MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK 13 1963 ČÍSLO 2

# NĚKOLIK POZNÁMEK K PROBLÉMU W. MNICHA

JIŘÍ SEDLÁČEK, Praha

Je známé, že neexistují tři racionální čísla $x_1$, $x_2$, $x_3$ tak, aby platilo

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \qquad x_1 x_2 x_3 = 1. \tag{1}$$

Označme $R$ těleso všech racionálních čísel, $C$ obor integrity všech celých racionálních čísel. W. Mnich položil před časem otázku, zda v $C$ existují čísla $x, y, z$ tak, aby platilo:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1.$$

Je znám snadný důkaz, že tato úloha je ekvivalentní s otázkou řešitelnosti soustavy (1) v $R$.

Všimněme si nejprve řešitelnosti soustavy (1) v některých „širších" oborech, zejména v kvadratických tělesech.[1] V tzv. Gassově tělese $R(i)$ lze najít tato řešení:

a) $x_{1,2} = \pm i, \quad x_3 = 1;$

b) $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm i), \quad x_3 = 2;$

c) $x_{1,2} = \frac{1}{26}(9 \pm 46i), \quad x_3 = \frac{4}{13};$

d) $x_{1,2} = \frac{1}{333}(-198 \pm 107i), \quad x_3 = \frac{81}{37};$

e) $x_{1,2} = \frac{1}{6710}(693 \pm 7501i), \quad x_3 = \frac{242}{105}.$

Také v tělese $R(\sqrt{2})$ se snadno nahlédne, že zde soustava (1) má několik řešení. Uvádím zde tyto výsledky

f) $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}, \quad x_3 = -1;$

g) $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-3 \pm 2\sqrt{2}), \quad x_3 = 4;$

[1] Výsledky c), d), e), h), ch) uvádím podle výpočtů P. Bartoše, M. Hlaváčka a V. Kučery.

h) $x_{1,2} = \frac{1}{1808}(1928 \pm 1817\sqrt{2}), \qquad x_3 = -\frac{128}{113};$

ch) $x_{1,2} = \frac{1}{35}(-45 \pm 29\sqrt{2}), \qquad x_3 = \frac{25}{7}.$

V tělese $R(\mathrm{i}\sqrt{31})$ jsem nalezl tři řešení:

j) $x_{1,2} = \frac{1}{4}(1 \pm \mathrm{i}\sqrt{31}), \qquad x_3 = \frac{1}{2};$

k) $x_{1,2} = \frac{1}{10}(1 \pm 2\mathrm{i}\sqrt{31}), \qquad x_3 = \frac{4}{5};$

l) $x_{1,2} = \frac{1}{56}(27 \pm 53\mathrm{i}\sqrt{31}), \qquad x_3 = \frac{1}{28}.$

V tělese $R(\mathrm{i}\sqrt{26})$ jsem nalezl dvě trojice, které vyhovují rovnicím (1):

m) $x_{1,2} = \frac{1}{3}(1 \pm \mathrm{i}\sqrt{26}), \qquad x_3 = \frac{1}{3};$

n) $x_{1,2} = \frac{1}{6}(-1 \pm \mathrm{i}\sqrt{26}), \qquad x_3 = \frac{4}{3}.$

Není ovšem známé, zda v uvedených kvadratických tělesech má soustava (1) konečný nebo nekonečný počet řešení. Všimneme-li si vzorců a)–n), vidíme, že z čísel $x_1, x_2, x_3$ vždy jedno patří do $R$. Nepodařilo se mi sestrojit kvadratické těleso $R(\sqrt{d})$ tak, aby v něm soustava (1) byla řešitelná čísly $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$, při čemž žádné z čísel $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ by nepatřilo do $R$.

Dále vzniká otázka, zda existuje konečný nebo nekonečný počet kvadratických těles, v nichž je soustava (1) řešitelná. Odpověď je snadným důsledkem jedné věty, kterou odvodil P. Erdös:

Budiž $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ polynom, jehož koeficienty patří do $C$ a nechť $a_0 > 0$, $(a_0, a_1, a_2, a_3) = 1$; nechť dále rovnice $f(x) = 0$ nemá dvojnásobný kořen. Potom existuje nekonečně mnoho přirozených čísel $m$ tak, že $f(m)$ je bezčtvercové číslo.[2]

Nyní dokážeme tuto větu:

**Věta 1.** *Existuje nekonečně mnoho imaginárních kvadratických těles* $R(\mathrm{i}\sqrt{d})$, *(kde* $d > 0$ *je bezčtvercové číslo), v nichž je soustava* (1) *řešitelná.*

Důkaz. Položme $f_0(x) = 16x^3 + 20x^2 + 16x + 1$. Polynom $f_0(x)$ zřejmě splňuje

([2]) Český název „číslo bezčtvercové" používáme podle K. Rychlíka (viz str. 48 jeho *Úvodu do elementární číselné theorie*, II. vyd).



všechny předpoklady z citované podmínky P. Erdöse, takže existuje nekonečně mnoho přirozených čísel $m$ tak, že $f_0(m)$ je bezčtvercové.[3] Pro každé číslo $t$ vyhovují vztahu $f_0(x) = t$ nejvýše tři přirozená čísla $x$, takže máme zaručenu existenci nekonečně mnoha bezčtvercových hodnot $f_0(m)$. Položme

$$x_{1,2} = \frac{1}{2(2m+1)} \cdot (2m - 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{f_0(m)}), \qquad x_3 = \frac{2}{2m+1}.$$

V nekonečně mnoha imaginárních kvadratických tělesech $R(\mathrm{i}\sqrt{f_0(m)})$ je tedy soustava (1) řešitelná. Důkaz věty 1 je tím podán.

Poznamenejme, že obdobnou větu lze dokázat i pro reálná kvadratická tělesa.

Rozšiřme nyní ještě dále původní těleso $R$. Nechť $T$ je nekomutativní těleso kvaternionů nad tělesem $R$. Pak v $T$ můžeme dokázat silnější tvrzení, jak ukazuje další věta.

**Věta 2.** *Pro každé* $r \in R$ *má soustava*

$$x_1 + x_2 + x_3 = r, \qquad x_1x_2x_3 = r \tag{2}$$

*nekonečně mnoho řešení v* $T$.

Důkaz. Zvolme libovolné přirozené číslo $n$ a položme

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{2^{2n-1}+1}(2^{2n-1}\mathrm{i}_1 + 2^n\mathrm{i}_2 + \mathrm{i}_3), \qquad x_3 = r.$$

Snadno nahlédneme, že soustava (2) je splněna a že uvažovaných trojic $x_1, x_2, x_3$ je nekonečně mnoho. Důkaz je podán.[4]

Závěrem si všimněme řešitelnosti soustavy (1) v některých tělesech, jež nejsou číselná. Je-li $p$ prvočíslo, označme $C_p$ těleso zbytkových tříd $(\mathrm{mod}\, p)$. Rovnítko v soustavě (1) budeme ovšem chápat jako kongruenci $(\mathrm{mod}\, p)$. Zabýváme se tedy nyní řešitelností soustavy [5]

$$x_1 + x_2 + x_3 \equiv 1 \pmod{p}, \qquad x_1x_2x_3 \equiv 1 \pmod{p}. \tag{3}$$

**Věta 3.** *Je-li* $p \equiv 1 \pmod 4$, *pak soustava* (3) *má řešení.*

([3]) V korespondenci s V. A. Goluběvem jsme konstatovali, že uvedený polynom $f_0(x)$ nabývá pro $x = 1, 2, 3, \ldots, 64$ bezčtvercových hodnot, zatímco $f_0(65)$ není už bezčtvercové. Viz Goluběvovu poznámku *Kubický polynom, který nabývá mnoha bezčtvercových hodnot*, Časopis pro pěstování matematiky *87* (1962), 496.

([4]) Důkaz lze opřít i o vzorce jiného druhu, např.

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{n^2+1}(2n\,\mathrm{i}_1 + (n^2-1) \cdot \mathrm{i}_2), \qquad x_3 = r.$$

([5]) Budeme uvažovat jen lichá prvočísla $p$, neboť případ $p = 2$ je triviální.

Důkaz. Je známé, že při $p \equiv 1 \pmod 4$ je $-1$ kvadratickým zbytkem (mod $p$). Zvolme tedy $b$ tak, že $b^2 \equiv -1 \pmod p$ a položme $x_1 \equiv b$, $x_2 \equiv -b$, $x_3 \equiv 1 \pmod p$. Takto sestrojená trojice $(x_1, x_2, x_3)$ zřejmě vyhovuje soustavě (3) a důkaz je tím podán.

Kromě řešení uvedeného v důkazu věty 3 mohou ovšem existovat i řešení jiná. Pro $p = 5$ vyhovuje soustavě (3) jedině trojice (1, 2, 3), jež odpovídá sestrojenému řešení; avšak již pro $p = 13$ dostáváme jednak trojici (1, 5, 8), kterou lze sestrojit pomocí čísla $b$, jednak ještě trojice (2, 2, 10), (9, 9, 9).

**Věta 4.** *Je-li* $p \equiv 7 \pmod 8$, *pak soustava* (3) *má řešení.*

Důkaz. Víme, že při $p \equiv 7 \pmod 8$ je 2 kvadratickým zbytkem (mod $p$). Zvolme tedy $c$ tak, že $c^2 \equiv 2 \pmod p$ a položme $x_1 \equiv 1 + c$, $x_2 \equiv 1 - c$, $x_3 \equiv -1 \pmod p$. Jedno řešení je tím sestrojeno a důkaz je podán.

Opět poznamenejme, že konstrukcí popsanou v předcházející větě nemusí být všechna řešení vyčerpána. Pro $p = 7$ existuje sice jediná trojice (4, 5, 6), k níž se dojde právě uvedeným postupem, avšak případ $p = 23$ je již složitější. Podle důkazu věty 4 najdeme trojici (6, 19, 22), avšak vyhovují též trojice (3, 3, 18); (4, 5, 15); (11, 16, 20).

Zbývá ještě probrat lichá prvočísla, která jsou kongruentní s číslem 3 (mod 8). Tu platí věta:

**Věta 5.** *Existuje prvočíslo* $p \equiv 3 \pmod 8$, *pro něž soustava* (3) *není řešitelná. Existují však v této zbytkové třídě též prvočísla* $p$, *pro něž soustava* (3) *řešitelná je.*

Důkaz. Snadno nahlédneme, že pro $p = 3$ soustava (3) nemá řešení. Pro $p = 11$ vyhovuje trojice (7, 7, 9). Tím je důkaz podán.(6)

A. Schinzel dokázal, že pro $s > 3$ soustava

$$\sum_{j=1}^{s} x_j = 1, \qquad \prod_{j=1}^{s} x_j = 1 \tag{4}$$

má v $R$ vždy nekonečný počet řešení. Bylo by možné také tuto problematiku přenést do $C_p$. Tak např. se dá dokázat, že pro $s \geqq 4$ soustava (4) má v $C_3$ vždy řešení.

## LITERATURA


[1] Cassels J. W. S., *On a diophantine equation*, Acta Arithmetica VI, (1960), 47—52.
[2] Erdös P., *Arithmetical properties of polynomials*, Journal of the London math. Soc., *28* (1953), 416—425.


(6) Pro $p = 19$ lze najít trojice (3, 7, 10); (5,17, 17); (8, 15, 16).




[3] Mnich W., *Úloha čís. 495*, Matematyka X, 1 (45), 55.
[4] Sierpiński W., *Teoria liczb* II, Warszawa 1959.


Došlo 22. 6. 1962.

*Matematický ústav*
*Československé akademie věd v Praze*

## НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ ПО ПРОБЛЕМЕ В. МНИХА

Иржи Седлачек


### Резюме

Пусть задана система уравнений

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \qquad x_1x_2x_3 = 1. \tag{1}$$

В настоящей заметке мы занимаемся, в первую очередь, решаемостью системы (1) в некоторых квадратичных полях. Более общая система

$$x_1 + x_2 + x_3 = r, \qquad x_1x_2x_3 = r$$

(где $r$ — данное рациональное число) имеет бесконечное число решений в некоммутативном поле кватернионов над полем рациональных чисел.

В заключение мы занимаемся системой сравнений

$$x_1 + x_2 + x_3 \equiv 1 \pmod p, \qquad x_1x_2x_3 \equiv 1 \pmod p, \tag{2}$$

где $p$ — данное нечетное простое число. Если $p \equiv 1 \pmod 4$ или $p \equiv 7 \pmod 8$, то система (2) имеет решение. Остаются еще простые числа $p \equiv 3 \pmod 8$. В случае $p = 3$ система (2) не имеет решения, в то время как, например, для $p = 11$ и $p = 19$ решение существует.


## EINIGE BEMERKUNGEN ZUM PROBLEME VON W. MNICH

Jiří Sedláček


### Zusammenfassung

Es sei das Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \qquad x_1x_2x_3 = 1 \tag{1}$$

gegeben. In diesem Beitrag wird zuerst die Lösbarkeit des Systems (1) in einigen quadratischen Zahlkörpern untersucht.

Das allgemeinere System

$$x_1 + x_2 + x_3 = r, \qquad x_1x_2x_3 = r$$

(wo $r$ eine gegebene rationale Zahl ist) hat unendlich viele Lösungen in dem nichtkommutativen Quaternionenkörper über dem Körper aller rationalen Zahlen.

Schließlich wird das Kongruenzsystem

$$x_1 + x_2 + x_3 \equiv 1 \pmod{p}, \qquad x_1 x_2 x_3 \equiv 1 \pmod{p}, \tag{2}$$

wo $p$ eine gegebene ungerade Primzahl ist, untersucht. Für $p \equiv 1 \pmod{4}$ und für $p = 7 \pmod{8}$ ist das System (2) lösbar. Es bleiben noch die Primzahlen $p \equiv 3 \pmod{8}$. Für $p = 3$ besitzt das System (2) keine Lösung, aber für $p = 11$ und für $p = 19$ z. B., ist das System (2) lösbar.