MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK 13 1963 ČÍSLO 3

O POJME INVERZNEJ ANALYTICKEJ FUNKCIE

VALTER ŠEDA, Bratislava

Pojem inverznej funkcie k nekonštantnej funkcii w analytickej na uzavretej rovine E je v matematickej literatúre dobre známy. Jeho presnú formuláciu možno nájsť napr. v knihe [1] na str. 254. Často je však potrebné uvažovať o inverznej funkcii funkcie w analytickej v ľubovoľnej podoblasti G oblasti E. V tejto práci zavedieme pojem takejto funkcie. Budeme pritom dbať, aby v prípade funkcie analytickej na E prešiel v známy pojem z [1] a ak zasa funkcia w je jedno-jednoznačná, jej inverzná funkcia mala obvyklý význam. Význačnou triedou inverzných funkcií sú rýdzo inverzné funkcie. Rýdzo inverzná funkcia funkcie w je charakterizovaná tým, že jej Riemannova plocha sa skladá zo všetkých elementov inverzných k elementom Riemannovej plochy funkcie w a len týchto elementov. V práci je podaná nutná a postačujúca podmienka, aby funkcia w mala rýdzo inverznú funkciu. Konečne sú uvedené niektoré dôležité prípady, keď má funkcia w rýdzo inverznú funkciu.

Najprv budeme definovať niektoré pojmy, ktoré budeme ďalej používať. Prvým z nich je pojem zobecnenej analytickej funkcie v oblasti G. Rozumieme ním neprázdny systém w analytických elementov so stredmi v oblasti G, ktorý má tú vlastnosť, že ak máme dva elementy zo systému w, je jeden pokračovaním druhého v oblasti G. O oprávnenosti zavedenia tohto pojmu hovorí aj to, že riešenie w obyčajnej diferenciálnej rovnice v komplexnom obore, v ktorej nezávisle premenná sa mení v oblasti G, splňujúce Cauchyho počiatočné podmienky P, je najväčšia zobecnená analytická funkcia v oblasti G, ktorá má tieto dve vlastnosti:

1. Každý element funkcie w vyhovuje v nejakom okolí svojho stredu danej diferenciálnej rovnici.

2. Jestvuje element funkcie w, ktorý splňuje v svojom strede podmienky P. Podrobnejšie o pojme riešenia sa hovorí v práci [2] na str. 230–231.

Ďalej budeme hovoriť, že element $W(b)$ je koncovým elementom zobecnenej analytickej funkcie w, ak: 1. nie je elementom funkcie w; 2. jestvuje reťazec elementov $W(t)$, $a \leqq t \leqq b$, tak, že $W(b)$ je koncovým elementom tohto reťazca a elementy $W(t)$ pre $a \leqq t < b$ patria funkcii w.

Je zrejmé, že každá funkcia analytická v oblasti G je aj zobecnenou analytickou funkciou v oblasti G, ale naopak to nemusí platiť. Nutnú a postačujúcu podmienku, aby platilo obrátené tvrdenie, podáva veta 1.

Veta 1. *Nutná a postačujúca podmienka, aby zobecnená analytická funkcia w v oblasti G bola analytickou v oblasti G, je, aby všetky priame pokračovania každého elementu W funkcie w so stredmi z dostatočne malého okolia stredu elementu W boli elementami funkcie w a aby každý koncový element funkcie w mal stred na hranici oblasti G.*

Dôkaz. Nutná podmienka je zrejmá.

Postačujúca podmienka. Nech $W(a)$ je nejaký element funkcie w. Tento element určuje v oblasti G analytickú funkciu f. Zrejme je $w \subset f$. Ukážeme, že ak $w \neq f$, t. j. ak w nie je analytickou funkciou v G a je splnená prvá časť postačujúcej podmienky, jestvuje koncový element funkcie w, ktorého stred leží v oblasti G a teda nie je splnená druhá časť postačujúcej podmienky. Skutočne, nech $W(b)$ je element funkcie f, ktorý nepatrí funkcii w. Jestvuje reťazec $W(t)$, $a \leqq t \leqq b$ elementov funkcie f, ktorý spája element $W(a)$ s elementom $W(b)$. Keďže $W(a) \in w$, podľa nášho predpokladu všetky elementy $W(t)$ pre $a \leqq t < a + \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$ je nejaké číslo, patria funkcii w. Nech $\tau \in \langle a, b \rangle$ je také číslo, že všetky elementy $W(t)$, $a \leqq t \leqq \tau$, patria funkcii w. Také $\tau > a$ isto jestvuje, napr. $a + \varepsilon/2$. Z druhej strany $\tau < b$. Jestvuje $\sup \tau = t_0$. Je $a < t_0 \leqq b$. Uvažujme o elemente $W(t_0)$. Ak $t_0 < b$, z prvej časti postačujúcej podmienky na základe vlastností supréma je $W(t_0) \notin w$, kým elementy $W(t)$, $a \leqq t < t_0$ patria funkcii w. To isté platí, keď $t_0 = b$. Teda $W(t_0)$ je koncovým elementom funkcie w a nakoľko $W(t_0) \in f$, jeho stred leží v oblasti G.

Zavedieme aj pojem inverzného Riemannovho elementu. Nech R_0 je nekonštantný Riemannov element so stredom a a jeho limita v bode a, ktorú budeme nazývať hodnotou elementu R_0 v strede a, nech je b. Obmedzíme sa len na prípad $a \neq \infty$, $b \neq \infty$. V ostatných sa postupuje analogicky. Element R_0 je jedným z nasledujúcich 4 typov:

1. Element R_0 je hladký. Možno ho rozšíriť na funkciu $\bar{R}_0$, meromorfnú v nejakom okolí bodu a. Predpokladajme najpr, že $\bar{R}_0$ nadobúda v bode a jednoduchú hodnotu b. Jestvuje k nej inverzná funkcia $\bar{R}_0^{-1}$, ktorá je definovaná a meromorfná v okolí bodu b. Táto určuje Riemannov element R_0^{-1} so stredom v bode b, ktorý nazveme inverzným elementom k elementu R_0. Je zrejmé, že ak P_0 je analytický element zodpovedajúci elementu R_0, jeho inverzný element P_0^{-1} je určený elementom R_0^{-1}. V ďalšom nebudeme niekedy rozlišovať medzi Riemannovými elementami a im zodpovedajúcimi analytickými elementami.

2. Element R_0 je hladký, funkcia $\bar{R}_0$ nadobúda v bode a k-násobnú hodnotu b, $k > 1$. Možno ju v okolí bodu a písať v tvare $w - b = (z - a)^k \cdot \Phi(z - a)$, kde funkcia Φ je holomorfná v okolí bodu 0, $\Phi(0) \neq 0$. Z $\Phi(0) \neq 0$ plynie, že v nejakom okolí bodu 0 jestvuje holomorfná vetva funkcie $\sqrt[k]{\Phi(u)}$. Zvolíme si jednu z nich a označíme je $\Psi(u)$. Je teda

$$w - b = [(z - a) \cdot \Psi(z - a)]^k = [\chi(z - a)]^k, \tag{1}$$

pričom $\chi(u)$ má jednoduchý nulový bod 0. Jestvuje jej inverzná funkcia χ^{-1}, definovaná a holomorfná v okolí bodu 0. Ďalej potrebujeme pomocnú vetu 1.

Pomocná veta 1. *Nech funkcie w, f a g splňujú tieto predpoklady:*

1. *w je meromorfná a jedno-jednoznačná v okolí O_a bodu a a $w(a) = 0$.*
2. *f je funkcia meromorfná na uzavretej rovine, definovaná rovnosťou $f(z) = z^k$, k je prirodzené číslo.*
3. *g je inverzná funkcia funkcie f, t. j. g je analytická funkcia $\sqrt[k]{z}$.*

Potom jestvuje práve k zložených funkcií gfw (t. j. funkcií $\sqrt[k]{[w(z)]^k}$). Tieto funkcie sú tvaru

$$\varepsilon^n \cdot w(z), \qquad n = 0, 1, \ldots, k - 1 \tag{2}$$

a sú analytické a meromorfné v O_a. Číslo $\varepsilon = \exp(2\pi i/k)$ je koreň rovnice $z^k = 1$.

Dôkaz. Z vlastností meromorfných funkcií w, f na základe definície zloženej funkcie vyplýva, že jestvuje aspoň jedna zložená funkcia gfw a každá funkcia gfw je analytická v O_a. Ďalej je zrejmé, že každú zloženú funkciu gfw dostaneme ako funkciu zloženú z funkcií gf a w. Uvažujme preto najprv o zložených funkciách gf, t. j. o funkciách tvaru $\sqrt[k]{z^k}$.

Nech $G_1, G_2, \ldots, G_k$ sú elementy funkcie g so spoločným stredom w_0, $w_0 \neq 0$, $w_0 \neq \infty$. Tieto elementy sú inverzné k elementom $F_1, F_2, \ldots, F_k$ funkcie f so stredmi $z_1, z_2, \ldots, z_k$, ktoré sú koreňmi rovnice $z^k = w_0$. Nakoľko pre l-tý koreň z_l ($l = 1, 2, \ldots, k$) tejto rovnice platí, že $z_l = z_1 \cdot \varepsilon^{l-1}$, je $G_l = \varepsilon^{l-1} \cdot G_1$, a teda

$$G_l = \varepsilon^{l-j} \cdot G_j, \qquad l = 1, 2, \ldots, k, \; j = 1, 2, \ldots, k. \tag{3}$$

Uvažujme o zložených elementoch tvaru $G_l F_j$. Každý takýto element určuje jednu zo zložených funkcií gf. Predovšetkým $G_j F_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$ určujú funkciu z. Z (3) vyplýva, že element $G_l F_j = \varepsilon^{l-j} G_j F_j$ definuje funkciu $\varepsilon^{l-j} \cdot z$. Nakoľko rozdiel $l - j$ môže nadobúdať hodnoty $-(k - 1), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k - 1$ a $\varepsilon^{-(k-l)} = \varepsilon^l$, dostávame práve k rôznych funkcií, ktoré sú tvaru

$$\varepsilon^n \cdot z, \qquad n = 0, 1, \ldots, k - 1. \tag{4}$$

Tvar týchto funkcií nezávisí od voľby bodu w_0. Preto jestvuje práve k zložených funkcií gf, ktoré majú tvar (4). Zase ku každej funkcii gf jestvuje podľa predpokladu 1 práve jedna zložená funkcia gfw. Zo (4) dostávame, že funkcie gfw sú tvaru (2) a keďže sú analytické v O_a, sú v O_a meromorfné.

Z rovnosti (1) na základe tejto pomocnej vety vyplýva, že jestvuje práve k zložených funkcií $\sqrt[k]{w(z) - b}$, z ktorých n-tá, $n = 0, 1, \ldots, k - 1$, má tvar $(\sqrt[k]{w(z) - b})_n = \varepsilon^n \chi(z - a)$. Z toho $z - a = \chi^{-1}[\varepsilon^{-n}(\sqrt[k]{w(z) - b})_n]$. Ak w je nezávisle premenná, jestvuje práve jedna funkcia $\sqrt[k]{w - b}$, pričom $\varepsilon^{-n} \sqrt[k]{w - b} = \sqrt[k]{w - b}$. Preto je prirodzené definovať inverzný element R_0^{-1} elementu R_0 rovnosťou

$$z = a + \chi^{-1}[\sqrt[k]{w-b}]. \tag{5}$$

R_0^{-1} je k-značná funkcia a nadobúda v strede b hodnotu a. Element (5) nezávisí od voľby vetvy $\Psi(u)$ funkcie $\sqrt[k]{\Phi(u)}$. Ak totiž $\Psi_1(u)$ je ľubovoľná iná vetva tejto funkcie, platí $\Psi_1 = \varepsilon^n \Psi$ a ak $\chi_1(u) = u\Psi_1(u)$, je $\chi_1^{-1}(u) = \chi^{-1}(\varepsilon^{-n}u)$. Ďalej $\chi_1^{-1}[\sqrt[k]{w-b}] = \chi^{-1}[\sqrt[k]{w-b}]$ vzhľadom na rovnosť $\varepsilon^{-n}\sqrt[k]{w-b} = \sqrt[k]{w-b}$.

3. R_0 je rozvetvený element. Nech je k-značnou funkciou, $k > 1$. Možno ho vtedy písať v tvare

$$w - b = \Phi(\sqrt[k]{z-a}), \tag{6}$$

kde Φ je holomorfná funkcia v okolí bodu 0 (po prípadnom vhodnom definovaní v bode 0) a $\Phi(0) = 0$. Predpokladajme najprv, že Φ je prostá v okolí bodu 0. Jestvuje k nej inverzná funkcia Φ^{-1}, holomorfná v okolí 0, $\Phi^{-1}(0) = 0$. Z rovnosti (6) dostávame postupne $\sqrt[k]{z-a} = \Phi^{-1}(w-b)$,

$$z = a + [\Phi^{-1}(w-b)]^k = a + \chi(w-b). \tag{7}$$

Pravá strana rovnosti (7) definuje hladký Riemannov element R_0^{-1} so stredom b, inverzný element ku R_0. Nakoľko χ má k-násobný nulový bod 0, R_0^{-1} nie je jedno-jednoznačný.

4. R_0 je rozvetvený, funkcia Φ v rovnosti (6) nie je jedno-jednoznačná. Keďže $\Phi(0) = 0$, možno písať $\Phi(u) = u^l \cdot \Psi(u)$, $\Psi(0) \neq 0$, $l > 1$. Jestvuje holomorfná vetva $\chi(u)$ funkcie $\sqrt[l]{\Psi(u)}$ v okolí bodu 0. Je potom $\Phi(u) = [u \cdot \chi(u)]^l = [\Omega(u)]^l$, kde funkcia $\Omega(u)$ má jednoduchý nulový bod $u = 0$. Rovnosť (6) možno písať

$$w - b = [\Omega(\sqrt[k]{z-a})]^l. \tag{8}$$

Z pomocnej vety 1 máme, že jestvuje l zložených funkcií $\sqrt[l]{[\Omega(u)]^l}$, z nich n-tá, $n = 0, 1, \ldots, l-1$, je $\varepsilon^n\Omega(u)$, kde $\varepsilon = \exp(2\pi i/l)$. Teda jestvuje aj l zložených funkcií $\sqrt[l]{w(z)-b}$, z ktorých pre n-tú platí rovnosť

$$(\sqrt[l]{w(z)-b})_n = \varepsilon^n\Omega(\sqrt[k]{z-a}), \qquad n = 0, 1, \ldots, l-1$$

a ďalej

$$z - a = \{\Omega^{-1}[\varepsilon^{-n}(\sqrt[l]{w(z)-b})_n]\}^k.$$

Preto definujeme k elementu R_0 inverzný element R_0^{-1} so stredom b rovnosťou

$$z = a + [\Omega^{-1}(\sqrt[l]{w-b})]^k = a + \tau(\sqrt[l]{w-b}). \tag{9}$$

Podobne ako pri type 2, aj tento element je jednoznačne určený a nezávisí od voľby vetvy $\chi(u)$ funkcie $\sqrt[l]{\Psi(u)}$.

Tvrdíme: Element R_0^{-1} je l-značná funkcia a teda je 4. typu, nakoľko τ nie je jedno-jednoznačná v žiadnom okolí bodu 0. Skutočne, z rovnosti (9) vidieť, že element $R_1^{-1} \neq R_0^{-1}$ z dostatočne malého okolia elementu R_0^{-1} je totožný so svojím pokračovaním pozdĺž l-násobne obehnutej kružnice so stredom b. Preto je R_0^{-1} najviac l-značná funkcia. Nech je m-značná, $1 \leqq m < l$. Teda R_1^{-1} je totožný so svojím pokračovaním po m-násobnej kružnici so stredom b. Element R_1^{-1} možno písať ako zložený element $a + \tau L$, kde L je element funkcie $\sqrt[l]{w-b}$. Po m-násobnom obehnutí prejde element L do tvaru $\varepsilon^m L$, kde $\varepsilon = \exp(2\pi i/l)$. Teda $\tau L = \tau(\varepsilon^m L)$, z čoho vyplýva pre holomorfnú funkciu τ identita $\tau(u) = \tau(\varepsilon^m u)$. Z nej vyplýva, že τ je automorfná vzhľadom na konečnú grupu transformácií $F_p(u) = \varepsilon^{mp}u$, $p = 1, 2, \ldots, p_0$, v nejakom kruhu so stredom v bode 0. Elementárnou úvahou možno zistiť, že $p_0 = l/(m, l)$, (m, l) je najväčší spoločný deliteľ čísel m, l. Keďže $\tau(u) = [\Omega^{-1}(u)]^k$, je $[\Omega^{-1}(\varepsilon^{mp}u)]^k = [\Omega^{-1}(u)]^k$. Použitím pomocnej vety 1 máme

$$\Omega^{-1}(\varepsilon^{mp}u) = \varepsilon_1^{k_p}\Omega^{-1}(u), \qquad p = 1, 2, \ldots, p_0, \tag{10}$$

kde možno písať $1 \leqq k_p \leqq k$ a $\varepsilon_1 = \exp(2\pi i/k)$. Z jedno-jednoznačnosti funkcie Ω^{-1} vyplýva, že k_p sú navzájom rôzne čísla. Zo vzťahu (10) postupne dostaneme, že $\Omega^{-1}(\varepsilon^m u) = \varepsilon_1^{k_1}\Omega^{-1}(u)$, $\Omega^{-1}(\varepsilon^{2m}u) = \varepsilon_1^{2k_1}\Omega^{-1}(u)$ atď., takže rovnosť (10) má tvar

$$\Omega^{-1}(\varepsilon^{mp}u) = \varepsilon_1^{pk_1}\Omega^{-1}(u), \qquad p = 1, 2, \ldots, p_0. \tag{11}$$

Pritom číslo $k_1 < k$.

Označme $\Omega^{-1}(u) = v$. Je potom $\Omega(v) = u$ a ďalej

$$\Omega(\varepsilon_1^{pk_1}v) = \varepsilon^{mp}\Omega(v). \tag{12}$$

To je symetrická relácia ku (11). Z nej vyplýva

$$[\Omega(\varepsilon_1^{pk_1}v)]^l = [\Omega(v)]^l,$$

vzhľadom na rovnosť $(\varepsilon^{mp})^l = 1$. Odtiaľ pre $p = 1$ úvahou podobnou ako je vyššie, len vedenou opačným smerom, dostaneme, že funkcia $[\Omega(\sqrt[k]{z-a})]^l$ je najviac k_1-značná, $k_1 < k$, čo je v spore s predpokladom, že táto funkcia je práve k-značná.

Vidíme, že ku každému nekonštantnému Riemannovmu elementu jestvuje práve jeden nekonštantný inverzný element, pričom inverzný element k elementu 1. typu, resp. 4. typu je opäť toho istého 1. typu, resp. 4. typu. Element 2. typu má inverzný element 3. typu a obrátene. Jedine inverzné elementy k elementom typu 1. a 3. sú hladké. Ďalej nie je ťažké si overiť, že element $(R_0^{-1})^{-1} = R_0$.

O vzťahu medzi Riemannovými elementami a ich inverznými elementami hovorí veta 2.

Veta 2. *Zobrazenie systému S nekonštantných Riemannových elementov na systém k nim inverzných elementov, ktoré priradí každému elementu jeho inverzný element, je homeomorfné.*

D ô k a z. Je zrejmé, že toto zobrazenie je jedno-jednoznačné. Stačí preto dokázať, že je obojstranne spojité. Nech $R_0 \in S$, R_0^{-1} je dvojica navzájom inverzných Riemannových elementov. Vzhľadom na rovnosť $(R_0^{-1})^{-1} = R_0$ budeme dokazovať len tvrdenie: K ľubovoľnému okoliu O_{-1} elementu R_0^{-1} jestvuje okolie O_0 elementu R_0 tak, že inverzné elementy elementov z O_0 ležia v okolí O_{-1}.

Nech a je stred elementu R_0 a jeho hodnotu v strede označíme b. Obmedzíme sa len na prípad, že R_0 je 4. typu a $a \neq \infty$, $b \neq \infty$. V ostatných prípadoch by sme postupovali podobným spôsobom. Predovšetkým platí, že jestvuje okolie elementu R_0, ktoré s výnimkou R_0 je zložené z elementov 1. typu. Skutočne, nech $R_c \in O_0$, $R_c \neq R_0$ je element so stredom c ležiacim v dostatočne malom prstencovom okolí bodu a. Element R_c je na základe rovnosti (8) tvaru

$$b + (\Omega[K_c(z)])^l, \tag{13}$$

kde $K_c(z)$ je nejaký element funkcie $\sqrt[k]{z - a}$ so stredom c. V okolí bodu c je $K'(z) = (1/k)\,[K(z)]^{1-k} \neq 0$. Preto je tam derivácia elementu R_c rovná $l(\Omega[K_c(z)])^{l-1} \cdot \Omega'[K_c(z)] \cdot (1/k)\,[K(z)]^{1-k} \neq 0$.

Stredy elementov z okolia O_{-1} elementu R_0^{-1} vyplňujú okolie O_b bodu b. Z definície Riemannovho elementu R_0 jestvuje také okolie O_a bodu a, že element R_0 zobrazí O_a do O_b. Okoliu O_a zodpovedá okolie O_0 elementu R_0 tak, že stredy elementov z O_0 tvoria O_a. Nech O_a je také malé, že O_0 pozostáva s výnimkou elementu R_0 len z elementov 1. typu. Z konštrukcie inverzného elementu vyplýva, že inverzné elementy elementov z O_0 majú svoj stred v O_b. Ešte treba dokázať, že sú z O_{-1}, t. j. že sú vytvorené funkciou R_0^{-1}.

Ak napíšeme funkciu (13) ako superpozíciu elementov a označíme závisle premennú w, má R_c tvar $w - b = L\Omega K_c$, kde L je vhodný prostý element funkcie z^l. Pre inverznú funkciu R_c^{-1} potom dostaneme, že je tvaru

$$z = K_c^{-1}\Omega^{-1}L^{-1}(w - b),$$

kde K_c^{-1}, L^{-1} sú inverzné elementy elementov K_c a L a sú po rade elementami funkcie $a + w^k$, resp. $\sqrt[l]{w}$. Ω^{-1} má význam ako predtým. Z toho vyplýva, že R_c^{-1} sa dá písať v tvare $z = a + [\Omega^{-1}L_c^{-1}(w - b)]^k$. Porovnaním s (9) vidíme, že R_c^{-1} je vytvorený funkciou R_0^{-1}, č. b. t. d.

Majme funkciu w analytickú v oblasti G. Funkcia w určí systém $\bar{w}$ Riemannových elementov so stredmi v oblasti G. Tento systém budeme nazývať Riemannovou plochou funkcie w v oblasti G. Ak G je uzavretá rovina E, hovoríme krátko, že $\bar{w}$ je Riemannovou plochou funkcie w. Stredy elementov systému $\bar{w}$ tvoria podoblasť G_1 oblasti G. Hodnoty týchto elementov v ich stredoch tvoria oblasť H_1. Oblasť G_1, resp. oblasť H_1 budeme nazývať projekciou Riemannovej plochy $\bar{w}$ do roviny nezávisle, resp. závisle premennej. Je zrejmé, že G_1 obsahuje prirodzenú podoblasť G_2 funkcie w v oblasti G a dostaneme ju pridaním k oblasti G_2 niektorých izolovaných bodov komplementu G_2. Preto je funkcia w analytická aj v oblasti G_1. Analogický vzťah je medzi oblasťou hodnôt H funkcie w a oblasťou H_1.

Ešte zavedieme pojem koncového elementu Riemannovej plochy $\bar{w}$ funkcie w v oblasti G. Každý Riemannov element R_0 s vlastnosťami: 1. $R_0 \in \bar{w}$ a 2. jestvuje krivka C o rovnici $z = z(t)$, $a \leqq t \leqq b$, ktorá končí v strede $z(b)$ elementu R_0 a reťazec elementov $P_t \in w$, $a \leqq t < b$, pozdĺž tejto krivky tak, že pre všetky t dostatočne blízke ku b sú zodpovedajúce Riemannove elementy R_t z okolia elementu R_0, budeme nazývať koncovým elementom Riemannovej plochy $\bar{w}$. Z tejto definície vidieť, že stred koncového elementu systému $\bar{w}$ leží na hranici oblasti G a ak tento element je hladký, zodpovedá koncovému elementu funkcie w.

A teraz pristúpime k definovaniu inverznej analytickej funkcie.

Nech funkcia w je nekonštantná funkcia analytická v oblasti G, $\bar{w}$ je jej Riemannova plocha v oblasti G. Nech ďalej oblasť H_1 je projekcia plochy $\bar{w}$ do roviny závisle premennej. Funkcia w^{-1}, inverzná ku w, je funkcia analytická v oblasti H_1 určená inverzným elementom ľubovoľného prostého elementu funkcie w.

Funkcia w^{-1} je jednoznačne určená. Vyplýva to z nasledujúcej vlastnosti prostých elementov funkcie w (porovnať s [1], str. 254–255): Dva prosté elementy P_1, P_2 funkcie w možno spojiť pomocou reťazca prostých elementov tejto funkcie. Inverzné elementy tohto reťazca tvoria reťazec pozdĺž krivky, ležiacej v oblasti H_1, preto inverzné elementy P_1^{-1}, P_2^{-1} elementov P_1, P_2 patria jednej a tej istej funkcii analytickej v oblasti H_1. Zrejme je funkcia w^{-1} nekonštantná.

Poznámka. Ak nemá pojem analytického elementu význam uvedený v [1] na str. 239, ale znamená potenčný rad, vtedy zostrojujeme inverznú funkciu nasledujúcim spôsobom. Ak je daná analytická funkcia w v oblasti G, zložená z elementov – potenčných radov –, vytvárajúca funkcia ľubovoľného jej elementu určí jednu a tú istú funkciu w_1 analytickú v zmysle [1] v oblasti G. Ak stotožníme elementy oboch funkcií w, w_1, ktoré sú s tým istým stredom a sú vytvorené jednou a tou istou funkciou, vidíme, že funkcia w_1 obsahuje všetky elementy funkcie w a naviac má elementy, ktorých stred je pólom vytvárajúcej funkcie a súčasne aj pólom elementov funkcie w, [1], str. 243. K funkcii w_1 jestvuje inverzná funkcia w_1^{-1}. Zo systému elementov tejto funkcie vypustíme elementy, ktorých vytvárajúca funkcia má v strede elementu pól. Ostatné elementy tvoria analytickú funkciu (zase s elementami – potenčnými radmi), ktorú nazývame inverznou funkciou funkcie w.

Uvažujme teraz o Riemannovej ploche $\bar{w}$ funkcie w v oblasti G. K nej je podľa vety 2 homeomorfne priradený systém $\bar{w}^{-1}$ inverzných elementov. Podsystém všetkých hladkých elementov systému $\bar{w}^{-1}$ určuje množinu analytických elementov w^{*-1}, o ktorej platí tvrdenie:

w^{*-1} je zobecnená analytická funkcia v oblasti H_1 a každý jej element je elementom funkcie w^{-1}. Preto ju budeme nazývať jadrom inverznej funkcie w^{-1}. Skutočne, prosté elementy systému w^{*-1} sú inverznými elementami všetkých prostých elementov funkcie w a len týchto elementov. Pretože dva prosté elementy množiny w^{*-1} možno spojiť pomocou reťazca prostých elementov tejto množiny, tvoria všetky prosté elementy systému w^{*-1} zobecnenú analytickú funkciu v oblasti H_1.

Nech teraz P je neprostý element systému w^{*-1}. Jemu zodpovedá Riemannov element R 2. typu. Nakoľko kruh elementu P je totožný až na stred s prstencom elementu R, analytické elementy zodpovedajúce elementom z okolia elementu R sú priamym pokračovaním elementu P. Avšak elementy z nejakého okolia elementu R sú zo systému $\bar{w}^{-1}$ a s výnimkou R sú 1. typu. Preto všetky priame pokračovania elementu P so stredmi dostatočne blízkymi k stredu elementu P sú prosté a patria systému w^{*-1}. Teda w^{*-1} je zobecnenou analytickou funkciou v oblasti H_1. Nakoľko funkcia w^{-1} je analytická v oblasti H_1 a obsahuje aspoň jeden prostý element funkcie w^{*-1}, obsahuje všetky elementy w^{*-1}.

Z definície jadra dostávame, že $\bar{w}^{-1}$ je súčasne systémom všetkých Riemannových elementov určených jadrom funkcie w^{-1} v oblasti H_1. Preto Riemannova plocha funkcie w^{-1} v oblasti H_1 obsahuje všetky inverzné elementy Riemannovej plochy funkcie w v oblasti G. Dôležitý prípad vo vzťahu medzi funkciou w a jej inverznou funkciou w^{-1} nastane, ak funkcia w^{-1} je totožná so svojím jadrom. Vtedy hovoríme, že funkcia w má rýdzo inverznú funkciu a w^{-1} je jej rýdzo inverzná funkcia. Pretože elementy jadra funkcie w^{-1} zobrazia svoj stred do oblasti G a jeho prosté elementy sú inverznými elementami prostých elementov funkcie w, hodnoty rýdzo inverznej funkcie w^{-1} ležia v oblasti G a každý jej prostý element je inverzným nejakého prostého elementu funkcie w.

Obrátene, ak všetky prosté elementy funkcie w^{-1} sú inverzné k prostým elementom funkcie w, je ich množina totožná s množinou prostých elementov jadra. Nech ešte neprosté elementy $P \in w^{-1}$ zobrazia svoj stred do oblasti G. Priradíme im zodpovedajúce Riemannove elementy R 2. typu. Ich nejaké rýdze okolie (t. j. okolie bez elementu R) pozostáva z inverzných elementov plochy $\bar{w}$. Inverzné elementy R^{-1} elementov R majú teda svoj stred v G a elementy z ich rýdzeho okolia sú zo systému $\bar{w}$. Teda aj $R^{-1} \in \bar{w}$ a elementy P sú z jadra funkcie w^{-1}. Platí preto pomocná veta 2.

Pomocná veta 2. *Nutná a postačujúca podmienka, aby inverzná funkcia w^{-1} nekonštantnej funkcie w analytickej v oblasti G bola rýdzo inverznou, je, aby hodnoty funkcie w^{-1} ležali v oblasti G a všetky jej prosté elementy boli inverznými elementami prostých elementov funkcie w.*

Túto pomocnú vetu možno formulovať aj v tvare:

Pomocná veta 2'. *Nech nekonštantná funkcia w je analytická v oblasti G a oblasť H_1 je projekciou Riemannovej plochy $\bar{w}$ funkcie w v oblasti G do roviny závisle premennej. Potom nutnou a postačujúcou podmienkou, aby inverzná funkcia w^{-1} funkcie w bola rýdzo inverznou funkciou, je, aby Riemannova plocha funkcie w^{-1} v oblasti H_1 pozostávala z inverzných elementov Riemannovej plochy $\bar{w}$ a len z týchto elementov.*

Dôkaz. Jadro inverznej funkcie w^{-1} určí v oblasti H_1 systém $\bar{w}^{-1}$ všetkých inverzných elementov plochy $\bar{w}$. Teda funkcia w^{-1} definuje v H_1 ten istý systém

Riemannových elementov práve vtedy, ak je totožná so svojím jadrom, t. j. ak je rýdzo inverzná.

Na základe vety 2 vyplýva z pomocnej vety 2' tento dôsledok:

Dôsledok 1. *Riemannova plocha rýdzo inverznej funkcie w^{-1} funkcie w v oblasti H_1 je homeomorfným obrazom Riemannovej plochy $\bar{w}$ funkcie w v oblasti G pri zobrazení, ktoré priradí každému elementu plochy $\bar{w}$ jeho inverzný element.*

Dôsledok 2. *Ak funkcia w analytická v oblasti G má rýdzo inverznú funkciu w^{-1}, funkcia w^{-1} má tiež rýdzo inverznú funkciu, a to funkciu w.*

Dôkaz. Použijeme v ňom označenia pomocnej vety 2'. Pretože w^{-1} je rýdzo inverznou funkciou funkcie w, Riemannova plocha $\bar{w}^{-1}$ funkcie w^{-1} v oblasti H_1 skladá sa práve zo všetkých inverzných elementov Riemannovej plochy $\bar{w}$. Jej projekcia do roviny závisle premennej je oblasť $G_1 \subset G$. Inverzná funkcia $(w^{-1})^{-1}$ funkcie w^{-1} je teda analytická v G_1. Nakoľko funkcia w je analytická v tej istej oblasti (G_1 obsahuje totiž prirodzenú podoblasť funkcie w v oblasti G) a má aspoň jeden element funkcie $(w^{-1})^{-1}$, je $(w^{-1})^{-1} = w$. Riemannova plocha funkcie $(w^{-1})^{-1}$ v oblasti G_1 je totožná s Riemannovou plochou funkcie w v oblasti G. Obsahuje preto všetky inverzné elementy Riemannovej plochy w^{-1} a žiadne iné. Podľa pomocnej vety 2' je $(w^{-1})^{-1}$ rýdzo inverzná, č. b. t. d.

Nasledujúce vety hovoria o niektorých triedach analytických funkcií, ktoré majú rýdzo inverznú funkciu.

Veta 3. *Nekonštantná funkcia w analytická na uzavretej rovine E má rýdzo inverznú funkciu w^{-1}, ktorá je tiež na E analytická.*

Dôkaz. Stačí uvažovať len o prostých elementoch funkcie w^{-1}. Z vlastnosti prostých elementov vyplýva, že ak $P_1^{-1} \in w^{-1}$ je taký prostý element, že jeho inverzný element $P_1 \in w$ a $P_2^{-1} \in w^{-1}$ je ľubovoľný prostý element, jestvuje reťazec prostých elementov funkcie w^{-1}, ktorý spája P_1^{-1} s P_2^{-1}. Inverzné elementy tohto reťazca tvoria reťazec a nakoľko element $P_1 \in w$ a w je analytická na E, aj koncový element P_2 tohto reťazca patrí w. P_2^{-1} je teda inverzným elementom elementu funkcie w. Podobným spôsobom možno dokázať, že všetky prosté elementy pokračovania w_1 funkcie w^{-1} na E sú inverzné ku prostým elementom funkcie w. Z toho vyplýva, že inverzné elementy Riemannových elementov priradených neprostým elementom funkcie w_1 sú obsiahnuté v Riemannovej ploche funkcie w. Preto funkcia $w_1 = w^{-1}$, č. b. t. d.

Tým je dokázané, že inverzná funkcia w^{-1} funkcie w analytickej na E je inverzná aj v zmysle definície uvedenej v [1].

Veta 4. *Univalentná funkcia w analytická v oblasti G má rýdzo inverznú funkciu w^{-1}, ktorá je meromorfná v nejakej oblasti H_2. Túto oblasť dostaneme z oblasti hodnôt H*

funkcie w pridaním niektorých (prípadne žiadneho) izolovaných bodov komplementu CH oblasti H. Elementy funkcie w^{-1} so stredom v oblasti H sú prosté a zobrazia H na prirodzenú podoblasť funkcie w v oblasti G. Ostatné elementy funkcie w^{-1} sú neprosté.

Dôkaz. Z univalentnosti w dostávame, že v každom bode, v ktorom je jadro w^{*-1} funkcie w^{-1} definované, jestvuje najviac jeden prostý element jadra. Z toho vyplýva, že jadro je jednoznačná funkcia, a preto meromorfná v oblasti, ktorú označíme H_2. Súčasne vidíme, že systém $\bar{w}^{-1}$ Riemannových elementov inverzných k elementom Riemannovej plochy $\bar{w}$ funkcie w v oblasti G neobsahuje rozvetvené elementy, preto funkcia w^{-1} je analytická v oblasti H_2. Jej jadro je analytickou funkciou v tej istej oblasti a je jej vetvou, teda $w^{*-1} = w^{-1}$. Funkcia w ako univalentná má len prosté elementy. Pretože prosté elementy funkcie w^{-1} sú podľa pomocnej vety 2 inverznými ku elementom funkcie w, vypĺňujú stredy prostých elementov funkcie w^{-1} oblasť H a tieto elementy zobrazia oblasť H na prirodzenú podoblasť funkcie w v oblasti G. Ostatné elementy funkcie w^{-1} sú neprosté. Ich stred je v CH a má prstencové okolie vyplnené stredmi prostých elementov funkcie w^{-1}, ktoré leží v oblasti H. Je teda izolovaným bodom CH.

Čiastočne obrátené tvrdenie k vete 4 vyslovuje veta 5.

Veta 5. *Nech nekonštantná funkcia w je meromorfná v oblasti G, H je jej oblasť hodnôt. Nech ďalej $G_1 \subset G$ je oblasť vytvorená stredmi prostých elementov funkcie w a $H_1 = w(G_1)$. Potom platí:*

1. *Inverzná funkcia w^{-1} funkcie w je analytická v oblasti H.*
2. *Ak w^{-1} je rýdzo inverzná, je aj univalentná, definovaná v oblasti H_1 a zobrazí túto oblasť na oblasť G_1.*

Dôkaz. Riemannova plocha $\bar{w}$ funkcie w v oblasti G skladá sa len z hladkých elementov, ktoré zobrazia G na H. Podľa definície je inverzná funkcia w^{-1} analytická v oblasti H. Ak je rýdzo inverzná, z pomocných viet 2 a 2' máme, že elementy Riemannovej plochy funkcie w^{-1} v oblasti H sú 1. a 3. typu, preto w^{-1} obsahuje len prosté elementy a jej elementy sú inverznými elementami prostých elementov funkcie w. Nakoľko každý bod z oblasti G_1 je stredom práve jedného prostého elementu funkcie w, nadobúda w^{-1} každú svoju hodnotu práve v jednom bode. Prosté elementy funkcie w^{-1} zobrazia H_1 na G_1.

Dôsledok. *Inverzná funkcia w^{-1} jedno-jednoznačnej meromorfnej funkcie w je rýdzo inverzná a je totožná s obvyklým chápaním inverznej funkcie.*

Dôkaz. Keďže w je univalentná, z vety 4 dostávame, že w^{-1} je rýdzo inverzná a meromorfná. Z toho na základe vety 5 vyplýva druhá časť tvrdenia.

Príklad funkcie, ktorá nemá rýdzo inverznú funkciu. Nech w je vetva funkcie e^z v oblasti G, danej nerovnosťami $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, $0 < \mathrm{Im}(z) < 3\pi$. w zobrazí

oblasť G na oblasť H danú nerovnosťami $1 < |w| < e$. Podľa vety 5 je inverzná funkcia w^{-1} funkcie w analytická v H a je určená inverzným elementom nejakého elementu funkcie e^z. Je preto totožná s vetvou funkcie $\log w$ v oblasti H. Táto vetva však zobrazí oblasť H na pás $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, $\mathrm{Im}(z)$ ľubovoľná, preto podľa pomocnej vety 2 nie je rýdzo inverzná.

O tom, či funkcia w má rýdzo inverznú funkciu, alebo nie, hovorí veta 6.

Veta 6. *Nech w je nekonštantná funkcia analytická v oblasti G a nech H_1 je projekcia Riemannovej plochy $\bar{w}$ funkcie w v oblasti G do roviny závisle premennej. Potom platí: Nutná a postačujúca podmienka, aby funkcia w mala rýdzo inverznú funkciu w^{-1}, je, aby všetky koncové elementy plochy $\bar{w}$ zobrazili svoj stred do hranice oblasti H_1.*

Dôkaz. Z definície koncového elementu vyplýva, že všetky koncové elementy plochy $\bar{w}$ zobrazia svoj stred do uzáveru oblasti H_1. Nech niektorý koncový element R_1 plochy $\bar{w}$ zobrazí stred z_0 do bodu $w_0 \in H_1$. Ukážeme, že inverzný element R_1^{-1} elementu R_1 je z Riemannovej plochy w_1 funkcie w^{-1} v oblasti H_1. Tým bude podľa pomocnej vety 2' dokázané, že w^{-1} nie je rýdzo inverzná. Skutočne, v každom okolí elementu R_1 jestvuje element $R_2 \in \bar{w}$, ktorý je typu 1. Jeho inverzný element R_2^{-1} je z ľubovoľne malého okolia elementu R_1^{-1} a patrí ku ploche w_1. Nakoľko dostatočne malé okolie bodu w_0 leží v H_1, analytickým pokračovaním elementu R_2^{-1} v prstencovom okolí bodu w_0 dostaneme elementy, ktoré tiež patria ku w_1. S prstencovým okolím R_1^{-1} leží aj tento element na ploche w_1, čo sme chceli dokázať.

Obrátene, nech funkcia w^{-1} nie je rýdzo inverzná. Na základe pomocnej vety 2 musí nastať aspoň jeden z prípadov: Buď jestvuje prostý element funkcie w^{-1}, ktorý nie je inverzným elementom žiadneho prostého elementu funkcie w, alebo všetky hodnoty funkcie w^{-1} neležia v oblasti G.

V prvom prípade uvažujme o dvoch prostých elementoch funkcie w^{-1}: o elemente P_1^{-1}, ktorého inverzný element $P_1 \in w$, a o elemente P_2^{-1}, ktorého inverzný element $P_2 \notin w$. Elementy P_1^{-1}, P_2^{-1} možno spojiť pomocou reťazca zloženého z prostých elementov funkcie w^{-1}. V tomto reťazci jestvuje element P_3^{-1}, ktorý zobrazí svoj stred do hraničného bodu oblasti G a ktorého inverzný element P_3 je koncovým elementom funkcie w. Pritom P_3 zobrazí svoj stred do oblasti H_1. Jemu zodpovedajúci Riemannov element je koncovým elementom plochy $\bar{w}$, ktorý zobrazí svoj stred do H_1.

V druhom prípade môžeme predpokladať, že všetky prosté elementy funkcie w^{-1} sú inverzné k prostým elementom funkcie w. Nakoľko prstencové okolie hodnoty v strede ktoréhokoľvek elementu je vyplnené hodnotami prostých elementov, z nášho predpokladu vyplýva, že každý element P_1^{-1} funkcie w^{-1}, ktorý zobrazí svoj stred do bodu z_0, $z_0 \notin G$, je neprostý a prstencové okolie bodu z_0 je z oblasti G. Nech R_1^{-1} je jemu zodpovedajúci Riemannov element. Jeho inverzný element R_1 má svoj stred v bode z_0 a ako ľahko vidieť, je koncovým elementom plochy $\bar{w}$, ktorý zobrazí svoj stred do H_1.

S vetou 6 je ekvivalentná veta 6'.

Veta 6'. *Nech w je nekonštantná funkcia analytická v oblasti G a nech H_1 je projekcia Riemannovej plochy $\bar{w}$ funkcie w v oblasti G do roviny závisle premennej. Potom platí: Nutná a postačujúca podmienka, aby funkcia w mala rýdzo inverznú funkciu w^{-1}, je, aby inverzné elementy všetkých koncových elementov plochy $\bar{w}$ boli koncovými elementami Riemannovej plochy w_1 funkcie w^{-1} v oblasti H_1 a obrátene.*

Dôkaz. Uvažujme o inverznom elemente R_1^{-1} koncového elementu R_1 plochy $\bar{w}$. Už sme dokázali, že ak leží stred w_0 elementu R_1^{-1} v oblasti H_1, je R_1^{-1} elementom plochy w_1. Ak w_0 je hraničným bodom oblasti H_1, je R_1^{-1} koncovým elementom plochy w_1. Vyplýva to z toho, že reťazec elementov $P_t \in w$, ktorý leží v dostatočne malom okolí elementu R_1, je zložený výlučne z prostých elementov. Inverzné elementy tohto reťazca tvoria reťazec elementov funkcie w^{-1}, ktorý leží v okolí elementu R_1^{-1}. Ak vezmeme do úvahy ešte dôsledok 2 pomocnej vety 2', vyplýva z toho ekvivalencia oboch viet 6 a 6'.

Ako aplikáciu vety 6 dokážeme jednu vetu o funkciách meromorfných a presne p-valentných (p konečné). Pritom pod presne p-valentnou funkciou rozumieme takú, ktorá každú svoju hodnotu nadobúda práve v p bodoch. Pri dôkaze budeme používať hlavnú vetu konformného zobrazenia. Túto vetu v trocha pozmenenej forme spolu s dodatkom, ktorý sa nachádza za jej dôkazom, citujeme z knihy [3], str. 274–282. Uvedieme ju ako pomocnú vetu 3.

Pomocná veta 3. *Nech komplement oblasti H vzhľadom na uzavretú rovinu má viac ako dva body. Jestvuje funkcia w analytická, ľubovoľne pokračovateľná a univalentná v H, ktorá zobrazí túto oblasť na jednotkový kruh K. Funkcia w je jednoznačne určená podmienkou, aby danému bodu $z \in H$ a danému smeru v ňom priradil jeden z elementov funkcie w so stredom v bode z bod $w = 0$ a kladný smer reálnej osi. Každá funkcia w, ktorá je analytická, ľubovoľne pokračovateľná a univalentná v H a zobrazí túto oblasť na K, je buď jedno-jednoznačná alebo nekonečne mnohoznačná.*

Veta 7. *Nech w je meromorfná, presne p-valentná (p konečné) funkcia v oblasti G a nech H je jej oblasť hodnôt. Potom platí: 1. Inverzná funkcia w^{-1} funkcie w je rýdzo inverzná a je analytická a ľubovoľne pokračovateľná v oblasti H. Okrem toho je univalentná a presne p-značná. 2. Ak $p \geqq 2$, nejestvuje v jednoducho súvislej oblasti G presne p-valentná funkcia.*

Dôkaz. 1. Tvrdenie je zrejmé, ak $p = 1$. Nech $p \geqq 2$. Ukážeme, že všetky elementy funkcie w sú prosté. Nech $P_1 \in w$ so stredom v bode z_1 nie je prostý a $w_1 = P_1(z_1)$. Jestvujú ešte elementy $P_2, \ldots, P_p \in w$ so stredmi $z_2, \ldots, z_p$ tak, že $P_i(z_i) = w_1$, $i = 2, \ldots, p$. Jestvuje okolie O_{w_1} bodu w_1, ktorého každý bod je obrazom nejakého bodu z okolia O_{z_i} každého bodu z_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, pričom o okoliach O_{z_i} vždy možno predpokladať, že sú disjunktné a ležia v G. Nakoľko P_1 nie je prostý, ku $w_2 \in O_{w_1}$, $w_2 \neq w_1$, jestvujú aspoň dva body z_1', $z_1'' \in O_{z1}$, $z_1' \neq z_1''$ tak, že $P_1(z_1') = P_1(z_1'') = w_2$. V každom z ostatných okolí O_{z_i}, $i = 2, \ldots, p$ jestvuje aspoň jeden bod z_i', v ktorom funkcia w nadobúda hodnotu w_2. Teda w nadobúda w_2 aspoň v $p + 1$ bodoch, čím sme prišli k sporu. Funkcia w^{-1} je podľa vety 5 analytická v oblasti H. Z toho, čo sme dokázali, vyplýva, že je i definovaná v H.

Teraz dokážeme, že funkcia w^{-1} je rýdzo inverzná. Podľa vety 6 stačí dokázať, že všetky koncové elementy Riemannovej plochy $\bar{w}$ funkcie w v oblasti G zobrazia svoj stred do hranice oblasti H. Nech R_0 je koncový element systému $\bar{w}$, ktorý zobrazí svoj stred z_0 do $w_0 \in H$. Tak ako predtým dostaneme existenciu p disjunktných okolí $O_{z_i} \subset G$ bodov z_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, ktoré sú disjunktné s nejakým okolím bodu z_0 a ku ktorým jestvuje okolie O_{w_0} bodu w_0 tak, že každý bod $w \in O_{w_0}$ je obrazom práve jedného bodu z každého okolia O_{z_i}, $i = 1, 2, \ldots, p$. Keďže z_0 je hraničným bodom oblasti G, v každom okolí bodu z_0 jestvuje bod $z' \in G$. Podľa našej definície $w_0 = R_0(z_0) = \lim_{z \to z_0} R_0(z)$. Preto bod $z' \in G$ dostatočne blízky k bodu z_0 sa zobrazí funkciou R_0, a teda aj funkciou w do O_{w_0}. To znamená, že bod $R_0(z') \in O_{w_0}$ je pri zobrazení funkciou w obrazom aspoň $p + 1$ bodov z oblasti G, čo je opäť spor s predpokladom vety.

Ak nie je w^{-1} ľubovoľne pokračovateľná v oblasti H, jestvuje v tejto oblasti krivka C o rovnici $w = w(t)$, $a \leqq t \leqq b$, vychádzajúca zo stredu niektorého elementu funkcie w^{-1} tak, že elementy P_t^{-1}, $a \leqq t < b$, $P_t^{-1} \in w^{-1}$ tvoria reťazec, ale v bode $w(b) \in H$ nejestvuje element, ktorý by bol priamym pokračovaním elementov P_t^{-1} pre t dostatočne blízke ku b. Bod $w(b)$ je stredom p elementov $P_1^{-1}, \ldots, P_p^{-1}$ funkcie w^{-1}, ktoré zobrazia bod $w(b)$ do p rôznych bodov $z_1, \ldots, z_p$. Zase jestvuje okolie $O_{w(b)}$ bodu $w(b)$ tak, že každý bod $w \in O_{w(b)}$ sa zobrazí elementami $P_1^{-1}, \ldots, P_p^{-1}$ do práve jedného bodu v každom z p disjunktných okolí O_{z_i} bodov z_i, $i = 1, \ldots, p$. Krivka C končí v bode $w(b)$, preto pre $b - \varepsilon \leqq t \leqq b$ ležia všetky jej body $w(t)$ v $O_{w(b)}$. Uvažujme o okolí $O_{w(t_0)} \subset O_{w(b)}$ stredu $w(t_0)$ elementu $P_{t_0}^{-1}$, t_0 je dostatočne blízke ku b. Tento element zobrazí $O_{w(t_0)}$ do množiny $\bigcup_{i=1}^{p} O_{z_i}$. Z jednoznačnosti a spojitosti $P_{t_0}^{-1}$ vyplýva, že $P_{t_0}^{-1}$ zobrazí $O_{w(t_0)}$ do práve jednej z množín O_{z_i}. Nech je to O_{z_j}. Keby v niektorom bode $w_3 \in O_{w(t_0)}$ bolo $P_{t_0}^{-1}(w_3) \neq P_j^{-1}(w_3)$, zobrazil by sa bod w_3 funkciou w^{-1} aspoň do $p + 1$ bodov, z čoho by vyplývalo, že funkcia w nadobúda hodnotu w_3 aspoň v $p + 1$ bodoch, nakoľko w^{-1} je rýdzo inverzná. Teda $P_{t_0}^{-1}(w) \equiv P_j^{-1}(w)$ pre všetky $w \in O_{w(t_0)}$ a element $P_{t_0}^{-1}$ je priamym pokračovaním elementu P_j^{-1}. Pre $w(t_0)$ dostatočne blízke k bodu $w(b)$ platí aj obrátené tvrdenie. Tým sme dostali spor s tvrdením, že nejestvuje priame pokračovanie so stredom $w(b)$ elementov reťazca P_t^{-1}. Funkcia w^{-1} je ľubovoľne pokračovateľná v H, č. b. t. d.

Z vety 5 vyplýva, že funkcia w^{-1} vzhľadom na to, že je rýdzo inverzná, je aj univalentná. Z toho vyplýva, že sa skladá len z prostých elementov. Tieto sú inverznými elementami elementov funkcie w. Preto každý bod $w \in H$ je stredom práve p elementov funkcie w^{-1}.

2. Ak oblasť G je jednoducho súvislá a jej komplement má viac ako jeden bod, jestvuje konformné zobrazenie $f(z)$ oblasti G na jednotkový kruh K. Nech w je funkcia s vlastnosťami spomínanými v znení tejto vety. Jej inverzná funkcia w^{-1} je univalentná a ľubovoľne pokračovateľná v oblasti H. Tie isté vlastnosti v oblasti H má aj zložená funkcia fw^{-1}. Táto funkcia zobrazí H na K. Keby komplement CH oblasti H mal viac ako dva body, podľa pomocnej vety 3 by bola funkcia fw^{-1} buď jedno-jednoznačná alebo nekonečne mnohoznačná. To isté by platilo i o funkcii w^{-1}. Ale w^{-1} je p-značná, p konečné, $p \geqq 2$. Preto CH má najviac dva body. Menej ako dva body nemôže mať, lebo potom by H bola jednoducho súvislá a univalentná a ľubovoľne pokračovateľná funkcia w^{-1} v H by bola jedno-jednoznačná.

Ak má CH dva body a, b, uvažujeme o zloženej funkcii tvaru $fw^{-1}gh$, kde g je homografická transformácia, ktorá zobrazí body 0 a ∞ do bodov a, b a h je exponenciálna funkcia. Táto funkcia je ľubovoľne pokračovateľná na otvorenej rovine E_0, preto je jednoznačná a zobrazí E_0 na K. Keďže je ohraničená, podľa Liouvilleovej vety je konštantná. To je ale v spore s univalentnosťou funkcie $fw^{-1}g$ a tým, že h nie je konštantná funkcia.

Ak oblasť G je uzavretá rovina E bez jedného bodu a, tento bod nemôže byť podstatne singulárnym bodom funkcie w. Preto je w meromorfná na E, a teda racionálna. Avšak racionálna funkcia nadobúda na oblasti $E - \{a\}$ všetky hodnoty s výnimkou najviac jednej. Preto je H jednoducho súvislá a opäť dostávame, že w^{-1} je jedno-jednoznačná. Tým skôr to platí v prípade rovnosti $G = E$. Spor ukazuje, že v jednoducho súvislej oblasti G nejestvuje presne p-valentná funkcia, $p \geqq 2$.

LITERATÚRA

[1] Saks S., Zygmund A., *Analytic Functions*, Warszawa—Wroclaw 1952.

[2] Šeda V., *Transformácia integrálov obyčajných lineárnych diferenciálnych rovníc druhého rádu v komplexnom obore*, Acta F. R. N. Univ. Comen. Mathem., II-5-6 (1957), 229—254.

(3) Голузин Т. М., *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Москва, Ленинград 1952.

Došlo 15. 8. 1961.

Katedra matematickej analýzy
Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského
v Bratislave

О ПОНЯТИИ ОБРАТНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Валтер Шеда

Резюме

Понятие обратной функции к непостоянной функции аналитической в расширенной плоскости E уже знакомо [1]. В этой статье вводится понятие обратной функции к функции w аналитической в произвольной области $G \subset E$ следующим образом: Обратная функция w^{-1} функции w — это аналитическая функция в области H_1 определенная обратным элементом произвольного однолистного элемента функции w. Область H_1 — множество, на которое изображают свои центры все римановы элементы определенные в области G функцией w (риманова поверхность функции w в области G). Риманова поверхность функции w^{-1} в области H_1 содержит все обратные элементы элементов римановой поверхности функции w в области G. Если она других элементов не имеет, будем говорить, что w^{-1} строго обратная. Функция w имеет строго обратную функцию тогда и только тогда, если все граничные элементы римановой поверхности функции w в области G отображают свои центры на границу области H_1 (теорема 6). В работе введены некоторые классы функций, имеющих строго обратную функцию: функции аналитические в расширенной плоскости (теорема 3), однолистные функции (теорема 4), мероморфные и точно p-листные функции (теорема 7). О последних утверждается, что для $(\infty >) p \geqq 2$ не существуют в односвязной области.

ÜBER DEN BEGRIFF DER ANALYTISCHEN UMKEHRFUNKTION

Valter Šeda

Zusammenfassung

Der Begriff der Umkehrfunktion der nicht konstanten Funktion, welche in der Vollebene E analytisch ist, ist schon in der mathematischen Literatur bekannt [1]. In dieser Arbeit ist der Begriff der Umkehrfunktion zu der Funktion w, die in einem beliebigen Gebiet $G \subset E$ analytisch ist, auf folgender Weise eingeführt: Die Umkehrfunktion w^{-1} der Funktion w ist die Funktion, die in dem Gebiet H_1 analytisch ist und mit dem Umkehrelement eines beliebigen ein-eindeutigen Elements der Funktion w bestimmt wird. Das Gebiet H_1 ist die Menge, auf welche alle Riemannschen Elemente, die die Funktion w im Gebiete G bestimmt (die Riemannsche Fläche der Funktion w im Gebiete G) ihre Mittelpunkte abbilden. Die Riemannsche Fläche der Umkehrfunktion w^{-1} im Gebiete H_1 enthält alle Umkehrelemente der Elemente der Riemannschen Fläche der Funktion w im Gebiete G. Wenn sie keine weitere hat, sagen wir, daß die Funktion w^{-1} streng inverse ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Funktion w die streng inverse Funktion habe, ist, daß alle Endelemente der Riemannschen Fläche der Funktion w im Gebiete G ihre Mittelpunkte in die Begrenzung des Gebietes H_1 abbilden. (Satz 6). In der Arbeit werden folgende Klassen der Funktionen angeführt, welche die strenge Umkehrfunktion haben: die Funktionen analytisch in der Vollebene (Satz 3), die einwertigen Funktionen (Satz 4) und die meromorphen, streng p-valenten Funktionen (Satz 7). Über die letzten wird behauptet, daß sie für $p \geqq 2$ in dem einfach zusammenhängenden Gebiet nicht existieren.