MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 13, 2, 1963

VŠEOBECNÉ MOCNINY V POLOGRUPÁCH

JURAJ BOSÁK, Bratislava

§ 1. ÚVOD

Je dobre známe, že v ľubovoľnej pologrupe S možno definovať mocniny s prirodzeným exponentom. Presnejšie povedané, je možné ľubovoľnému $a \in S$ a ľubovoľnému prirodzenému číslu m priradiť istý prvok pologrupy S, ktorý označujeme znakom a^m, pričom pre ľubovoľné $a \in S$ a pre ľubovoľné prirodzené čísla m, n platí:

$$a^1 = a, \tag{A}$$

$$a^{m+n} = a^m a^n, \tag{B}$$

$$a^{m \cdot n} = (a^n)^m. \tag{C}$$

Je zrejmé, že existuje vždy práve jedno priradenie uvedených vlastností. Možno ho definovať rekurentne: $a^1 = a$, $a^{m+1} = a^m a$ pre ľubovoľné $a \in S$ a ľubovoľné prirodzené číslo m. V ďalšom predpokladáme, že v uvažovaných pologrupách sú definované mocniny s prirodzeným exponentom.

Vynára sa otázka, za akých predpokladov možno prirodzené exponenty nahradiť exponentami z inej danej množiny, na ktorej sú definované dve binárne operácie, sčítanie (+) a násobenie (.). V práci uvádzame podmienky pre to, aby bolo možné v danej pologrupe definovať mocniny s exponentom vzatým z takejto množiny. Získané výsledky nám umožnia do istej miery poznať štruktúru takýchto pologrúp v najdôležitejších prípadoch.

Našu prácu začneme prípadom kladných racionálnych exponentov, ktoré vedú k zavedeniu odmocňovania prvkov v pologrupách. Je pochopiteľné, že niektoré úvahy budú obdobné úvahám pri zavádzaní odmocnín a kladných racionálnych mocnín z nezáporných reálnych čísel z elementárnej matematiky.

Poznamenajme ešte, že v prípade mocnín s prirodzeným exponentom je (C) dôsledkom (A) a (B). Vo všeobecnom prípade, ako sa dá ľahko ukázať, sú vlastnosti (A), (B), (C) nezávislé.

§ 2. MOCNINY S KLADNÝM RACIONÁLNYM EXPONENTOM

Veta 1. *Nech je daná pologrupa S taká, že rovnica $x^n = a$ má pre každé $a \in S$ a pre každé prirodzené číslo n najviac jedno riešenie x. Označme toto riešenie (pokiaľ* *existuje) znakom $\sqrt[n]{a}$. Potom platí pre ľubovoľné $a \in S$ a pre ľubovoľné prirodzené čísla m, n, p (vždy, keď sú príslušné symboly definované):*

$$\sqrt[n]{a^n} = a, \tag{1}$$

$$(\sqrt[n]{a^m})^p = \sqrt[n]{a^{m \cdot p}}, \tag{2}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}, \tag{3}$$

$$\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}. \tag{4}$$

Dôkaz vyplýva bezprostredne z definícií príslušných symbolov.

Poznámka. Prvá rovnosť vo vete 1 platí vždy, pri druhej stačí predpokladať, že $\sqrt[n]{a^m}$ je definovaná, pri tretej a štvrtej stačí predpokladať, že aspoň jedna zo strán rovnosti je definovaná.

Definícia 1. Budeme hovoriť, že v pologrupe S možno definovať mocniny s kladným racionálnym exponentom, ak možno ľubovoľnému $a \in S$ a ľubovoľnému kladnému racionálnemu číslu $m = p/q$ priradiť istý prvok pologrupy S, ktorý označujeme znakom $a^m = a^{p/q}$, tak, aby pre ľubovoľné $a \in S$ a pre ľubovoľné kladné racionálne čísla m, n platilo (A), (B), (C).

Veta 2. *Nutná a postačujúca podmienka pre to, aby v pologrupe S bolo možné definovať mocniny s kladným racionálnym exponentom, je: K ľubovoľnému prirodzenému číslu k a k ľubovoľnému $a \in S$ existuje práve jeden prvok $x \in S$ taký, že $x^k = a$.*(1) *Ak je uvedená podmienka splnená, možno v pologrupe S definovať mocniny s kladným racionálnym exponentom jediným spôsobom.*

Dôkaz. Ak v pologrupe S možno definovať mocniny s kladným racionálnym exponentom, tak rovnica $x^k = a$ má vzhľadom na (C) a (A) práve jedno riešenie, a to $x = a^{1/k}$. Obrátene, ak každá rovnica $x^k = a$ (k prirodzené, $a \in S$) má práve jedno riešenie x, možno pre ľubovoľné kladné racionálne číslo $m = p/q$ (kde p, q sú prirodzené čísla) definovať $a^m = \sqrt[q]{a^p}$. Oprávnenosť tejto definície vyplýva zo vzťahu (4) v z vety 1. Z vety 1 ďalej ľahko vyplýva platnosť vzťahov (A), (B), (C) pre ľubovoľné kladné racionálne čísla m, n. Jednoznačnosť spôsobu definovania mocnín vyplýva z toho, že prvok $a^{p/q}$ musí vyhovovať rovnici $x^q = a^p$, ktorá podľa predpokladu má jediné riešenie $x \in S$.

Poznámky. 1. O štruktúre pologrúp, skúmaných vo vete 2, hovorí – vo všeobecnejšom prípade – veta 3.

2. Je zrejmé, že ak v pologrupe sú definované mocniny s kladným racionálnym exponentom, pre prirodzené čísla m sa tieto zhodujú s obyčajnými mocninami.

(1) V prípade grupy ide teda o úplné R-grupy [5], čiže o D_ω-grupy [6], kde ω je množina všetkých prvočísel.

Naše úvahy teraz zovšeobecníme ešte na širšie obory exponentov. Najprv zavedieme pojem quasiokruhu.

Definícia 2. Quasiokruhom nazývame množinu Q uzavretú vzhľadom na dve binárne asociatívne operácie $(+, .)$, spojené pravým distributívnym zákonom $(m + n) . p = m . p + n . p$ $(m, n, p \in Q)$, s ľavou jednotkou $1 \in Q$ pri násobení (t. j. $1 . m = m$ pre každé $m \in Q$).

Poznámky. 1. Operácie v quasiokruhu označujeme znakmi $+$, $.$, zatiaľ čo násobenie prvkov v pologrupe osobitne nevyznačujeme.

2. V definícii quasiokruhu nepredpokladá sa ani komutatívnosť operácií, ani platnosť ľavého distributívneho zákona $m . (n + p) = m . n + m . p$, ani existencia pravej jednotky.

3. Zrejme ľubovoľný (asociatívny) okruh s jednotkou je quasiokruhom.

Definícia 3. Budeme hovoriť, že v pologrupe S možno definovať mocniny s exponentom z quasiokruhu Q, ak možno ľubovoľným prvkom $a \in S$, $m \in Q$ priradiť istý prvok pologrupy S, ktorý označujeme znakom a^m, tak, aby pre ľubovoľné $a \in S$, $m \in Q$, $n \in Q$ platilo (A), (B), (C). (Znak 1 v (A) tu treba chápať vo význame ľavej jednotky quasiokruhu.)

Poznámky. 1. Je zrejmé, že z (B), (C) možno indukciou odvodiť pravidlá

$$a^{m_1 + m_2 + \dots + m_k} = a^{m_1} a^{m_2} \dots a^{m_k}, \tag{B'}$$

$$a^{m_1 . m_2 \dots m_k} = (\dots((a^{m_k})^{m_{k-1}})\dots)^{m_1}, \tag{C'}$$

platné pre ľubovoľné prirodzené k, $a \in S$, $m_1, m_2, \dots, m_k \in Q$.

2. Priradenie $a \to a^m$ (pričom a prebieha S) pri pevnom $m \in Q$ je operátorom na pologrupe S. Priradenie $m \to a^m$ (pričom m prebieha Q) pri pevnom $a \in S$ je homomorfným zobrazením aditívnej pologrupy Q^+ quasiokruhu Q do pologrupy S. Mocniny v pologrupe možno preto chápať aj ako špeciálnu triedu operátorov na S alebo ako špeciálnu triedu homomorfizmov z Q^+ do S.

3. Mocniny s exponentom z quasiokruhu môžeme považovať za zovšeobecnenie násobenia prvkov modulu (lineárneho priestoru) prvkami (asociatívneho) okruhu s jednotkou (pozri napr. [2], str. 236). Stačí aditívnu grupu lineárneho priestoru nahradiť multiplikatívne písanou pologrupou, okruh quasiokruhom a násobky prvkov modulu ich mocninami. Aby však táto analógia bola zreteľnejšia, museli by sme pre mocninu požadovať ešte splnenie ďalšieho zákona

$$(ab)^m = a^m b^m. \tag{D}$$

To by však – vo všeobecnom prípade – bolo pre naše účely nevhodné, keďže zákon (D) neplatí ani v pomerne jednoduchých prípadoch (napr. pre mocniny s prirodzeným exponentom v nekomutatívnych grupách). Je zrejmé, že v komutatívnej pologrupe pre mocniny s prirodzeným exponentom platí (D). Ak v nejakej pologrupe S, v ktorej pre mocniny s prirodzeným exponentom platí (D), sú definované mocniny s kladným racionálnym exponentom, musí aj pre tieto mocniny – ako sa ľahko dokáže – platiť (D).

4. Analogicky môžeme skúmať, za akých predpokladov platia pre mocniny iné zákony, napr.

$$e^2 = e \Rightarrow e^m = e, \tag{E}$$

$$a^m = a^n, \quad m \neq n \Rightarrow a = a^2, \tag{F}$$

$$a^m = b^m \Rightarrow a = b. \tag{G}$$

Je zrejmé, že mocniny s prirodzeným exponentom a mocniny s kladným racionálnym exponentom vždy splňujú (E). Ľahko sa zistí, že aj mocniny, ktoré budeme rozoberať vo vetách 3,4 a 5, splňujú zákon (E). Naproti tomu zákony (F) a (G) vo všeobecnosti neplatia ani pre mocniny s prirodzeným exponentom.

5. Ako sme už spomenuli, mocniny s prirodzeným exponentom a mocniny s kladným racionálnym exponentom (pokiaľ sú definované) sú definované jednoznačne. Vo všeobecnom prípade v danej pologrupe môže existovať aj viac druhov mocnín s exponentami z toho istého quasiokruhu. Ako príklad uveďme multiplikatívnu pologrupu S komplexných čísel a quasiokruh $Q = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Možno definovať buď $x^0 = 1$ pre všetky $x \in S$ (ako ostatne v každej pologrupe s jednotkou), buď $x^0 = 1$ pre $x \neq 0$ a $0^0 = 0$. (V obidvoch prípadoch, samozrejme, mocniny s prirodzeným exponentom definujeme obvyklým spôsobom.) Všimnime si, že v prvom prípade neplatí (E), v druhom prípade platí.

Príklad. Nech Q je ľubovoľný quasiokruh. Zostrojíme pologrupu $S_Q(I)$, v ktorej možno definovať mocniny s exponentom z Q. Nech S je ľubovoľná pologrupa, ktorej každý prvok je idempotent, nech I je obojstranný ideál pologrupy S (pripúšťame aj prípad $I = \emptyset$). Utvorme pologrupu $S_Q(I)$, ktorej prvkami sú všetky dvojice (x, n), kde $x \in S$, $n \in Q$. Dve takéto dvojice (x_1, n_1), (x_2, n_2) považujeme za rovnaké práve vtedy, keď platí $x_1 = x_2$ a okrem toho buď $n_1 = n_2$, buď $x_1 \in I$. Násobenie prvkov $S_Q(I)$ (presnejšie povedané, tried navzájom rovnajúcich sa prvkov) definujeme pravidlom

$$(x_1, n_1)(x_2, n_2) = (x_1x_2, n_1 + n_2).$$

Jednoznačnosť násobenia vyplýva z toho, že I je obojstranný ideál. Ľahko zistíme, že dostávame pologrupu, v ktorej možno definovať mocniny s exponentom z Q takto:

$$(a, n)^m = (a, m \, . \, n).$$

Pri pevnom $x \in S$ množina všetkých (rôznych) prvkov (x, n), kde $n \in Q$, tvorí pologrupu. Táto pologrupa sa skladá z jedného idempotentu práve vtedy, keď $x \in I$.

Lema 1. *Ak pologrupa S je množinovým súčtom navzájom disjunktných pologrúp, z ktorých každá buď sa skladá z jediného idempotentu, alebo je izomorfná aditívnej pologrupe quasiokruhu Q, v S možno definovať mocniny s exponentom z Q.*

Dôkaz. Nech $a \in S$. Ak a je idempotent, definujme $a^m = a$ pre všetky $m \in Q$. Ak a patrí do niektorej pologrupy (označme ju S_a), izomorfnej aditívnej pologrupe Q^+ quasiokruhu Q, pričom pri izomorfizme f prvku $m \in Q^+$ zodpovedá prvok $f(m) \in S_a$, definujme pre každé $m \in Q$: $a^m = f[m \, . \, f^{-1}(a)]$. (Znakom f^{-1} označujeme zobrazenie inverzné k zobrazeniu f.) Zrejme v obidvoch prípadoch sú splnené pravidlá (A), (B), (C) pre ľubovoľné $a \in S$, $m \in Q$, $n \in Q$, takže v S sú definované mocniny s exponentom z Q.

Poznámky. 1. Podmienka v leme 1 vo všeobecnosti nie je nutná na to, aby v pologrupe S bolo možné definovať mocniny s exponentom z Q. V ďalšom (veta 3) ukážeme nutnosť uvedenej podmienky, ak Q je quasiokruhom vytvoreným kladnými prvkami telesa, ktorého všetky prvky sú reálne čísla.

2. Metódou z dôkazu lemy 1 možno definovať napr. mocniny nezáporných čísel s kladným exponentom, ak sú definované mocniny čísla e s kladným exponentom (a teda aj prirodzené logaritmy čísel väčších než 1). Príslušný rozklad multiplikatívnej pologrupy $S = \langle 0, \infty)$ je pritom $S = \{0\} \cup \{1\} \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$.

3. Na multiplikatívnej pologrupe čísel $\{-1, 1\}$ (a teda ani na „širších" pologrupách, napr. na množine všetkých celých, racionálnych, reálnych, komplexných čísel) nemožno podľa vety 2 definovať mocniny s kladným racionálnym exponentom (a teda ani s exponentom zo širších oborov), pretože rovnica $x^2 = 1$ má dve riešenia ± 1. Poznamenajme, že symboly a^b, ktoré sa obyčajne definujú pre ľubovoľné komplexné čísla $a \neq 0$, b (pozri napr. [3], str. 563) nepredstavujú mocniny v našom zmysle, pretože v tomto prípade nie je splnené (C).

§ 4. MOCNINY S KLADNÝM EXPONENTOM

Nech je dané podteleso telesa všetkých reálnych čísel. Označme znakom K quasiokruh vytvorený množinou všetkých kladných čísel z tohto podtelesa. Ukážeme, za akých predpokladov môže K slúžiť ako obor exponentov mocnín pre danú pologrupu S.

Veta 3. *Nutná a postačujúca podmienka pre to, aby v pologrupe S bolo možné definovať mocniny s exponentom z K, je, aby S bola zjednotením navzájom disjunktných pologrúp, z ktorých každá pozostáva z jediného – idempotentného – prvku alebo je izomorfná aditívnej pologrupe quasiokruhu K.*

Dôkaz. Postačujúca podmienka vyplýva z lemy 1. Dokážme nutnú podmienku! Nech sú na S definované mocniny s exponentom z K. Definujme na S reláciu R takto: aRb práve vtedy, keď $a \in S$, $b \in S$ a existuje $k \in K$ tak, že $a^k = b$. Relácia R je ekvivalencia, definuje rozklad pologrupy S na triedy. Každá z týchto tried pozostáva zo všetkých mocnín a^k pevne zvoleného prvku $a \in S$, pričom k prebieha množinu K. Ak pre každé $m \in K$, $n \in K$, $m \neq n$ platí $a^m \neq a^n$, je $\{a^k\}_{k \in K}$ pologrupa izomorfná aditívnej pologrupe quasiokruhu K. Ak však existujú $m \in K$, $n \in K$ také, že $m \neq n$, ale $a^m = a^n$, dokážeme, že pre ľubovoľné $r \in K$, $s \in K$ platí $a^r = a^s$, teda uvažovaná trieda sa skladá z jediného — idempotentného — prvku. Bez ujmy na všeobecnosti môžeme predpokladať, že $m > n$, $r > s$. Keďže $m > n > 0$, je

$$\lim_{u \to \infty} \frac{m^u}{n^u} = \infty,$$

takže existuje prirodzené číslo $w = w(r, s)$ také, že

$$\frac{m^w}{n^w} > \frac{r}{s}.$$

Z rovnosti $a^m = a^n$ indukciou vyplýva $a^{m^u} = a^{n^u}$ pre všetky prirodzené čísla u (a teda aj pre $u = w$). Preto

$$a^r = a^{\frac{r-s}{m^w-n^w} \cdot m^w + \frac{s.m^w - r.n^w}{m^w-n^w}} = (a^{m^w})^{\frac{r-s}{m^w-n^w}} a^{\frac{s.m^w-r.n^w}{m^w-n^w}} =$$

$$= (a^{n^w})^{\frac{r-s}{m^w-n^w}} a^{\frac{s.m^w-r.n^w}{m^w-n^w}} = a^{\frac{r-s}{m^w-n^w} \cdot n^w + \frac{s.m^w-r.n^w}{m^w-n^w}} = a^s.$$

Keďže za našich predpokladov všetky práve uvedené mocniny majú zmysel (ich exponenty patria do K), dôkaz je vykonaný.

Zrejme platí:

Dôsledok 1. *V konečnej pologrupe S možno definovať mocniny s exponentom z K vtedy a len vtedy, keď každý prvok pologrupy S je idempotent. V tomto prípade možno definovať tieto mocniny jediným spôsobom: pre každé $a \in S$, $k \in K$ položiť $a^k = a$.*

Poznámky. 1. Pre mocniny s exponentom z K zrejme platia zákony (E), (F), (G).
2. Ako špeciálne prípady veta 3 rieši otázku možnosti zavedenia mocnín s racionálnym kladným resp. reálnym kladným exponentom.

§ 5. MOCNINY S CELÝM EXPONENTOM A S EXPONENTOM Z TELESA

Veta 4. *Nutná a postačujúca podmienka pre to, aby sa v pologrupe S dali definovať mocniny s celým exponentom, je, aby S bola zjednotením (navzájom disjunktných) grúp. Ak možno v pologrupe S definovať mocniny s celým exponentom, sú tieto mocniny jednoznačne určené.*

Dôkaz. Postačujúca podmienka je zrejmá z toho, že v každej grupe možno definovať mocniny s celým exponentom. Nutná podmienka vyplýva z toho, že ak v pologrupe S možno definovať mocniny s celým exponentom, tak S je úplne regulárnou pologrupou v Ľapinovom [1] zmysle čiže pologrupou s relatívne inverznými prvkami v Cliffordovom [4] zmysle, takže je zjednotením (navzájom disjunktných) grúp. Dokážme ešte jednoznačnosť mocnín. Prirodzené mocniny sú jednoznačne určené. a^0 je obojstrannou jednotkou prvku $a \in S$, preto je podľa lemy 1.2 práce [4] jednoznačne určená. Prvky $\{..., a^{-2}, a^{-1}, a^0, a, a^2, ...\}$ tvoria grupu (označme ju G_a). Grupe G_a zodpovedá podľa [1], str. 139, jednoznačne určená maximálna grupa $\bar{G}_a$ obsahujúca grupu G_a. Prvok a^{-1} musí byť preto obsiahnutý v $\bar{G}_a$, a keďže je inverzným prvkom k prvku a, je jednoznačne určený. Jednoznačnosť ostatných celých mocnín je zrejmá.

Veta 5. *Nutná a postačujúca podmienka na to, aby v pologrupe S bolo možné definovať mocniny s exponentom z komutatívneho telesa T, je, aby pologrupa S bola zjednotením navzájom disjunktných grúp, s ktorých každá buď má jediný prvok, buď je zjednotením podgrúp izomorfných aditívnej grupe telesa T takých, že ľubovoľné dve rôzne z týchto podgrúp majú spoločný jediný prvok (jednotku grupy).*

Dôkaz. I. Postačujúca podmienka. Ak pologrupa S má požadovaný tvar, možno v nej definovať mocniny s exponentom z T analogicky ako v dôkaze lemy 1. Ak niektorý prvok $a \in S$ patrí do viacerých grúp izomorfných aditívnej grupe telesa T, nezáleží na tom, ktorú z nich použijeme pre definíciu mocnín prvku $a \in S$, pretože vtedy a musí byť idempotentom a podľa predpisu z dôkazu lemy 1 dostávame pre ľubovoľné $m \in T$:

$$a^m = f[m \,.\, f^{-1}(a)] = f(m \,.\, 0) = f(0) = a,$$

takže definícia mocniny je jednoznačná. Vlastnosti (A), (B), (C) sú zrejme splnené.

II. Nutná podmienka. Nech v pologrupe S možno definovať mocniny s exponentom z T. Nech $a \in S$. Sú dve možnosti. Buď pre každé $t \in T$ platí $a^t = a$, buď existuje $t \in T$ tak, že $a^t \neq a$. Dokážme, že v druhom prípade rôznym prvkom m, n telesa T zodpovedajú rôzne mocniny a^m, a^n. Keby totiž platilo $a^m = a^n$, bolo by

$$a = a^{\frac{1-t}{m-n}.m + \frac{t.m-n}{m-n}} = (a^m)^{\frac{1-t}{m-n}} a^{\frac{t.m-n}{m-n}} = (a^n)^{\frac{1-t}{m-n}} a^{\frac{t.m-n}{m-n}} = a^{\frac{1-t}{m-n}.n + \frac{t.m-n}{m-n}} = a^t,$$

teda $a = a^t$, čo je spor. Povšimnime si, že v obidvoch prípadoch súhrn všetkých mocnín a^t ($t \in T$) prvku $a \in S$ tvorí podgrupu pologrupy S. V prvom prípade je to jednoprvková grupa, v druhom grupa izomorfná aditívnej grupe telesa T. Pologrupa S je zjednotením grúp, a preto podľa [1], str. 139, je zjednotením navzájom disjunktných maximálnych grúp. Ak každá maximálna grupa pozostáva z jediného prvku, sme s dôkazom hotoví. Ak existujú maximálne grupy s viac než jedným prvkom, musia podľa predošlého byť zjednotením podgrúp izomorfných aditívnej grupe telesa T. Dve ľubovoľné z týchto podgrúp (vytvorené, povedzme, mocninami prvkov $a \in S$, $b \in S$), obsiahnuté v tej istej maximálnej grupe, majú, samozrejme, spoločný jednotkový prvok. Dokážeme ešte, že ak by mali spoločný ešte ďalší prvok $c \in S$, mali by spoločné všetky prvky. V tomto prípade by totiž museli existovať prvky $i \in T$, $j \in T$ ($i \neq 0$, $j \neq 0$) tak, že $c = a^i = b^j$. Potom ľubovoľnú mocninu a^x ($x \in T$) možno vyjadriť ako mocninu prvku b, lebo

$$a^x = a^{(x/i)\,.\,i} = (a^i)^{x/i} = (b^j)^{x/i} = b^{(x\,.\,j)/i},$$

a analogicky, každú mocninu prvku b možno vyjadriť ako mocninu prvku a. Preto ľubovoľné dve rôzne z uvažovaných podgrúp môžu mať len jediný prvok spoločný, čím je veta dokázaná.

Príklad. V pologrupe D, danej tabuľkou

	a	b	c	d	e	f
a	a	a	a	a	a	a
b	a	e	d	c	b	b
c	a	d	e	b	c	c
d	a	c	b	e	d	d
e	a	b	c	d	e	e
f	a	b	c	d	e	f

možno definovať mocniny s exponentom z dvojprvkového telesa $\{0, 1\}$. Požadovaný rozklad na grupy je

$$S = \{a\} \cup \{b, c, d, e\} \cup \{f\},$$

pričom grupa $\{b, c, d, e\}$ sa rozkladá na podgrupy izomorfné aditívnej grupe telesa $\{0, 1\}$:

$$\{b, c, d, e\} = \{e, b\} \cup \{e, c\} \cup \{e, d\}.$$

Uvedená metóda nám dáva tieto hodnoty:

x	a	b	c	d	e	f
x^0	a	e	e	e	e	f
x^1	a	b	c	d	e	f

Poznámka. Mocniny s exponentom z telesa splňujú (E), (F), zatiaľ čo nemusia splňovať (G), ako vidno z predošlého príkladu ($b^0 = c^0$, hoci $b \neq c$).

LITERATÚRA

[1] Ляпин Е. С., *Полугруппы*, Гос. Изд. Физ.-мат. лит., Москва 1960.
[2] Kochendörffer R., *Einführung in die Algebra*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1955.
[3] Jarník V., *Diferenciální počet*, Pokračování Úvodu do počtu diferenciálního, Nakladatelství ČSAV, Praha 1953.
[4] Clifford A., *Semigroups admitting relative inverses*. Annals of Mathematics *42* (1941), 1037 až 1049.
[5] Курош А. Г., *Теория групп*, Гос. изд. тех.-теор. лит., Москва 1953.
[6] Baumslag G., *Some aspects of groups with unique roots*, Acta Mathematica *104* (1960), 217—303.

Došlo 28. 8. 1962.

ČSAV, Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie vied v Bratislave

ОБЩИЕ СТЕПЕНИ В ПОЛУГРУППАХ

Юрай Босак

Резюме

Квазикольцом мы называем множество Q, в котором заданы две бинарных алгебраических ассоциативных операции $(+\,,\,.)$, связанных между собой правым дистрибутивным законом $(m + n)\,.\,p = m\,.\,p + n\,.\,p$ $(m, n, p \in Q)$, с левой единицей $1 \in Q$ для умножения (т. е. $1\,.\,m = m$ для всякого $m \in Q$).

Мы говорим, что в полугруппе S можно определить степени с экспонентом из квазикольца Q, если произвольным элементам $a \in S$, $m \in Q$ можно сопоставить некоторый элемент полугруппы S (который мы обозначаем символом a^m) так, чтобы для всех $a \in S$, $m \in Q$, $n \in Q$ имело место

$$a^1 = a, \tag{A}$$

$$a^{m+n} = a^m a^n, \tag{B}$$

$$a^{m.n} = (a^n)^m. \tag{C}$$

В статье доказано: Необходимое и достаточное условие для того, чтобы в полугруппе S можно было определить степени...

1. ... с положительным рациональным экспонентом, следующее: Для произвольного натурального числа k и для произвольного $a \in S$ существует один и только один такой элемент $x \in S$, что $x^k = a$ (этот элемент мы обозначаем через $x = \sqrt[k]{a}$; изучаются некоторые свойства таких „корней");

2. ... с экспонентом из положительной части K числового поля, следующее: S является (теоретико-множественным) объединением попарно непересекающихся полугрупп, из которых каждая состоит из одного элемента или изоморфна аддитивной полугруппе квазикольца K;

3. ... с целым экспонентом, следующее: S является объединением (попарно непересекающихся) групп;

4. ... с экспонентом из поля T, следующее: S является объединением (попарно непересекающихся) групп, каждая из которых либо состоит из одного элемента либо является объединением подгрупп, изоморфных аддитивной группе поля T, таких, что произвольные две из этих подгрупп, отличные друг от друга, имеют только один общий элемент (единицу группы).

GENERAL POWERS IN SEMIGROUPS

Juraj Bosák

Summary

By a quasiring we understand a set Q with two binary algebraic associative operations $(+, .)$, connected by the right distributive law $(m + n)\,.\,p = m\,.\,p + n\,.\,p$ $(m, n, p \in Q)$, containing a left-identity $1 \in Q$ for the multiplication (that is, $1\,.\,m = m$ for all $m \in Q$).

We shall speak that in the semigroup S it is possible to define the powers with exponent taken from a quasiring Q, if it is possible to any $a \in S$, $m \in Q$ to associate an element (denoted by the symbol a^m) of the semigroup S so that for arbitrary $a \in S$, $m \in Q$, $n \in Q$ it holds:

$$a^1 = a, \qquad \text{(A)}$$

$$a^{m+n} = a^m a^n, \qquad \text{(B)}$$

$$a^{m.n} = (a^n)^m. \qquad \text{(C)}$$

It is proved in the paper: Necessary and sufficient condition for that in the semigroup S be possible to define the powers...

1. ...with positive rational exponent, is: for any positive integer k and for any $a \in S$ exactly one element $x \in S$ exists for which $x^k = a$ (this element we denote by the symbol $x = \sqrt[k]{a}$; there are investigated some properties of these „roots");

2. ...with exponent from positive part K of number field, is: S is the (set-theoretical) union of pairwise disjoint semigroups, each of them either consists of one element or is isomorphic with the additive semigroup of the quasiring K;

3. ...with integer exponent, is: S is the union of (pairwise disjoint) groups;

4. ...with exponent from the field T, is: S is the union of (pairwise disjoint) groups, each of them either consists of one element or is the union of subgroups isomorphic with the additive group of the field T such that any two different from these subgroups have exactly one common element (the identity of the group).