $C_\mu$ была внешней мерой в случае, когда $X$ является метрическим пространством.

**10.** Теперь мы докажем теорему о плотности для некоторых топологических пространств. Одновременно мы заменим сходимость $B_\mu$-почти всюду сходимостью $\mu$-почти всюду.

**10,1. Определение.** Пусть $\mathbf{L}$ — система замкнутых подмножеств $X$. Мы скажем, что $\mathbf{L}$ покрывает множество $M \subset X$ в смысле Витали, если для произвольного $x \in M$ и произвольного открытого множества $U$, такого, что $x \in U$, существует $G \in \mathbf{L}$ такое, что $G \subset U$ и $x \in G^\circ$.(⁴)

(²) $\bar{A}$ обозначает замыкание множества $A$.

(³) См. также [3], 4.3 на стр. 20 и 4,10 на стр. 26, [6], теорема 3 на стр. 55.



**10,2. Определение.** Пусть $\mathbf{K}$ — система замкнутых подмножеств $X$. Через $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\mathbf{K})$ мы обозначим систему всех внешних мер удовлетворяющих следующему условию:

Пусть $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$, $M \subset X$, $\mathbf{L}$ покрывает множество $M$ в смысле Витали. Тогда существует последовательность $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ взаимно непересекающихся множеств из $\mathbf{L}$ такая, что $\mu(M - \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i) = 0$.

Примечание. Мы будем говорить, что для внешней меры $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{K})$ справедлива теорема Витали с системой $\mathbf{K}$. В метрических пространствах хорошо известны условия достаточные для того чтобы $\mu \in \mathscr{D}$ (см. напр. [4]).

**10,3. Лемма.** *Пусть $\mathbf{K}$ система замкнутых подмножеств $X$ покрывающая $X$ в смысле Витали. Пусть $f$ — отображение из $\mathbf{K}$ в $\mathbf{X}$, обладающее свойствами 1 и следующим свойством: $\bigcup \{f(F) : F \subset E,\ F \in \mathbf{K}\} = E^\circ$, для всякого $E \in \mathbf{K}$. Пусть $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{K})$.*

*Тогда $B_\mu(M) = 0 \Rightarrow \mu(M) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Возьмем $\mathbf{L} \in \mathscr{K}(M)$ так, чтобы $B_\mu(\mathbf{L}) < \varepsilon$. Мы докажем, что $\mathbf{L}$ покрывает множество $M$ в смысле Витали. Пусть $x \in M$, $x \in U$, $U$ — открытое множество. Возьмем $E \in \mathbf{K}$ так, чтобы $x \in E^\circ$, $E \subset U$. В силу предположения теоремы существует $F \in \mathbf{K}$, $F \subset E$ такое, что $x \in f(F) \subset E^\circ$. По определению 3,1 существует $G \in \mathbf{L} \subset \mathbf{K}$ такое, что $x \in f(G) \subset G^\circ \subset G \subset F \subset E \subset U$. Значит, для произвольного открытого $U$ и произвольного $x \in M \cap U$ существует $G \in \mathbf{L}$ такое, что $x \in G^\circ$, $G \subset U$, т. е. $\mathbf{L}$ покрывает $M$ в смысле Витали.

Так как $\mu \in \mathscr{D}(\mathbf{K})$, то существует последовательность $\{L_i\}_{i=1}^{\infty}$ взаимно непересекающихся множеств из $\mathbf{L}$ такая, что $\mu(M - \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i) = 0$. Отсюда вытекает

$$\mu(M) \leqq \mu(M - \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i) + \mu(M \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} L_i) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(L_i) \leqq B_\mu(\mathbf{L}) < \varepsilon$$

для всякого $\varepsilon > 0$, значит, $\mu(M) = 0$.

**11. Теорема.** *Пусть $X$ — хаусдорфово (соотв. нормальное) пространство. Пусть $\mathbf{K}$ — система компактных (соотв. замкнутых) множеств, покрывающая $X$ в смысле Витали. Пусть $\mu \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}(\mathbf{K})$,(⁵) $\mu$ конечна и положительна*

(⁴) $G^\circ$ является открытым ядром $G$.

(⁵) См. 9,1 и 10,2.

на **K**. *Пусть* **M** — *система всех замкнутых множеств в* $X$. *Пусть* $M$ — *произвольное* (**M**, $\mu$)*-регулярное множество. Для* $E \in$ **K** *положим* $f(E) = E^{\circ}$.

*Тогда*

$$\lim\left\{\frac{\mu(E\cap M)}{\mu(E)} : E \in \mathbf{K}(x)\right\} = 0 \ (^6)$$

*для* $\mu$*-почти всех* $x \in X - M$.

Доказательство. В теореме 6 положим $\omega = \mu$. В силу леммы 9,2 справедливо $\mu \in \mathscr{B}(\mathbf{K})$. Из теоремы 6 вытекает (13) для $B_\mu$-почти всех $x \in X - M$, значит, в силу леммы 10,3 справедливо (13) для $\mu$-почти всех $x \in X - M$.

Примечание. Пусть $X$ — локально компактное хаусдорфово пространство. Тогда система **K** всех компактных множеств удовлетворяет условиям теоремы 11.

12. Попытаемся теперь доказать теорему, аналогичную теореме, приведенной нами в введении.

12,1. Определение. Пусть **M** — система всех замкнутых множеств в $X$, **N** — система всех открытых множеств в $X$. Мы будем говорить, что множество $E \subset X$ регулярно, если оно внутренне (**M**, $\mu$)-регулярно и внешне (**N**, $\mu$)-регулярно.(7)

Примечание. Если $E$ регулярно, то регулярно и множество $X - E$. Если $E$ регулярно в смысле книги [2], а $X$ хаусдорфово пространство, то $E$ регулярно также в смысле определения 12,1.

12,2. Теорема. *Пусть* $X$ — *хаусдорфово (соотв. нормальное) пространство,* **K** — *система компактных (соотв. замкнутых) подмножеств* $X$ *покрывающая* $X$ *в смысле Витали,* $f$ — *отображение из* **K** *в* **X**, *причем* **K**, $f$ *удовлетворяют предположениям* 1. *Пусть, кроме того,* $\bigcup\{f(F) : F \subset E,\ F \in \mathbf{K}\} = E^{\circ}$ *для всякого* $E \in$ **K**. *Пусть* $\mu \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}(\mathbf{K})$, $\mu$ *положительна и конечна на* **K**. *Пусть* $M$ — *произвольное регулярное* $\mu$*-измеримое множество.*

*Тогда*

$$\lim\left\{\frac{\mu(E\cap M)}{\mu(E)} : E \in \mathbf{K}(x)\right\} = \begin{cases} 0 & \text{для } \mu\text{-почти всех } x \in X - M, \\ 1 & \text{для } \mu\text{-почти всех } x \in M. \end{cases} \qquad (14)$$

(6) Предел был определен в 2,1.
(7) См. определение 5.



Доказательство. Положим в теореме 6 $\omega = \mu$, **M** равным системе всех замкнутых множеств. Тогда из теоремы 6 (с учетом леммы 9,2 и 10,3) вытекает первая строчка в (14).

Так как множество $X - M$ внутренне (**M**, $\mu$)-регулярно, то приведенные рассуждения могут быть применены и для него, значит,

$$\lim\left\{\frac{\mu(E\cap(X-M))}{\mu(E)} : E \in \mathbf{K}(x)\right\} = 0 \qquad (15)$$

для $\mu$-почти всех $x \in M$. Так как $M$, $\mu$-измеримо, то

$$\mu(E) = \mu(E \cap M) + \mu(E \cap (X - M))$$

для всякого $E \in \mathbf{K}(x)$ и, значит, $(0 < \mu(E) < \infty)$

$$\frac{\mu(E\cap M)}{\mu(E)} = 1 - \frac{\mu(E\cap(X-M))}{\mu(E)}. \qquad (16)$$

Из (16) и (15) вытекает вторая строчка в (14).

13. Приведем несколько следствий теоремы 12,2. Притом мы положим $f(E) = E^{\circ}$ и предел будем понимать в смысле определения 2,1.

13,1. Теорема. *Пусть* $X$ — *нормальное (соотв. хаусдорфово) пространство,* **K** — *система замкнутых (соотв. компактных) множеств, покрывающая* $X$ *в смысле Витали. Пусть* $\mu \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}(\mathbf{K})$, $\mu$ *конечна и положительна на* **K**.

*Тогда для любого регулярного* $\mu$*-измеримого множества* $M$ *справедливо* $\mu$*-почти всюду*

$$\lim\left\{\frac{\mu(E\cap M)}{\mu(E)} : E \in \mathbf{K}(x)\right\} = \chi_M(x). \qquad (17)$$

Доказательство вытекает из теоремы 12,2.

13,2. Теорема. *Пусть* $X$ — *локально компактное хаусдорфово пространство,* **K** — *система компактных множеств, покрывающая* $X$ *в смысле Витали. Пусть* $\mu \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}(\mathbf{K})$, $\mu$ *положительна и конечна на* **K**.

*Тогда для произвольного бэровского*(8) *множества* $M$ *справедливо* $\mu$*-почти всюду* (17).

Доказательство. В [5] доказана следующая теорема (при приведенных здесь предположениях о $X$): Если $\mu \in \mathscr{C}$, то каждое бэровское множество $\mu$-измеримо. Далее, так как $\mu$ конечна и положительна на компактных $G_\delta$ множествах, то $\mu$ на бэровских множествах является бэровской, значит, регулярной

(8) См. [2].

мерой.(9) Отсюда легко вытекает, что все бэровские множества регулярны. Так как $M$ $\mu$-измеримо и регулярно, то требуемый результат следует из теоремы 13,1.

**13,3. Теорема.** *Пусть $X$ — метрическое пространство,* **K** *— система всех замкнутых шаров. Пусть $\mu \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}(\mathbf{K})$, $\mu$ положительна и конечна на* **K**.

*Тогда для любого регулярного $\mu$-измеримого множества $M$ справедливо* (17) *$\mu$-почти всюду.*

Доказательство вытекает из теоремы 13,1.

**13,4. Теорема.** *Пусть $X$ — эвклидово $n$-мерное пространство,* **K** *— система всех замкнутых кубов. Пусть $\mu$ $n$-мерная мера Лебега.*

*Тогда для любого борелевского множества $M$ справедливо почти всюду* (17).

Доказательство вытекает из теоремы 13,2.

14. В следующих следствиях $f(E)$ равно множеству центров соответственно шара и куба $E$.

**14,1. Теорема.** *Пусть $X$ — метрическое пространство,* **K** *— система замкнутых шаров. Пусть $\mu \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}(\mathbf{K})$, $\mu$ положительна и конечна на* **K**. *Пусть $M$ — произвольное регулярное $\mu$-измеримое множество.*

*Тогда*

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu(c(x, r) \cap M)}{\mu(c(x, r))} = \chi_M(x)$$

*$\mu$-почти всюду в $X$.*

Доказательство. В теореме 12,2 положим **K** равным системе всех замкнутых шаров и для $E \in \mathbf{K}$ положим $f(E)$ равным множеству центров шара $E$. Нетрудно усмотреть, что

$$\lim \left\{ \frac{\mu(E \cap M)}{\mu(E)} : E \in \mathbf{K}(x) \right\} = \lim_{r\to 0} \frac{\mu(c(x, r) \cap M)}{\mu(c(x, r))}.$$

**14,2. Теорема.** *Пусть $X$ — эвклидово $n$-мерное пространство. Обозначим через $K(x, r)$ куб с центром $x$ с длиной ребра $2r$, через $\mu$ $n$-мерную меру Лебега.*

*Тогда для всякого борелевского множества $M$ справедливо $\mu$-почти всюду*

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu(K(x, r) \cap M)}{\mu(K(x, r))} = \chi_M(x).$$

(9) Если **K** покрывает $X$ в смысле Витали и $\mu$ конечна на **K** то из этого легко следует, что $\mu$ конечна на всех компактных множествах.



Доказательство. В теореме 12,2 положим **K** равным системе всех замкнутых кубов, а для $E \in \mathbf{K}$, $f(E)$ равным множеству состоящему из одного элемента — центра куба $E$.

## ЛИТЕРАТУРА


[1] Bourbaki N., *Sur un théoreme de Carathéodory et la mesure dans les espaces topologiques*, C. R. Acad. sci. Paris *201* (1935), 1309—1311.

[2] Halmos P. R., *Measure Theory*, New York 1950 (Халмош П. Р., *Теория меры*, Москва 1953).

[3] Mickle E. J., Rado T., *On density theorems for outer measures*, Rozprawy matematyczne XXI, Warszawa 1960.

[4] Morse A. P., *A theory of covering and differentiation*, Trans. Amer. Math. Soc. *55* (1944), 205—235.

[5] Riečanová Z., *О внешней мере Каратеодори*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV *12* (1962), 246—252.

[6] Riečan B., *Poznámka ku konštrukcii miery*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV *12* (1962), 47—59.


Поступило 17. V. 1962 г.

*Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie*
*Stavebnej fakulty*
*Slovenskej vysokej školy technickej*
*v Bratislave*

## ON THE DENSITY OF OUTER MEASURES IN THE TOPOLOGICAL SPACE

Beloslav Riečan

### Summary

Let X be a topological space. Denote by $\mathscr{C}$ the system of all outer measures fulfilling the following condition: If $U$, $V$ are open, disjoint sets, and $\bar{A} \subset U$, $\bar{B} \subset V$, then $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

We say **K** covers $M \subset X$ in the sense of Vitali if and only if **K** is such a family of closed subsets of $X$ that coresponding to each open set $U$ and each $x \in M$ there is a set $E \subset \mathbf{K}$ for which $x \in E^\circ$ ($E^\circ$ being the interior of $E$) and $E \subset U$.

Let **K** be any family of closed sets covering $X$ in the sense of Vitali. Denote by $\mathscr{D}(\mathbf{K})$ the system of all outer measures fulfilling the following condition: If $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$, $M \subset X$, **L** covers $M$ in the sense of Vitali, then there is a sequence $\{L_i\}_{i=1}^\infty$ of disjoint sets from **L** such that $\mu(M - \bigcup_{i=1}^\infty L_i) = 0$.

A set $M$ will be called regular if and only if coresponding to each positive number $\varepsilon$ there is an open set $U$ and a closed set $C$ for which $C \subset M \subset U$ and $\mu(U - M) < \varepsilon$ and $\mu(M - C) < \varepsilon$.

Finally, let **K** be any family of sets in $X$. Let $x$ be any element of $X$. Let us denote by $\mathbf{K}(x)$ the family of such $E \in \mathbf{K}$ for which $x \in E^\circ$. Let $\mu$ be a real-valued set-function defined on **K**. We say

that number $L$ is the limit of $\mu$ in the point $x$ if for each positive number $\varepsilon$ there exists $E \in K(x)$ such that $|\mu(F) - L| < \varepsilon$ for any $F \in \mathbf{K}(x)$, $F \subset E$.

In this article a general theorem has been proved (theorem 6) from which the following theorems follow:

**Theorem 13.1.** *Let $X$ be a Hausdorff (resp. normal) topological space, $\mathbf{K}$ the family of compact (resp. closed) sets covering $X$ in the sense of Vitali. Let $\mu \in \mathscr{C} \cap \mathscr{D}(\mathbf{K})$, $\mu$ be positive and finit on $\mathbf{K}$.*

*Then for any regular $\mu$-measurable set $M$ holds*

$$\lim \left\{ \frac{\mu(E \cap M)}{\mu(E)} : E \in \mathbf{K}(x) \right\} = \chi_M(x)\text{(}^{10}\text{)}$$

*$\mu$-almost everywhere in $X$.*

**Theorem 14,1.** *Let $X$ be a metric space, $\mathbf{K}$ be the family of all closed spheres. Let $\mu \in \mathscr{C} \cup \mathscr{D}(\mathbf{K})$, $\mu$ be positive and finit on $\mathbf{K}$.*

*Then for any regular $\mu$-measurable set $M$ is*

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mu(c(r, x) \cap M)}{\mu(c(x, r))} = \chi_M(x)\text{(}^{11}\text{)}.$$

*$\mu$-almost everywhere in $X$.*

---

($^{10}$) $\chi_M$ is the characteristic function of $M$.
($^{11}$) If $\varrho$ is the metric function in $X$, then $c(x, r) = \{y : \varrho(y, x) \leq r\}$.