ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ПО АНАЛИТИЧЕСКИМ СВОЙСТВАМ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ

МИКУЛАШ БЛАЖЕК (Mikuláš Blažek), Братислава

В настоящей работе показан способ, по которому можно в случае нерелятивистского рассеяния двух бесспиновых частиц сопоставить амплитуде рассеяния такой потенциал, который ее воспроизводит.

1. ВВЕДЕНИЕ

Если известна амплитуда рассеяния, то можно определить также аналитические свойства отдельных парциальных амплитуд. Что касается нерелятивистского упругого рассеяния двух бесспиновых частиц, зависит парциальная амплитуда рассеяния при данном (физическом) моменте количества движения l только от энергии $\nu = k^2$.

В настоящей работе предлагается способ, по которому можно сопоставить потенциал вышеупомянутой проблеме рассеяния, для которого нам известны аналитические свойства парциальной амплитуды рассеяния в верхней полуплоскости импульса k. До сих пор неясно, является ли метод, использованный в работе [1] для вывода основного интегрального уравнения для s-рассеяния, удобным также и для решения обратной проблемы с ненулевым моментом количества движения [2]. В дальнейшем мы покажем, что с помощью другого способа можно вывести определенное основное линейное интегральное уравнение для любого (физического) значения момента количества движения. Из уравнения, полученного таким образом, вытекает уравнение Аграновича—Марченко [1] как частный случай (для $l = 0$). В работе [2] показана также эквивалентность уравнений Гельфанда—Левитана [3] и Аграновича—Марченко. В дальнейшем мы не приводим некоторые доказательства а также исследования некоторых свойств основных соотношений, которые можно делать подобным образом, как например в работах [1], [2] или [4].

Формализм, использованный в данной работе, можно распространить на определенную область комплексных значений момента количества движения l. Оказывается [5], что процесс рассеяния можно описывать не только с помощью переменных v и $t = -2v(1 - \cos \vartheta)$ (как в представлении Манделстама), но также и с помощью комплексных переменных l и k. Дальше выяснилось [6], что для определенных видов потенциалов (потенциалы вида Шарап—Фубини) можно выразить полную амплитуду рассеяния с помощью ее полюсов и вычетов в комплексной плоскости l. Поэтому можно ожидать, что хотя бы для некоторых видов потенциалов удастся найти решение обратной проблемы не только с помощью стандартных данных о рассеянии из комплексной плоскости импульса k [1, 3, 7], но также с помощью данных о рассеянии из комплексной плоскости момента количества движения l (т. е. определить потенциал с помощью полюсов Редже). Однако предлагаемый метод нельзя прямо использовать для решения этой проблемы.

Настоящая работа разделена следующим образом. Во втором разделе приводятся некоторые функции и их свойства, необходимые для дальнейших вычислений.

В третьем разделе работы мы покажем, что если уравнению Шредингера

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - V\right]u = 0 \tag{1}$$

с краевым условием

$$\lim_{r\to\infty} u_l(k, r)\, e^{ikr} = 1 \tag{2}$$

удовлетворяет функция ($k \neq 0$)

$$f_l(k, r) = \frac{krh_l^{(2)}(kr)}{i^{l+1}} + \int_r^\infty K_l(r, t)\, \frac{kth_l^{(2)}(kt)}{i^{l+1}}\, dt, \qquad \operatorname{Im} k \leqq 0 \tag{3}$$

то потом функция $K_l(r, \varrho)$ является решением дифференциального уравнения в частных производных (гиперболического типа)

$$\frac{\partial^2 K_l(r,\varrho)}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \cdot K_l(r,\varrho) - \left[\frac{\partial^2 K_l(r,\varrho)}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} \cdot K_l(r,\varrho)\right] = V(r)\, K_l(r,\varrho) \tag{4}$$

с условиями

$$V(r) = -2\frac{dK_l(r,r)}{dr} = V_l(r) \tag{5}$$

$$\lim_{t\to\infty} \left\{kth_l^{(2)}(kt) \cdot \frac{\partial K_l(r,t)}{k\,\partial t} - K_l(r,t) \cdot \frac{\partial[kth_l^{(2)}(kt)]}{k\,\partial t}\right\} = 0 \tag{6}$$

(где $h_l^{(2)}$ — сферическая функция Ханкеля второго рода). Выполнение условий (1) и (3) эквивалентно выполнению условий (4), (5) и (6).

В четвертом разделе работы мы выведем для функции $K_l(r, \varrho)$ основное линейное интегральное уравнение

$$K_l(r,\varrho) + \int_r^\infty K_l(r, t) \cdot F_l(t,\varrho)\, dt + F_l(r,\varrho) = 0, \tag{7}$$

где

$$F_l(r,\varrho) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \cdot [1 - S_l(k)]\,[-krh_l^{(2)}(-kr)]\,[-k\varrho h_l^{(2)}(-k\varrho)]$$

и

$$\frac{1 - S_l(k)}{k^{2l+1}} < \infty, \qquad k \to 0$$

(если нет связанных состояний).

В пятом разделе работы мы покажем, что если выполняется интегральное уравнение (7), то будет выполнено соотношение (6) и имеет место уравнение

$$\frac{\partial^2 K_l(r,\varrho)}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} \cdot K_l(r,\varrho) - \left[\frac{\partial^2 K_l(r,\varrho)}{\partial \varrho^2} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} \cdot K_l(r,\varrho)\right] = -2\frac{dK_l(r,r)}{dr} \cdot K_l(r,\varrho).$$

Таким образом, если мы определим потенциал с помощью соотношения (5), то согласно третьему разделу работы будет выполнено также уравнение Шредингера (1) [с потенциалом (5)]. В следующем разделе приводится дискуссия и начерченный пример. В заключении формулируется основное уравнение (7) с помощью полной амплитуды рассеяния. В конце работы имеются математические дополнения.

2. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Уравнение Шредингера для радиальной части волновой функции можно писать в виде

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - V\right]u = 0, \tag{8}$$

где $V = V(r)$ — центрально симметричный потенциал.

Известно [4], что если существует первый и второй абсолютный момент потенциала, т. е. если справедливы соотношения

$$\int_0^\infty r\,|V(r)|\,dr < \infty, \quad \int_0^\infty r^2\,|V(r)|\,dr < \infty, \tag{9}$$

то для уравнения Шредингера (8) имеет место:

1° Существует решение $f_l(k, r)$, которое определяется соотношением

$$\lim_{r\to\infty} f_l(k, r)\, e^{ikr} = 1. \tag{10}$$

Функция, удовлетворяющая условию (10), является при $r > 0$ аналитической функцией импульса k для $\operatorname{Im} k < 0$. На вещественной оси она имеет разрыв в точке $k = 0$. Для свободной частицы ($V \equiv 0$) эта функция имеет вид

$$f_l^{(0)}(k, r) = \frac{kr h_l^{(2)}(kr)}{i^{l+1}}. \tag{11}$$

2° Существует регулярное решение $\varphi_l(k, r)$, которое ведет себя в окрестности начала ($r = 0$) как $\sim r^{l+1}$ и определяется с помощью краевого условия

$$\lim_{r\to 0} \frac{\varphi_l(k, r)}{r^{l+1}} = 1.$$

Решение $\varphi_l(k, r)$ является для фиксированного r аналитической функцией переменной k, регулярной для всех конечных значений k, т. е. является целой функцией переменной k (φ_l является целой функцией переменной k^2). Для $|k| \to \infty$ имеет место(¹)

$$\lim_{|k|\to\infty} \frac{\varphi_l(k, r)}{(2l+1)!!} = \lim_{k\to\infty} \frac{kr j_l(kr)}{k^{l+1}} = \frac{1}{k^{l+1}} \sin\left(kr - \frac{1}{2}\pi l\right), \tag{12}$$

равномерно относительно r. (О функциях h_l и j_l смотри в дополнении A.)

3° Регулярное решение $\varphi_l(k, r)$ можно выразить с помощью функции $f_l(k, r)$ следующим образом

$$\varphi_l(k, r) = \frac{1}{2ik} \cdot [f_l(k) . f_l(-k, r) - f_l(-k) . f_l(k, r)], \tag{13}$$

причем

$$f_l(k) = \lim_{r\to 0} (2l + 1)\, r^l . f_l(k, r). \tag{14}$$

(¹) Из рассуждений, сделанных в [4] на стр. 323 и 326 вытекает, что имеет место также

$$\left| k^{l+1} . kr j_l(kr) . \left[\frac{\varphi_l(k, r)}{(2l+1)!!} - \frac{kr . j_l(kr)}{k^{l+1}} \right] \right| \to 0; \quad |k| \to \infty \tag{12'}$$

(равномерно относительно r), и дальше, если нет связанных состояний (т. е. $f_l(k) \neq 0$ для $\operatorname{Im} k < 0$) имеем

$$\left| k\varrho j_l(k\varrho) . kr j_l(kr) \left[\frac{(2l+1)!!}{(ik)^l . f_l(k)} - 1 \right] \right| \to 0; \quad |k| \to \infty, \quad \operatorname{Im} k \leqq 0 \tag{16'}$$

(равномерно относительно r и ϱ).

Для свободной частицы ($V \equiv 0$) имеем

$$f_l^{(0)}(k) = \frac{(2l+1)!!}{(ik)^l}. \tag{15}$$

Функция $f_l(k)$ является аналитической функцией переменной k, регулярной в открытой нижней полуплоскости и непрерывной на вещественной оси. Нулевые точки функции $f_l(k)$ на отрицательной части мнимой оси k являются простыми и определяют энергию связанных состояний. Дальше мы имеем (¹)

$$\lim_{|k|\to\infty} \left[\frac{(ik)^l}{(2l+1)!!} f_l(k) \right] = 1, \qquad \operatorname{Im} k \leqq 0. \tag{16}$$

С помощью функции $f_l(k)$ можно выразить элементы S-матрицы следующим образом

$$S_l(k) = e^{i\pi l} . \frac{f_l(k)}{f_l(-k)} = (-1)^l . \frac{f_l(k)}{f_l(-k)}. \tag{17}$$

Для вещественного k имеем дальше

$$S_l(k) = e^{2i\eta_l(k)}, \quad f_l(k) = |f_l(k)| . e^{i\delta_l(k)}, \tag{18}$$

где η_l и δ_l представляют l-тый реальный сдвиг фазы. Если в (13) подставим асимптотическую форму функций $f_l(k, r)$ и воспользуемся соотношением (18), то после некоторых преобразований получим

$$\lim_{r\to\infty} \varphi_l(k, r) = \frac{|f_l(k)|}{k} . \sin\left(kr - \frac{1}{2}\pi l + \eta_l\right); \qquad \eta_l - \frac{1}{2}\pi l = \delta_l. \tag{19}$$

3. ЗАМЕНА УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

В дальнейшем мы будем предполагать, что существует первый и второй абсолютный момент потенциала. Потом решение Иоста $f_l(k, r)$ уравнения Шредингера можно записать с помощью функции $f_l^{(0)}(k, r)$ для свободной частицы (11) следующим образом

$$f_l(k, r) = f_l^{(0)}(k, r) + \int_r^\infty K_l(r, t) f_l^{(0)}(k, t)\, dt. \tag{20}$$

Это соотношение определяет функцию $K_l(r, t)$ для $r \leqq t$. Дальше мы определяем

$$K_l(r, t) = 0, \quad \text{для} \quad r > t. \tag{21}$$

Соотношение (21) мы используем в следующем разделе работы. Для свободной частицы имеет место $K_l^{(0)}(r, t) \equiv 0$.

В дальнейшем мы найдем основное дифференциальное уравнение для функции $K_l(r, t)$. Введем следующие обозначения

$$krh_l^{(2)}(kr) = E_l^{(2)}(kr) \tag{22}$$

$$kr = \eta, \quad kt = \xi \tag{23а}$$

$$K_l(r,t) = K_l\left(\frac{\eta}{k}, \frac{\xi}{k}\right) = k \,.\, C(\eta, \xi). \tag{23б}$$

В переменных η, ξ уравнение Шредингера (8) имеет вид

$$\frac{d^2u}{d\eta^2} + u - \left[\frac{l(l+1)}{\eta^2} + \frac{1}{k^2}\,.\,V\right]u = 0 \tag{24}$$

и соотношение (20) запишется в форме

$$i^{l+1} f_l = E_l^{(2)}(\eta) + \int_\eta^\infty C(\eta,\xi)\,E_l^{(2)}(\xi)\,d\xi \equiv g(\eta). \tag{25}$$

Уравнение (24) преобразуем с помощью (25) следующим образом

$$\frac{d^2g}{d\eta^2} + g - \left\{\left[\frac{l(l+1)}{\eta^2} + \frac{V}{k^2}\right]E_l^{(2)}(\eta) + \left[\frac{l(l+1)}{\eta^2} + \frac{V}{k^2}\right]\int_\eta^\infty C(\eta,\xi)\,E_l^{(2)}(\xi)\,d\xi\right\} = 0. \tag{26}$$

В уравнение (26) подставим вместо первого члена выражение

$$\frac{d^2g}{d\eta^2} = \frac{l(l+1)}{\eta^2}E_l^{(2)}(\eta) - E_l^{(2)}(\eta) + \int_\eta^\infty \frac{\partial^2 C(\eta,\xi)}{\partial\eta^2}E_l^{(2)}(\xi)\,d\xi - \left[\frac{\partial C(\eta,\xi)}{\partial\eta}\right]_{\xi=\eta}E_l^{(2)}(\eta) -$$
$$-\left(\frac{d}{d\eta}\frac{C(\eta,\eta)}{\eta^{l+1}}\right)\eta^{l+1}E_l^{(2)}(\eta) - C(\eta,\eta)\left[-E_{l+1}^{(2)}(\eta) + \frac{2l+1}{\eta}E_l^{(2)}(\eta)\right] -$$
$$-\frac{C(\eta,\eta)}{\eta}E_l^{(2)}(\eta) \tag{27}$$

и вместо второго члена выражение (смотри в дополнении Б)

$$g(\eta) = E_l^{(2)}(\eta) - C(\eta,\eta)\,E_{l+1}^{(2)}(\eta) + \left[\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{C(\eta,\xi)}{\xi^{l+1}}\right]_{\xi=\eta}\eta^{l+1}\left[-E_l^{(2)}(\eta) + \frac{2l+3}{\eta}E_{l+1}^{(2)}(\eta)\right] +$$
$$+\int_\eta^\infty\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{1}{\xi}\right)^2\frac{C(\eta,\xi)}{\xi^l}\right]\xi^{l+2}\left[-E_l^{(2)}(\xi) + \frac{2l+3}{\xi}E_{l+1}^{(2)}(\xi)\right]d\xi +$$
$$+\lim_{\xi\to\infty}\left\{C(\eta,\xi)\,E_{l+1}^{(2)}(\xi) - \left[\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{C(\eta,\xi)}{\xi^{l+1}}\right]\xi^{l+1}E_{l+2}^{(2)}(\xi)\right\}. \tag{28}$$

После сокращений (смотри в дополнении Б) мы получим из уравнения (26)

$$-\frac{1}{k^2}E_l^{(2)}(\eta)\left[V + 2k^2\frac{dC(\eta,\eta)}{d\eta}\right] +$$
$$+\int_\eta^\infty d\xi\,E_l^{(2)}(\xi)\left[\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{l(l+1)}{\eta^2} + \frac{l(l+1)}{\xi^2} - \frac{V}{k^2}\right]C(\eta,\xi) +$$
$$+\lim_{\xi\to\infty}\left\{E_l^{(2)}(\xi)\frac{\partial C(\eta,\xi)}{\partial\xi} + C(\eta,\xi)\left[E_{l+1}^{(2)}(\xi) - \frac{l+1}{\xi}E_l^{(2)}(\xi)\right]\right\} = 0. \tag{29}$$

Это уравнение уже имеет искомый вид. Из уравнения (29) мы получаем условия

$$\frac{\partial^2 C(\eta,\xi)}{\partial\eta^2} - \frac{l(l+1)}{\eta^2}C(\eta,\xi) - \left[\frac{\partial^2 C(\eta,\xi)}{\partial\xi^2} - \frac{l(l+1)}{\xi^2}C(\eta,\xi)\right] - \frac{V}{k^2}C(\eta,\xi) = 0, \tag{30а}$$

$$V = -2k^2\frac{dC(\eta,\eta)}{d\eta}, \tag{30б}$$

$$\lim_{\xi\to\infty}\left\{E_l^{(2)}(\xi)\frac{\partial C(\eta,\xi)}{\partial\xi} - C(\eta,\xi)\frac{\partial E_l^{(2)}(\xi)}{\partial\xi}\right\} = 0. \tag{30в}$$

Если теперь вернемся к первоначальным переменным r, t по (23), то из условий (30) получим(²)

$$\frac{\partial^2 K_l(r,t)}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}K_l(r,t) - \left[\frac{\partial^2 K_l(r,t)}{\partial t^2} - \frac{l(l+1)}{t^2}K_l(r,t)\right] = V(r)\,K_l(r,t) \tag{31а}$$

$$V(r) = -2\frac{dK_l(r,r)}{dr} = V_l(r), \tag{31б}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\{kth_l^{(2)}(kt)\frac{\partial K_l(r,t)}{k\,\partial t} - K_l(r,t)\frac{\partial[kth_l^{(2)}(kt)]}{k\,\partial t}\right\} = 0. \tag{31в}$$

Можно показать, что если функцию $K_l(r,t)$, которая удовлетворяет условиям (31), подставим в (20), то функция (20) удовлетворяет уравнению Шредингера (8) [с потенциалом (31б)] и, повидимому, также краевому условию (10).

(²) В уравнение (24) можно также подставить вместо (25) регулярное решение в виде

$$\chi_l(k,r) = krj_l(kr) + \int_0^r N_l(r,t)\,ktj_l(kt)\,dt. \tag{25'}$$

Дело в том, что при выводе условий (31) мы использовали такие соотношения, которым удовлетворяют не только функции $h_l^{(2)}$, но также функции j_l. Поэтому уравнения (31) справедливы также и для функции $N_l(r,t)$, если в них сделаем с учетом (25) и (25') следующие две замены: $K \to -N$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \to \lim\limits_{t\to 0}$. В частности, соотношение (31в) приобретает вид $N_l(r,0) = 0$, поскольку имеет место $[\xi j_l(\xi)]_{\xi=0} = 0$. И аналогично из (31в) можно получить условие: $K_l(r,\infty) = 0$. Уравнения (31) для функции $N_l(r,t)$ приводятся, например, в работе [4].

4. ЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИИ $K_l(r, \varrho)$

В этом разделе работы мы выведем линейное интегральное уравнение, которому удовлетворяет функция $K_l(r, \varrho)$, введенная соотношением (20) и (21). Будем исходить из соотношения (13)

$$\varphi_l(k, r) = \frac{f_l(k)}{2ik}\left[f_l(-k, r) - \frac{f_l(-k)}{f_l(k)} f_l(k, r)\right].$$

Поскольку имеет место

$$\frac{1}{S_l(k)} = (-1)^l \frac{f_l(-k)}{f_l(k)} = S_l(-k),$$

получаем

$$\varphi_l(k, r)\frac{2ik}{f_l(k)} = f_l(-k, r) - (-1)^l S_l(-k) f_l(k, r) + (-1)^l [f_l(k, r) - f_l(k, r)]$$

(последние два члена представляют добавление нуля), или же

$$\varphi_l(k, r)\frac{2ik}{f_l(k)} = (-1)^{l+1}\{f_l(k, r) + (-1)^{l+1} f_l(-k, r)[1 - S_l(-k)]\}.$$

В это соотношение подставим функцию $f_l(k, r)$ в виде

$$f_l(k, r) = i^{-(l+1)} . [E_l^{(2)}(kr) + \int_r^\infty K_l(r, t)\, E_l^{(2)}(kt)\, dt].$$

Получим

$$\frac{2k\varphi_l(k, r)}{i^l . f_l(k)} = E_l^{(2)}(kr) + (-1)^{l+1} E_l^{(2)}(-kr) + \int_r^\infty K_l(r, t)\, E_l^{(2)}(kt)\, dt +$$

$$+ (-1)^{l+1} \int_r^\infty K_l(r, t)\, E_l^{(2)}(-kt)\, dt - E_l^{(2)}(kr)[1 - S_l(-k)] -$$

$$- \int_r^\infty dt\, K_l(r, t)\, E_l^{(2)}(kt)[1 - S_l(-k)].$$

Поскольку (смотри в дополнении соотношение (A 4))

$$E_l^{(2)}(kr) + (-1)^{l+1} . E_l^{(2)}(-kr) = 2kr j_l(kr),$$

получаем

$$\frac{2k\varphi_l(k, r)}{i^l . f_l(k)} - 2kr j_l(kr) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \tag{32}$$

где

$$I_1 = \int_r^\infty K_l(r, t)\, E_l^{(2)}(kt)\, dt,$$

$$I_2 = (-1)^{l+1} \int_r^\infty K_l(r, t)\, E_l^{(2)}(-kt)\, dt,$$

$$I_3 = -E_l^{(2)}(kr) . [1 - S_l(-k)], \tag{33}$$

$$I_4 = -\int_r^\infty dt . K_l(r, t) . E_l^{(2)}(kt) . [1 - S_l(-k)]. \tag{34}$$

Преобразуем эти четыре выражения.

Поскольку, согласно (21) будет $K_l(r, t) = 0$ для $r > t$, то имеет место следующее равенство

$$\int_{-\infty}^{r} K_l(r, t)\, E_l^{(2)}(kt)\, dt = \int_{-\infty}^{r} K_l(r, t)\, E_l^{(2)}(-kt)\, dt = 0. \tag{35}$$

С помощью (35) можно легко доказать, что

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, [K_l(r, t) + (-1)^{l+1} K_l(r, -t)]\, [E_l^{(2)}(kt) + (-1)^{l+1} E_l^{(2)}(-kt)]. \tag{36}$$

Преобразуем выражение (33)

$$I_3 = -\int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa . E_l^{(2)}(-\kappa r)\, [1 - S_l(\kappa)]\, \delta(\kappa + k).$$

Поскольку δ-функцию можно записать в виде (смотри в дополнении соотношение (A 16))

$$\delta(\kappa + k) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, [E_l^{(2)}(-\kappa t) + (-1)^{l+1} E_l^{(2)}(\kappa t)]\, [E_l^{(2)}(kt) + (-1)^{l+1} E_l^{(2)}(-kt)], \tag{37}$$

получаем

$$I_3 = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa\, [1 - S_l(\kappa)]\, E_l^{(2)}(-\kappa r) \times \tag{38}$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, [E_l^{(2)}(-\kappa t) + (-1)^{l+1} E_l^{(2)}(\kappa t)]\, [E_l^{(2)}(kt) + (-1)^{l+1} E_l^{(2)}(-kt)].$$

Чтобы избежать дальнейших осложнений, будем предполагать, что функция $S_l(k)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{1 - S_l(k)}{k^{2l+1}} < \infty \qquad \text{для} \qquad k \to 0. \tag{39}$$

Дело в том, что в таком случае подинтегральное выражение в (38) хорошо определяется на всей вещественной оси κ и поэтому можно изменить порядок интегрирования. Этим мы воспользуемся и в дальнейшем. Если обозначить

$$F_l(r, t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\kappa\,[1 - S_l(\kappa)]\,E_l^{(2)}(-\kappa r)\,E_l^{(2)}(-\kappa t),$$

то из (38) получим

$$I_3 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\,[F_l(r, t) + (-1)^{l+1}F_l(r, -t)]\,[E_l^{(2)}(kt) + (-1)^{l+1}E_l^{(2)}(-kt)]. \quad (40)$$

Наконец мы преобразуем выражение (34)

$$I_4 = -\int_r^{\infty} ds\,.\,K_l(r, s)\,.\,E_l^{(2)}(ks)\,[1 - S_l(-k)].$$

Согласно (33) и (40) имеем

$$-E_l^{(2)}(ks)\,[1 - S_l(-k)] =$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\,[F_l(s, t) + (-1)^{l+1}F_l(s, -t)]\,[E_l^{(2)}(kt) + (-1)^{l+1}E_l^{(2)}(-kt)]$$

и поэтому I_4 можно записать в виде

$$I_4 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\left[\int_r^{\infty} ds\,K_l(r, s)\,F_l(s, t) + (-1)^{l+1}\int_r^{\infty} ds\,K_l(r, s)\,F_l(s, -t)\right]\times \quad (41)$$
$$\times\,[E_l^{(2)}(kt) + (-1)^{l+1}E_l^{(2)}(-kt)].$$

Теперь подставим преобразованные выражения (36), (40) и (41) в соотношение (32). После небольших преобразований мы получим

$$\frac{2k^{l+1}\varphi_l(k, r)}{(2l + 1)!!}\left[\frac{(2l + 1)!!}{(ik)^l.f_l(k)} - 1\right] + 2k^{l+1}\left[\frac{\varphi_l(k, r)}{(2l + 1)!!} - \frac{kr\,.\,j_l(kr)}{k^{l+1}}\right] = \quad (42)$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\,[M_l(r, t) + (-1)^{l+1}.\,M_l(r, -t)]\,[E_l^{(2)}(kt) + (-1)^{l+1}.\,E_l^{(2)}(-kt)],$$

где

$$M_l(r, t) = K_l(r, t) + \int_r^{\infty} K_l(r, s)\,.\,F_l(s, t)\,ds + F_l(r, t). \quad (43)$$

Уравнение (42) умножим на выражение

$$E_l^{(2)}(k\varrho) + (-1)^{l+1}E_l^{(2)}(-k\varrho) = 2k\varrho j_l(k\varrho)$$

и интегрируем $\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots dk$. Получим

$$4\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,\frac{\varphi_l(k, r)}{(2l + 1)!!}\,k^{l+1}k\varrho j_l(k\varrho)\left[\frac{(2l + 1)!!}{(ik)^l.f_l(k)} - 1\right] +$$
$$+ 4\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,k^{l+1}k\varrho j_l(k\varrho)\left[\frac{\varphi_l(k, r)}{(2l + 1)!!} - \frac{krj_l(kr)}{k^{l+1}}\right] = \quad (44)$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\,[M_l(r, t) + (-1)^{l+1}M_l(r, -t)]\times$$
$$\times\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,[E_l^{(2)}(kt) + (-1)^{l+1}E_l^{(2)}(-kt)]\,[E_l^{(2)}(k\varrho) + (-1)^{l+1}E_l^{(2)}(-k\varrho)].$$

Если в (44) интеграл $\int\ldots dt$ от двух членов считать суммой двух интегралов, то правая сторона соотношения (44) примет вид

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\,M_l(r, t)\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,[E_l^{(2)}(kt) + (-1)^{l+1}E_l^{(2)}(-kt)]\,[E_l^{(2)}(k\varrho) + (-1)^{l+1}E_l^{(2)}(-k\varrho)] +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dt\,M_l(r, -t)\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,[E_l^{(2)}(-kt) + (-1)^{l+1}E_l^{(2)}(kt)]\times \quad (45)$$
$$\times\,[E_l^{(2)}(k\varrho) + (-1)^{l+1}E_l^{(2)}(-k\varrho)].$$

Если используем для δ-функции выражение (37), то первый интеграл $\int\ldots dk$ в (45) равняется выражению $4\pi\delta(t - \varrho)$, а второй интеграл равен $4\pi\,.\,\delta(t + \varrho)$. Учитывая это выражение, можно записать соотношение (45), т. е. правую сторону уравнения (44), в виде

$$\text{правая сторона уравнения (44)} = 4\pi\,.\,M_l(r, \varrho). \quad (46)$$

Интегралы, которые находятся на левой стороне уравнения (44), можно выразить следующим образом. В комплексной плоскости k замкнем путь интегрирования этих интегралов с помощью нижней полуокружности. Если ее радиус неограниченно возрастает, то учитывая (12′) и (16′) получим, что оба интеграла равны нулю, поскольку оба подинтегральных выражения являются аналитическими функциями на всей нижней полуплоскости (если нет связанных состояний)([3]). Итак в данном случае имеем

$$\text{левая сторона уравнения (44)} = 0\,. \quad (47)$$

([3]) Используя теорему вычетов можно включить в рассуждения также существование связанных состояний, подобно как в [1].

Учитывая (46) и (47) получаем конечное уравнение

$$M_l(r,\varrho) \equiv K_l(r,\varrho) + \int_r^\infty K_l(r,s)\,F_l(s,\varrho)\,ds + F_l(r,\varrho) = 0\,, \tag{48}$$

где

$$F_l(r,\varrho) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk\,[1 - S_l(k)]\,E_l^{(2)}(-kr)\,E_l^{(2)}(-k\varrho),$$
$$E_l^{(2)}(z) = z h_l^{(2)}(z). \tag{49}$$

Функцию $S_l(k)$ можно выразить с помощью парциальной амплитуды рассеяния $A_l(k)$ по формуле

$$A_l(k) = \frac{i}{2k}[1 - S_l(k).$$

Если считать парциальную амплитуду A_l функцией энергии $v = k^2$, то ядро $F_l(r,\varrho)$ можно записать в виде

$$F_l(r,\varrho) = -\frac{1}{2\pi i}\int_C dv\,A_l(v)\,E_l^{(2)}(-r\sqrt{v})\,E_l^{(2)}(-\varrho\sqrt{v}) \tag{50}$$

при предположении, что

$$A_l(v) \sim v^l \quad (v \to 0)\,.$$

Кривая интегрирования C изображена на рис. 1. Значения энергии в (50) мы рассматриваем на первой Римановой поверхности ($\mathrm{Im}\sqrt{v} > 0$).(4)

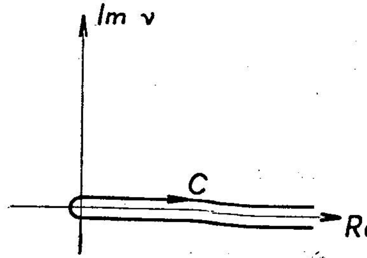

Рис. 1. Путь интегрирования для интеграла (50) и (50′).

Уравнение (48) является искомым линейным интегральным уравнением для функции $K_l(r,\varrho)$. Дело в том, что если известны аналитические свойства функции $S_l(k)$ (или же $A_l(v)$) в верхней полуплоскости импульса k (или же на первой Римановой поверхности энергии v), то можно определить ядро $F_l(r,\varrho)$ с помощью (49) (или же (50)); путь интегрирования замыкаем обычно верхней

(4) В некоторых случаях представляет обойденная положительная часть вещественной оси v физический разрез амплитуды рассеяния.

полуокружностью радиусом R; на этой полуокружности для $R \to \infty$ будет $E_l^{(2)}(-z) \to 0$. Если нам известно ядро $F_l(r,\varrho)$, то решая уравнение (48), можно найти функцию $K_l(r,\varrho)$. Забегая в следующий раздел работы можно сказать, что потом с помощью $K_l(r,\varrho)$ мы орпеделим потенциал по (31б) и соответствующее решение Иоста уравнения Шредингера по формуле (20).

Для $l = 0$ уравнение (48) представляет собой уравнение Аграновича-Марченко [1], которое обсуждалось в работе [8].

5. ФУНКЦИЯ $K_l(r,\varrho)$ И УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

В настоящем разделе работы мы покажем, что если выполнено уравнение (48).

$$M_l(r,\varrho) = 0$$

$$M_l(r,\varrho) \equiv K_l(r,\varrho) + \int_r^\infty K_l(r,t)\,F_l(t,\varrho)\,dt + F_l(r,\varrho)$$

с ядром (49)

$$F_l(r,\varrho) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa\,[1 - S_l(\kappa)]\,E_l^{(2)}(-\kappa r)\,E_l^{(2)}(-\kappa\varrho)$$

и если выполнено соотношение (31б)

$$-2\frac{dK_l(r,r)}{dr} = V(r),$$

то будет выполнено также уравнение (29), которое представляет собой в данном случае уравнение Шредингера.

Частные производные выражения $M_l(r,\varrho)$ можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial^2 M_l(r,\varrho)}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 F_l(r,\varrho)}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 K_l(r,\varrho)}{\partial r^2} +$$
$$+ \left\{-\frac{dK_l(r,r)}{dr}F_l(r,\varrho) - K_l(r,r)\frac{\partial F_l(r,\varrho)}{\partial r} - \left[\frac{\partial K_l(r,t)}{\partial r}\right]_{t=r} F_l(r,\varrho)\right\} +$$
$$+ \int_r^\infty \frac{\partial^2 K_l(r,t)}{\partial r^2}F_l(t,\varrho)\,dt;$$

$$\frac{\partial^2 M_l(r,\varrho)}{\partial\varrho^2} = \frac{\partial^2 F_l(r,\varrho)}{\partial\varrho^2} + \frac{\partial^2 K_l(r,\varrho)}{\partial\varrho^2} + \int_r^\infty K_l(r,t)\,\frac{\partial^2 F_l(t,\varrho)}{\partial\varrho^2}\,dt\,;$$

т. е.

$$\frac{\partial^2 M_l(r,\varrho)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 M_l(r,\varrho)}{\partial\varrho^2} = \frac{\partial^2 F_l(r,\varrho)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 F_l(r,\varrho)}{\partial\varrho^2} + \frac{\partial^2 K_l(r,\varrho)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 K_l(r,\varrho)}{\partial\varrho^2} +$$

$$+ \{\dots\} + \int_r^\infty \left[\frac{\partial^2 K_l(r,t)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 K_l(r,t)}{\partial t^2}\right] F_l(t,\varrho)\,dt +$$

$$+ \int_r^\infty \left[\frac{\partial^2 K_l(r,t)}{\partial t^2} F_l(t,\varrho) - K_l(r,t)\frac{\partial^2 F_l(t,\varrho)}{\partial \varrho^2}\right] dt. \tag{51}$$

Поскольку имеет место соотношение (смотри формулу (A 11) в дополнении)

$$\frac{\partial^2 E_l^{(2)}(-\kappa r)}{\partial r^2} = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \kappa^2\right] E_l^{(2)}(-\kappa r), \tag{52}$$

то получаем

$$\frac{\partial^2 F_l(r,\varrho)}{\partial r^2} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\kappa\,[1 - S_l(\kappa)]\left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \kappa^2\right] E_l^{(2)}(-\kappa r)\,E_l^{(2)}(-\kappa\varrho)$$

и аналогично для $\partial^2 F_l(r,\varrho)/\partial\varrho^2$. Поэтому можно писать

$$\frac{\partial^2 F_l(r,\varrho)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 F_l(r,\varrho)}{\partial \varrho^2} = \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2}\right] F_l(r,\varrho). \tag{53}$$

С помощью (53) преобразуем последний интеграл в соотношении (51) следующим образом

$$\begin{aligned}
&\int_r^\infty \left[\frac{\partial^2 K_l(r,t)}{\partial t^2} F_l(t,\varrho) - K_l(r,t)\frac{\partial^2 F_l(t,\varrho)}{\partial \varrho^2}\right] dt = \\
&= \int_r^\infty \left[\frac{\partial^2 K_l(r,t)}{\partial t^2} F_l(t,\varrho) - K_l(r,t)\frac{\partial^2 F_l(t,\varrho)}{\partial t^2}\right] dt + \\
&+ \int_r^\infty \left[\frac{l(l+1)}{t^2} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2}\right] K_l(r,t)\,F_l(t,\varrho)\,dt = \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{\partial K_l(r,t)}{\partial t} F_l(t,\varrho) - K_l(r,t)\frac{\partial F_l(t,\varrho)}{\partial t}\right] - \\
&- \left[\frac{\partial K_l(r,t)}{\partial t}\right]_{t=r} F(r,\varrho) + K_l(r,r)\frac{\partial F_l(r,\varrho)}{\partial r} + \\
&+ \int_r^\infty \left[\frac{l(l+1)}{t^2} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2}\right] K_l(r,t)\,F_l(t,\varrho)\,dt.
\end{aligned} \tag{54}$$

Выражения (53) и (54) подставим в (51). Воспользуемся соотношением

$$\frac{dK_l(r,r)}{dr} = \left[\frac{\partial K_l(r,t)}{\partial r}\right]_{t=r} + \left[\frac{\partial K_l(r,t)}{\partial t}\right]_{t=r} \tag{55}$$

и после небольших преобразований получим из (51)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 M_l(r,\varrho)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 M_l(r,\varrho)}{\partial \varrho^2} = \frac{\partial^2 K_l(r,\varrho)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 K_l(r,\varrho)}{\partial \varrho^2} + \\
&+ \int_r^\infty \left[\frac{\partial^2 K_l(r,t)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 K_l(r,t)}{\partial t^2} + \frac{l(l+1)}{t^2} K_l(r,t) - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} K_l(r,t)\right] F_l(t,\varrho)\,dt + \\
&+ \lim_{t\to\infty}\left[\frac{\partial K_l(r,t)}{\partial t} F_l(t,\varrho) - K_l(r,t)\frac{\partial F_l(t,\varrho)}{\partial t}\right] + \\
&+ \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} - 2\frac{dK_l(r,r)}{dr}\right] F_l(r,\varrho).
\end{aligned} \tag{56}$$

В последний член уравнения (56) подставим вместо функции $F_l(r,\varrho)$ ее выражение по (43)

$$F_l(r,\varrho) = M_l(r,\varrho) - K_l(r,\varrho) - \int_r^\infty K_l(r,t)\,F_l(t,\varrho)\,dt.$$

Если обозначить

$$\mathscr{L}[A(x,y)] \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{l(l+1)}{y^2} + \frac{l(l+1)}{y^2} + 2\frac{dK_l(x,x)}{dx}\right] A(x,y),$$

то из (56) после небольших преобразований получим

$$\mathscr{L}[M_l(r,\varrho)] = \mathscr{L}[K_l(r,\varrho)] + \int_r^\infty \mathscr{L}[K_l(r,t)]\,F_l(t,\varrho)\,dt + R_l, \tag{57}$$

где

$$R_l \equiv \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\partial K_l(r,t)}{\partial t} F_l(t,\varrho) - K_l(r,t)\frac{\partial F_l(t,\varrho)}{\partial t}\right). \tag{58}$$

Учитывая (57) можно считать соотношение

$$R_l = 0 \tag{59}$$

краевым условием для функции $K_l(r,t)$. Выражение (58) можно еще преобразовать следующим образом: в (58) подставим функцию $F_l(t,\varrho)$ по (49) и используем соотношение (смотри соотношение (A 12) в дополнении)

$$\frac{\partial E_l^{(2)}(-\kappa t)}{\partial t} = \kappa\left[E_{l+1}^{(2)}(-\kappa t) + \frac{l+1}{\kappa t} E_l^{(2)}(-\kappa t)\right].$$

После некоторых преобразований мы обнаружим, что

$$R_l = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\,[1 - S_l(-k)]\,E_l^{(2)}(k\varrho)\,k\,\times$$

$$\times \lim_{t\to\infty}\left\{E_l^{(2)}(kt)\,\frac{\partial K_l(r,t)}{k\,\partial t} + K_l(r,t)\left[E_{l+1}^{(2)}(kt) - \frac{l+1}{kt}\,E_l^{(2)}(kt)\right]\right\}.$$

Учитывая соотношения (Б 6) и (Б 7) из дополнения, получаем дальше

$$R_l = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}k\,[1 - S_l(-k)]\,E_l^{(2)}(k\varrho)\,k\lim_{t\to\infty}\left\{E_l^{(2)}(kt)\frac{\partial K_l(r,t)}{k\,\partial t} - K_l(r,t)\frac{\partial E_l^{(2)}(kt)}{k\,\partial t}\right\}. \tag{60}$$

Если в (59) используем выражение (60), то получим

$$\lim_{t\to\infty}\left\{E_l^{(2)}(kt)\,\frac{\partial K_l(r,t)}{k\,\partial t} - K_l(r,t)\,\frac{\partial E_l^{(2)}(kt)}{k\,\partial t}\right\} = 0 \tag{61}$$

а это и есть условие (31в). Потом вместо (57) мы имеем уравнение

$$\mathscr{L}[M_l(r,\varrho)] = \mathscr{L}[K_l(r,\varrho)] + \int_r^{\infty} \mathscr{L}[K_l(r,t)]\,F_l(t,\varrho)\,\mathrm{d}t\,.$$

Если предположить, что выполнено основное интегральное уравнение (48), то имеет место $\mathscr{L}[M_l(r,\varrho)] = 0$ и мы получаем уравнение

$$\mathscr{L}[K_l(r,\varrho)] + \int_r^{\infty} \mathscr{L}[K_l(r,t)]\,.\,F_l(t,\varrho)\,\mathrm{d}t = 0\,,$$

о котором можно, однако, доказать, что имеет только нулевое решение, т. е. справедливо

$$\mathscr{L}[K_l(r,\varrho)] = 0\,. \tag{62}$$

Таким образом выполнено также и уравнение (31а). Поскольку мы предполагаем еще выполнение условия (31δ), то теперь выполнены все условия (31) и поэтому справедливо уравнение (29), или же уравнение Шредингера (8), и его решение $f_l(k,r)$ можно получить с помощью $K_l(r,\varrho)$ по формуле (20).

6. ДИССКУСИЯ

Если примем амплитуду рассеяния за основную величину, описывающую рассматриваемый процесс рассеяния, то можно считать полученное интегральное уравнение (48) основным исходным уравнением. Из него мы вышеприведенным способом получим уравнение Шредингера. Однако, чтобы в конечном итоге получить потенциалы, обладающие первым и вторым абсолютным моментом, мы должны предположить, что амплитуда, или матрица, рассеяния имеет определенные свойства.

Например, мы предполагаем, что для $l = 1$ функция $S_1(k)$ имеет три полюса в точках $k = k_s$, $\operatorname{Im} k_s > 0 (s = 1, 2, 3)$. Ядро $F_1(r,\varrho)$ уравнения (48) мы определим из соотношения (49) таким образом, что путь интегрирования замкнем полуокружностью радиусом R в верхней полуплоскости импульса k. Если предположить, что интеграл (49) на этой полуокружности в пределе $(R\to\infty)$ равняется нулю, то с помощью теоремы вычетов получим

$$F_1(r,\varrho) = \sum_{s=1}^{3} \sigma_s\,.\,E_1^{(2)}(-k_s r)\,.\,E_1^{(2)}(-k_s\,.\,\varrho)\,,$$

где

$$\sigma_s = \mathrm{i}\,.\operatorname*{Res}_{k=k_s} S_1(k).$$

Если будем предполагать функцию $K_1(r,\varrho)$ в виде

$$K_1(r,\varrho) = \sum_{s=1}^{3} M_s(r)\,.\,E_1^{(2)}(-k_s\,.\,\varrho),$$

то из (48) получим

$$M_s(r) + \sigma_s\sum_{t=1}^{3} M_t(r)\int_r^{\infty} E_1^{(2)}(-k_s\varrho)\,E_1^{(2)}(-k_t\varrho)\,\mathrm{d}\varrho + \sigma_s E_1^{(2)}(-k_s r) = 0. \tag{63}$$

Интегралы, которые фигурируют в (63) можно вычислить с помощью (А 13—14).

Предположение (39), т. е.

$$\lim_{k\to0}\frac{1-S_1(k)}{k^3} < \infty, \tag{64а}$$

которое мы использовали при вычислении ядра $F_1(r,\varrho)$, приводит в данном случае к условию

$$\lim_{r\to0}(r\,.\,\varDelta) = 0, \tag{65а}$$

где $\varDelta$ — определитель системы (63). Можно показать, что независимо от того, будет ли условие (65а) справедливо или нет, существует второй (и несуществует первой) абсолютный момент потенциала, полученного вышеприведенным способом. Если условие (65а) недействительно, то для функции $f_1(k,r)$ имеет место равенство $\lim\limits_{r\to0} f_1(k,r) = \text{konst}$. Если же (65а) действительно, то существует предел $\lim\limits_{r\to0} r\,.\,f_1(k,r)$, который вообще говоря отличен от нуля.

Если мы дальше потребуем, чтобы выполнялось соотношение (16), т. е.

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f_1(k)}{f_1^{(0)}(k)} = \text{konst} \equiv 1, \qquad \operatorname{Im} k \leqq 0, \tag{64δ}$$

то нужно выполнить еще одно условие:

$$\lim_{r\to 0}\left(r\frac{d\Delta}{dr}\right)=0. \tag{65б}$$

Можно показать, что если выполнены условия (65а, б), то существует также и первый абсолютный момент потенциала (выполнение одного только условия (65б) недостаточно). В рассматриваемом случае условия (65) имеют вид, показанный в дополнении В.

К двум условиям (65) добавляется еще одно условие, которое должно гарантировать в нашем случае отсутствие связанных состояний. Это условие можно получить, например, с помощью [9]. Если рассматривать в случае p-рассеяния три и больше полюсов функции $S_1(k)$ ($\mathrm{Im}\, k > 0$), то эти условия можно выполнить. Потенциалы, полученные этим методом, на больших расстояниях от начала падают экспоненциально до нуля.

В случае более высоких моментов можно подобным способом найти условия, аналогичные условиям (65а, б).

Наконец упомянем еще один случай, когда функция $S_l(k)$ имеет разрыв в определенном интервале импульса k, например для $k = \mathrm{i}x$, $0 < \mu < x < \infty$. Если предположить, что в интеграле (49), замкнутом в верхней полуплоскости большой полуокружностью, линиями вдоль сечения и малой полуокружностью в окрестности точки $k = \mathrm{i}\mu$, интеграл вдоль упомянутой большой и малой полуокружностей в пределе равен нулю, то можно сравнительно легко показать, что полученный потенциал можно записать в виде

$$V(r) = \int_{\mu}^{\infty} \omega_l(x)\, e^{-2xr}\, dx, \quad 0 < r < \infty$$

или же

$$V(r) = \int_{\mu}^{\infty} \Omega_l(x)\, \frac{e^{-2xr}}{r}\, dx.$$

Притом функции $\omega_l(x)$, $\Omega_l(x)$ связаны с разрывностью функции $S_l(k)$ в упомянутом интервале. (К этой связи смотри напр. [11].)

Если используем вышеприведенный метод в случае релятивистского потенциального рассеяния, то получим потенциалы, зависящие от энергии.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, как можно сопоставить потенциал $V = V_l(r)$ данной парциальной амплитуде рассеяния. В конце работы мы еще покажем, как можно перейти от основного интегрального уравнения (48), в котором фигурирует парциальная

амплитуда рассеяния, к уравнению, в котором фигурирует полная амплитуда рассеяния.

Определим новую функцию $U(r, \vartheta)$

$$U(r,\vartheta) \equiv U(r, \vec{n}_1 . \vec{n}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, V_l(r)\, P_l(\vec{n}_1 . \vec{n}_2),$$

где $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ — два единичных вектора, P_l — полиномы Лежандра, и $V_l(r)$ — потенциалы, полученные из соотношения (31б). Дальше мы определяем волновую функцию

$$\psi(k, r, \vartheta) \equiv \psi(k, r, \vec{n}_1 . \vec{n}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, \frac{u_l(k,r)}{r}\, P_l(\vec{n}_1 . \vec{n}_2),$$

где $u_l(k, r)$ является решением уравнения Шредингера (1). С помощью функций U и ψ можно выразить член взаимодействия в уравнении Шредингера $\hat{H}\psi = (\hat{T} + \hat{U})\,\psi = E\psi$ в виде

$$\hat{U}\psi = \int_{\Omega_{\vec{n}}} U(r, \vec{n}_1 . \vec{n})\, \psi(k, r, \vec{n} . \vec{n}_2)\, \frac{d\Omega_{\vec{n}}}{4\pi}.$$

Как видно, этот член является нелокальным в угле.(5)

Дальше мы определяем функции $\mathscr{K}$, $\mathscr{F}$ и $\mathscr{N}$

$$\mathscr{K}(r, \varrho; \vec{n}_1 . \vec{n}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, K_l(r,\varrho)\, P_l(\vec{n}_1 . \vec{n}_2),$$

$$\mathscr{F}(r, \varrho; \vec{n}_1 . \vec{n}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, F_l(r,\varrho)\, P_l(\vec{n}_1 . \vec{n}_2),$$

$$\mathscr{N}(r, \varrho; v; \vec{n}_1 . \vec{n}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, E_l^{(2)}(-r\sqrt{v})\, E_l^{(2)}(-\varrho\sqrt{v})\, P_l(\vec{n}_1 . \vec{n}_2).$$

Тогда можно основное уравнение (48) записать в виде

$$\mathscr{K}(r, \varrho; \vec{n}_1 . \vec{n}_2) = \int_r^{\infty} dt \int_{\Omega_{\vec{n}}} \frac{d\Omega_{\vec{n}}}{4\pi}\, \mathscr{K}(r, t; \vec{n}_1 . \vec{n})\, \mathscr{F}(t, \varrho; \vec{n} . \vec{n}_2) + \mathscr{F}(r, \varrho; \vec{n}_1 . \vec{n}_2) = 0, \tag{48'}$$

где

$$\mathscr{F}(r, \varrho; \vec{n}_1 . \vec{n}_2) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C dv \int_{\Omega_{\vec{n}}} \frac{d\Omega_{\vec{n}}}{4\pi}\, \mathscr{A}(v, \vec{n}_1 . \vec{n})\, \mathscr{N}(r, \varrho; v; \vec{n} . \vec{n}_2). \tag{50'}$$

---

(5) Если потенциал $V(r)$ не зависит на l, то взаимодействие $\hat{U}\psi$ является локальным в конфигурационном пространстве ($\hat{U}\psi = V(r)\,\psi$).

В соотношении (50') мы ввели полную амплитуду рассеяния $\mathscr{A}(v, \cos\vartheta)$

$$\mathscr{A}(v, \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\, A_l(v)\, P_l(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2),$$

где A_l представляет собой парциальную амплитуду рассеяния. В данном случае соотношение (31б) имеет вид

$$U(r, \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = -2\,\frac{\mathrm{d}\mathscr{K}(r, r; \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)}{\mathrm{d}r},$$

где $\mathscr{K}$ является решением уравнения (48'). Уравнение (48') позволяет определить функцию $\mathscr{K}$ с помощью ядра $\mathscr{F}$ (50'), в котором фигурирует в явном виде полная амплитуда рассеяния $\mathscr{A}$.

Таким образом, с помощью предложенного метода можно использовать для определения потенциала полную амплитуду рассеяния, которую, повидимому, можно выразить различными способами (например представлением Редже [5]).

ДОПОЛНЕНИЕ А

Сферическая цилиндрическая функция $z_l(x)$, соответствующая цилиндрической функции $Z_p(x)$, определена следующим образом(6)

$$z_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, Z_{l+\frac{1}{2}}(x).$$

Связь между сферической функцией Бесселя $j_l(x)$ и сферической функцией Ханкеля первого рода $h_l^{(1)}(x)$ и второго рода $h_l^{(2)}(x)$ такова

$$j_l(x) = \frac{1}{2}\,[h_l^{(1)}(x) + h_l^{(2)}(x)]. \qquad \text{(A 1)}$$

Справедливы следующие соотношения

$$j_l(-x) = (-1)^l \cdot j_l(x), \qquad h_l^{(1)}(-x) = (-1)^l \cdot h_l^{(2)}(x). \qquad \text{(A 2)}$$

Обозначим теперь, как мы это сделали в (22)

$$x h_l^{(j)}(x) = E_l^{(j)}(x); \quad j = 1, 2. \qquad \text{(A 3)}$$

Мы имеем

$$E_l^{(2)}(x) = \mathrm{i}^{l+1}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} \sum_{s=0}^{l} \frac{B_s(l)}{(\mathrm{i}x)^s}$$

(6) Основные соотношения для сферических цилиндрических функций взяты из работы [10].

где

$$B_s(l) = \frac{1}{2^s . s!} \cdot \frac{(l+s)!}{(l-s)!};$$

например

$$E_0^{(2)}(x) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}; \qquad E_1^{(2)}(x) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\left(1 + \frac{1}{\mathrm{i}x}\right);$$

$$E_2^{(2)}(x) = -\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\left[1 + \frac{3}{\mathrm{i}x} + \frac{3}{(\mathrm{i}x)^2}\right]; \ \ldots$$

Если учтем (А 1), (А 2) и (А 3), то получим

$$2x j_l(x) = E_l^{(2)}(x) + (-1)^{l+1} \cdot E_l^{(2)}(-x). \qquad \text{(A 4)}$$

С помощью рекуррентного соотношения для функции $h_l(x)$ мы обнаружим, что для функции $E_l(x)$ справедлива следующая формула(7)

$$E_{l+2}(x) = \frac{2l+3}{x}\, E_{l+1}(x) - E_l(x). \qquad \text{(A 5)}$$

Это соотношение мы будем в дальнейшем обозначать следующим образом

$$E[(l+2) \to (l+1), l]. \qquad \text{(A 6)}$$

Дальше имеем

$$\int x^{l+1} E_l(x)\, \mathrm{d}x = x^{l+1} E_{l+1}(x) \qquad \text{(A 7)}$$

или же

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,[x^l E_l(x)] = x^l E_{l-1}(x). \qquad \text{(A 8)}$$

С помощью (А 8) мы приходим к соотношениям

$$\frac{\mathrm{d}E_l(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{x^l} \cdot x^l E_l(x)\right] = \frac{-l}{x^{l+1}}\, x^l E_l(x) + \frac{1}{x^{l-1}} \cdot x^{l-1} E_{l-1}(x) \qquad \text{(A 9)}$$

и

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_l(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{l(l+1)}{x^2}\, E_l(x) - \frac{l}{x}\, E_{l-1}(x) - \frac{l-1}{x}\, E_{l-1}(x) + E_{l-2}(x). \qquad \text{(A 10)}$$

Если последний член в (А 10) заменим согласно (А 6) следующим образом $E[(l-2) \to (l-1), l]$, то получим

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_l(x)}{\mathrm{d}x^2} = \left[\frac{l(l+1)}{x^2} - 1\right] E_l(x). \qquad \text{(A 11)}$$

(7) Если мы не приводим верхний индекс, то приведенные соотношения справедливы для обеих функций $E_l^{(1)}$ и $E_l^{(2)}$.

Подставив в (А 9) согласно (А 6) соотношение $E[(l-1) \to l, (l+1)]$, получаем

$$\frac{dE_l(x)}{dx} = \frac{l+1}{x} E_l(x) - E_{l+1}(x). \tag{А 12}$$

Приведем еще два соотношения, которым удовлетворяют функции $E_l(x)$:

$$\int E_l(\alpha x)\, E_l(\beta x)\, dx = \frac{1}{\alpha^2 - \beta^2} \{\beta E_l(\alpha x)\, E_{l-1}(\beta x) - \alpha E_{l-1}(\alpha x)\, E_l(\beta x)\}; \qquad |\alpha| \neq |\beta| \tag{А 13}$$

$$\int [E_l(\alpha x)]^2 dx = \frac{1}{2} x \{[E_l(\alpha x)]^2 - E_{l-1}(\alpha x)\, E_{l+1}(\alpha x)\}. \tag{А 14}$$

С помощью сферических цилиндрических функций мы можем выразить также и δ-функцию, т. к. имеет место соотношение

$$\delta(\alpha - \beta) = \sqrt{\alpha\beta} \int_0^\infty J_p(\alpha t) \cdot J_p(\beta t)\, t\, dt,$$

где J_p функции Бесселя (первого рода). Если сюда введем сферические функции Бесселя j_l, то получим

$$\delta(\alpha - \beta) = \frac{2\alpha\beta}{\pi} \int_0^\infty j_l(\alpha t)\, j_l(\beta t)\, t^2\, dt.$$

Используя (А 2) мы получим $\int\limits_0^\infty \to \frac{1}{2} \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty}$, т. е.

$$\delta(\alpha - \beta) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [2\alpha t \cdot j_l(\alpha t)]\, [2\beta t \cdot j_l(\beta t)]\, dt. \tag{А 15}$$

Если в (А 15) подставим (А 4), то получим

$$\delta(\alpha - \beta) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, [E_l^{(2)}(\alpha t) + (-1)^{l+1} E_l^{(2)}(-\alpha t)]\, [E_l^{(2)}(\beta t) + (-1)^{l+1} E_l^{(2)}(-\beta t)]. \tag{А 16}$$

Напомним еще, что согласно (А 4) подинтегральное выражение в (А 15), а значит и в (А 16), регулярно для $t \to 0$, т. к. имеет место $j_l{}^{(x)} \underset{x \to 0}{\sim} x^l$.

ДОПОЛНЕНИЕ Б

Выведем уравнение (29).

В соотношении (25) мы ввели функцию $g(\eta)$

$$g(\eta) = E_l^{(2)}(\eta) + \int_\eta^\infty C(\eta, \xi)\, E_l^{(2)}(\xi)\, d\xi. \tag{Б 1}$$

Вычислим теперь $d^2 g/(\eta)\, d\eta^2$. С этой целью мы запишем $g(\eta)$ следующим образом

$$g(\eta) = \frac{1}{\eta^l} \eta^l E_l^{(2)}(\eta) + \int_\eta^\infty C(\eta, \xi)\, E_l^{(2)}(\xi)\, d\xi.$$

Используя (А 8), мы придем к соотношению

$$\frac{dg}{d\eta} = \frac{-l}{\eta^{l+1}} \eta^l E_l^{(2)}(\eta) + \frac{1}{\eta^{l-1}} \eta^{l-1} E_{l-1}(\eta) + \int_\eta^\infty \frac{\partial C(\eta, \xi)}{\partial \eta} E_l^{(2)}(\xi)\, d\xi - \frac{C(\eta, \eta)}{\eta^{l+1}} \eta \eta^l E_l(\eta)$$

и дальше уже определяем $d^2 g(\eta)/d\eta^2$ прямым способом. В эту вторую производную мы подставим согласно (А 6) соотношения $E[(l-2) \to (l-1), l]$ и потом $E[(l-1) \to l, (l+1)]$. Таким образом мы получим для $d^2 g(\eta)/d\eta^2$ выражение, приведенное в основном тексте в соотношении (27).

Дальше мы выразим функцию (Б 1), осуществив обозначенное в ней интегрирование. Поэтому сначала выразим (Б 1) следующим образом

$$g(\eta) = E_l^{(2)}(\eta) + \int_\eta^\infty \frac{C(\eta, \xi)}{\xi^{l+1}} \xi^{l+1} E_l^{(2)}(\xi)\, d\xi. \tag{Б 2}$$

Используем (А 7) и потом согласно (А 6) соотношение $E[(l+2) \to (l+1), l]$. После двухкратного интегрирования (по частям) в (Б 2) получим для функции $g(\eta)$ выражение, приведенное в тексте в соотношении (28).

Если таким образом вычисленные функции $g(\eta)$ и $d^2 g(\eta)/d\eta^2$ подставим в уравнение Шредингера (26) для функции $g(\eta)$, то после простых (несколько кропотливых) преобразований получим уравнение

$$-E_l^{(2)}(\eta) \left\{ \frac{dC(\eta, \eta)}{d\eta} + \left[\frac{\partial C(\eta, \xi)}{\partial \eta} \right]_{\xi = \eta} + \left[\frac{\partial C(\eta, \xi)}{\partial \xi} \right]_{\xi = \eta} + \frac{V}{k^2} \right\} +$$

$$+ \int_\eta^\infty d\xi\, E_l^{(2)}(\xi) \left\{ \frac{\partial^2 C(\eta, \xi)}{\partial \eta^2} - \left[\left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\xi} \right)^2 \frac{C(\eta, \xi)}{\xi^l} \right] \xi^{l+2} - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{l(l+1)}{\eta^2} + \frac{V}{k^2} \right] C(\eta, \xi) \right\} +$$

$$+ \lim_{\xi \to 0} \left\{ C(\eta, \xi)\, E_{l+1}^{(2)}(\xi) - \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{C(\eta, \xi)}{\xi^{l+1}} \right] \xi^{l+1} E_{l+2}^{(2)}(\xi) \right\} +$$

$$+ E^{(2)}_{l+1}(\eta)\left\{(2l+3)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\,\frac{C(\eta,\xi)}{\xi^{l+1}}\right]_{\xi=\eta}\eta^{l}\right\} +$$

$$+ \int_{\eta}^{\infty} \mathrm{d}\xi\, E^{(2)}_{l+1}(\xi)\left\{(2l+3)\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\,\frac{1}{\xi}\right)^{2}\frac{C(\eta,\xi)}{\xi^{l}}\right]\xi^{l+1}\right\} = 0. \qquad (Б\,3)$$

Дальше путем интегрирования по частям можно убедиться, что последние два члена в (Б 3) можно писать в виде

$$E^{(2)}_{l+1}(\eta)\,.\,\{\ldots\} + \int_{\eta}^{\infty}\mathrm{d}\xi\,.\,E^{(2)}_{l+1}(\xi)\,.\,\{\ldots\} =$$

$$= -(2l+3)\int_{\eta}^{\infty}\mathrm{d}\xi\, E^{(2)}_{l}(\xi)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\,\frac{C(\eta,\xi)}{\xi^{l+1}}\right]\xi^{l} +$$

$$+ (2l+3)\lim_{\xi\to\infty}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\,\frac{C(\eta,\xi)}{\xi^{l+1}}\right]\xi^{l}E^{(2)}_{l+1}(\xi)\right\}. \qquad (Б\,4)$$

Используя соотношение (55) для функции $C(\eta, \xi)$, а также соотношение (Б 4), можно записать (Б 3) в виде

$$-\frac{1}{k^{2}}\,E^{(2)}_{l}(\eta)\left[V + 2k^{2}\,\frac{\mathrm{d}C(\eta,\eta)}{\mathrm{d}\eta}\right] + \qquad (Б\,5)$$

$$+ \int_{\eta}^{\infty}\mathrm{d}\xi\, E^{(2)}_{l}(\xi)\left\{\frac{\partial^{2}C(\eta,\xi)}{\partial\eta^{2}} - \frac{\partial^{2}C(\eta,\xi)}{\partial\xi^{2}} + \left[\frac{l(l+1)}{\xi^{2}} - \frac{l(l+1)}{\eta^{2}} - \frac{V}{k^{2}}\right]C(\eta,\xi)\right\} +$$

$$+ \lim_{\xi\to\infty}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\,\frac{C(\eta,\xi)}{\xi^{l+1}}\right]\xi^{l+1}\left[\frac{2l+3}{\xi}\,E^{(2)}_{l+1}(\xi) - E^{(2)}_{l+2}(\xi)\right] + C(\eta,\xi)\,E^{(2)}_{l+1}(\xi)\right\} = 0.$$

Если в последнем пределе соотношения (Б 5) используем рекуррентную формулу (А 5) и проделаем обозначенное дифференцирование, то получим, что для предела выражения, которое фигурирует в (Б 5) имеет место равенство

$$\lim_{\xi\to\infty}\{\ldots\} = \lim_{\xi\to\infty}\left\{E^{(2)}_{l}(\xi)\,\frac{\partial C(\eta,\xi)}{\partial\xi} + C(\eta,\xi)\left[E^{(2)}_{l+1}(\xi) - \frac{l+1}{\xi}\,E^{(2)}_{l}(\xi)\right]\right\}. \qquad (Б\,6)$$

Если в соотношении (Б 6) используем (А 12), то получим

$$(Б\,6) = \lim_{\xi\to\infty}\left\{E^{(2)}_{l}(\xi)\,\frac{\partial C(\eta,\xi)}{\partial\xi} - C(\eta,\xi)\,\frac{\mathrm{d}E^{(2)}_{l}(\xi)}{\mathrm{d}\xi}\right\}. \qquad (Б\,7)$$

Если теперь подставим в (Б 5) соотношение (Б 7), то получим уравнение (29), приведенное в основном тексте.

ДОПОЛНЕНИЕ В

Если функция $S_1(k)$ имеет в случае p-рассеяния три полюса в точках $k = k_s$, $\mathrm{Im}\,k_s > 0$ $(s = 1, 2, 3)$, то условия (64) можно записать в виде (65а, б). Обозначим $ik_s = C_s$. Условие (65а) имеет вид

$$\frac{\sigma_1}{C_1} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{2(C_1+C_2)}\cdot\left(\frac{C_1-C_2}{C_1C_2}\right)^{2} + \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{4C_1^{2}C_2C_3} -$$

$$- \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{C_1C_2C_3}\cdot\frac{C_1(C_1-C_2)}{(C_1+C_2)(C_2+C_3)(C_3+C_1)} - \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{C_1^{2}C_2^{2}C_3^{2}}\cdot\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\right)^{2} +$$

$$+ \mathrm{cykl}(2,3,1) + \mathrm{cykl}(3,1,2) = 0 \qquad (В\,1)$$

и условие (65б)

$$\frac{2\sigma_1}{C_1} - \sigma_1\sigma_2\left(\frac{C_1-C_2}{C_1C_2}\right)^{2} +$$

$$+ \frac{\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{2C_1^{2}C_2^{2}C_3^{2}}\cdot\left[\frac{1}{3}(C_1+C_2)(C_2+C_3)(C_3+C_1) - C_1C_2C_3\right] +$$

$$+ \frac{2\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{3C_1^{2}C_2^{2}C_3^{2}}\cdot\frac{2C_1^{2}C_2^{2}C_3^{2} - 3C_1^{4}C_2C_3 + 3C_1^{3}C_2^{3}}{(C_1+C_2)(C_2+C_3)(C_3+C_1)} - \frac{2\sigma_1\sigma_2\sigma_3}{C_1^{2}C_2^{2}C_3^{2}}\cdot C_1\left(\frac{C_2C_3}{C_2+C_3}\right)^{2} +$$

$$+ \mathrm{cykl}(2,3,1) + \mathrm{cykl}(3,1,2) = 0. \qquad (В\,2)$$

Два последних члена в приведенных соотношениях представляют собой циклическую перестановку индексов 1, 2, 3.

В случае более высоких моментов и большого числа полюсов будут условия, аналогичные приведенным условиям, сложнее.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Агранович З. С., Марченко В. А., *Обратная задача теории рассеяния*, Харьков 1960.
[2] Фаддеев Л. Д., Успехи матем. наук *14*, 4 (88), (1959), 57.
[3] Гельфанд И. М., Левитан Б. М., Известия АН СССР (серия матем.) *15* (1951), 309.
[4] Newton R. G., Journal of Mathematical Physics *1* (1960), 319.
[5] Bottino A., Longoni A. M., Regge T., Nuovo Cimento *23* (1962), 954.
[6] Predazzi E., Regge T., Nuovo Cimento *24* (1962), 518.
[7] Petráš M., Czech. J. Phys. B *12* (1962), 87; Mat.-fyz. čas. SAV *12* (1962), 136.
[8] Blažek M., Czech. J. Phys. B *12* (1962), 497.
[9] Fowler M., Nuovo Cimento *20* (1961), 478.
[10] Mors P. M., Feshbach H., *Methods of Theoretical Physics*, New York 1953 (русский перевод в 1960 г.);
Schiff L. I., *Quantum Mechanics*, New York 1955, § 15 (русский перевод в 1959 г.).
[11] Martin A., Suppl. Nuovo Cimento *21*, 3° Trim. (1961), 157.

Поступило 25. 7. 1962 г.

ČSAV, Fyzikálny ústav SAV Bratislava

DETERMINATION OF THE POTENTIAL BY MEANS OF THE SCATTERING AMPLITUDE ANALYTIC PROPERTIES

Mikuláš Blažek

Summary

It is known that by means of the analytic properties of the scattering amplitude it is possible to determine the analytic properties of the partial scattering amplitudes A_l. In this paper, in the case of the nonrelativistic scattering of two zero-spin particles, it is shown a method which permits to determine the potential into the Schrödinger equation if there are known the analytic properties of the partial scattering amplitude in the upper half plane of the complex momentum k, for the physical values of the angular momentum l. It is shown that one can determine the potential $V(r)$ as

$$V(r) = -2\frac{\mathrm{d}K_l(r,r)}{\mathrm{d}r} = V_l(r) \tag{31b}$$

where $K_l(r,\varrho)$ is the solution of the linear integral equation

$$K_l(r,\varrho) + \int_r^\infty K_l(r,t)\,F_l(t,\varrho)\,\mathrm{d}t + F_l(r,\varrho) = 0. \tag{48}$$

If there is no bound state the kernel of (48) is given by

$$F_l(r,\varrho) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}k\,[1 - S_l(k)]\,[-krh_l^{(2)}(-kr)]\,[-k\varrho h_l^{(2)}(-k\varrho)] \tag{49}$$

provided that

$$\lim_{k\to 0}\frac{1 - S_l(k)}{k^{2l+1}} < \infty. \tag{39}$$

The $h_l^{(2)}$'s are the spherical Hankel functions of the second kind [10].

If we replace the S-matrix elements $S_l(k)$ by the partial scattering amplitudes

$$A_l = \frac{\mathrm{i}}{2k}[1 - S_l(k)]$$

we obtain the following expression in the energy variable $\nu = k^2$ for the kernel $F_l(r,\varrho)$

$$F_l(r,\varrho) = -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C \mathrm{d}\nu\,A_l(\nu)\,E_l^{(2)}(-r\sqrt{\nu})\,E_l^{(2)}(-\varrho\sqrt{\nu});\quad E_l^{(2)}(z) \equiv zh_l^{(2)}(z) \tag{50}$$

provided that

$$A_l(\nu) - \nu^l, \qquad \nu \to 0.$$

The integration path C for (50) is shown in Fig. 1. The existence of the bound states can be taken in considerations in similar way as in [1]. According to (50) the kernel $F_l(r,\varrho)$ can be determined by means of the analytic properties of the partial scattering amplitude in the first Riemann energy sheet ($\mathrm{Im}\sqrt{\nu} > 0$). In many cases one recognizes that in (50) the physical cut is avoided.

For s-scattering ($l = 0$) we have from (48) the known Agranovitsch-Martschenko equation [1] which is equivalent [2] to the Gelfand-Levitan equation [3] and which was discussed in [8].

We deal with this matter in the following way. After introduction there are given the basic functions with their properties. In the third section it is shown that if the Schrödinger equation

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - V\right]u = 0 \tag{1}$$

with the boundary condition

$$\lim_{r\to\infty} u_l(k,r)\,\mathrm{e}^{ikr} = 1 \tag{2}$$

is fulfilled by the function („Ansatz“)

$$f_l(k,r) = \frac{krh_l^{(2)}(kr)}{i^{l+1}} + \int_r^\infty K_l(r,t)\,\frac{kth_l^{(2)}(kt)}{i^{l+1}}\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

then the function $K_l(r,\varrho)$ is the solution of the partial differential equation

$$\frac{\partial^2 K_l(r,\varrho)}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}K_l(r,\varrho) - \left[\frac{\partial^2 K_l(r,\varrho)}{\partial\varrho^2} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2}K_l(r,\varrho)\right] = V(r)\,K_l(r,\varrho) \tag{4}$$

with the conditions

$$V(r) = -2\frac{\mathrm{d}K_l(r,r)}{\mathrm{d}r} = V_l(r) \tag{5}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left\{kth_l^{(2)}(kt)\frac{\partial K_l(r,t)}{k\,\partial t} - K_l(r,t)\frac{\partial[kth_l^{(2)}(kt)]}{k\,\partial t}\right\} = 0. \tag{6}$$

The fulfilement of (1) and (3) is in this case equivalent to that of (4), (5) and (6).

In the next section we derive for $K_l(r,\varrho)$ the basic linear integral equation (48) (the occurence of the bound states can be included in considerations similarly as in [1]). In the fifth section we show that from the fulfilement of the integral equation (48) it follows the relation (6) and it is valid the following equation

$$\frac{\partial^2 K_l(r,\varrho)}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2}K_l(r,\varrho) - \left[\frac{\partial^2 K_l(r,\varrho)}{\partial\varrho^2} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2}K_l(r,\varrho)\right] =$$

$$= -2\frac{\mathrm{d}K_l(r,r)}{\mathrm{d}r}K_l(r,\varrho). \tag{62}$$

Hence, if we define the potential by means of (5) then according to the third section it is fulfilled also the Schrödinger equation (1).

We derived the integral equation (48) under the asumption that the first and second absolute moments of the potential exist, i. e.

$$\int_0^\infty r\,|\,V(r)\,|\,\mathrm{d}r < \infty, \qquad \int_0^\infty r^2\,|\,V(r)\,|\,\mathrm{d}r < \infty. \tag{9}$$

It is therefore interesting to investigate the connection of these two conditions with the showed method for solving the inversion problem.

For instance we discusse in the sixth section the p-scattering case provided that the function $S_1(k)$ has three poles in the upper half momentum plane (for $k = k_s$, $\mathrm{Im}\,k_s > 0$, $s = 1, 2, 3$) and that the integral (49) vanishes on the large semicircle C_R in the upper half plane (in the limit $R \to \infty$). The requirement of two following conditions

$$\lim_{k\to 0} \frac{1 - S_1(k)}{k^3} < \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{f_1(k)}{f_1^{(0)}(k)} = 1 \qquad (\mathrm{Im}\, k < 0) \tag{64a, b}$$

[the $f(k)$'s are the Jost functions] leads us to the conditions

$$\lim_{r\to 0} (r\Delta) = 0; \qquad \lim_{r\to 0} \left(r \frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}r} \right) = 0 \tag{65a, b}$$

where Δ is the determinant of the system (63). In this case the conditions (65) have the form (B 1—2) where $C_s = ik_s$ (the terms cykl. (2, 3, 1) etc mean the cyclic change of the indices 1, 2, 3). And further, the conditions (9) follow from (65). In large distances the obtained potentials approach exponentially zero.

If the function $S_l(k)$ is discontinuous on an interval in the upper half momentum plane, we can obtain the class of potentials which can be expressed in the form

$$V(r) = \int_\mu^\infty \Omega_l(x) \frac{e^{-2xr}}{r} \,\mathrm{d}x$$

with appropriate $\Omega_l(x)$ functions connected with the discontinuity of $S_l(k)$.

Applying this method to the relativistic potential scattering we obtain the energy dependent potentials.

We define a new function $U(r, \cos\vartheta)$ by the relation

$$U(r, \vartheta) \equiv U(r, \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)\, V_l(r)\, P_l(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)$$

where $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ are two unit vectors, the P_l's are the Legendre polynomials and $V_l(r)$ are the potential functions defined by (5). Further we define the wave function

$$\psi(k, r, \vartheta) \equiv \psi(k, r, \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1) \frac{u_l(k, r)}{r} P_l(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2),$$

where $u_l(k, r)$ is the solution of the Schrödinger equation (1).

Then the interaction term $\hat{U}\psi$ in the Schrödinger equation

$$\hat{H}\psi = (\hat{T} + \hat{U})\,\psi = E\psi$$

can be written in the form

$$\hat{U}\psi = \int_{\Omega_{\vec{n}}} U(r, \vec{n}_1 \cdot \vec{n})\, \psi(k, r, \vec{n} \cdot \vec{n}_2) \frac{\mathrm{d}\Omega_{\vec{n}}}{4\pi}$$

i. e. it is non-local in angle (5).

We define further the functions $\mathscr{K}$, $\mathscr{F}$ and $\mathscr{N}$

$$\mathscr{K}(r, \varrho; \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)\, K_l(r, \varrho)\, P_l(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2),$$

$$\mathscr{F}(r, \varrho; \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)\, F_l(r, \varrho)\, P_l(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2),$$

$$\mathscr{N}(r, \varrho; \nu; \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)\, E_l^{(2)}(-r\sqrt{\nu})\, E_l^{(2)}(-\varrho\sqrt{\nu})\, P_l(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2).$$

Then the basic integral equation (48) can be written in the form

$$\mathscr{K}(r, \varrho; \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) + \int_r^\infty \mathrm{d}t \int_{\Omega_{\vec{n}}} \frac{\mathrm{d}\Omega_{\vec{n}}}{4\pi} \mathscr{K}(r, t; \vec{n}_1 \cdot \vec{n})\, \mathscr{F}(t, \varrho; \vec{n} \cdot \vec{n}_2) + \mathscr{F}(r, \varrho; \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = 0, \tag{48'}$$

where

$$\mathscr{F}(r, \varrho; \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C \mathrm{d}\nu \int_{\Omega_{\vec{n}}} \frac{\mathrm{d}\Omega_{\vec{n}}}{4\pi} \mathscr{A}(\nu, \vec{n}_1 \cdot \vec{n})\, \mathscr{N}(r, \varrho; \nu; \vec{n} \cdot \vec{n}_2). \tag{50'}$$

We introduced in (50') the total scattering amplitude $\mathscr{A}(\nu, \cos\vartheta)$

$$\mathscr{A}(\nu, \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l + 1)\, A_l(\nu)\, P_l(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2),$$

where A_l are the partial scattering amplitudes.

In this case the relation (5) has the form

$$U(r, \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = -2 \frac{\mathrm{d}\mathscr{K}(r, r; \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2)}{\mathrm{d}r},$$

where $\mathscr{K}$ is the solution of the equation (48').

The equation (48') admits to determine the function $\mathscr{K}$ by means of the kernel $\mathscr{F}$ in which the total scattering amplitude $\mathscr{A}$ appears. This can be very usefull for various representations of the scattering amplitude can be investigated by this method (e. g. the Regge representation [5]).