MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 13, 2, 1963

JEDNOPARAMETRICKÉ SYSTÉMY ROVIN V PROSTORU S_6

MILOSLAV JŮZA, Praha

V řadě prací byly studovány přímkové plochy v projektivním prostoru liché dimenze ([1], [5], [6]). V resumé k práci [2] a v práci [4] bylo ukázáno, jak lze některé výsledky zobecnit na variety tvořené jednoparametrickým systémem lineárních prostorů vnořené do projektivního prostoru vhodné dimenze.

Přímkové plochy v prostorech sudé dimenze byly studovány mnohem méně (některé výsledky např. v pracích [1] a [3]). V tomto článku se studují variety tvořené jednoparametrickými systémy rovin v šestirozměrném projektivním prostoru. Ukazuje se, že vlastnosti takovýchto variet jsou obdobné vlastnostem přímkových ploch ve čtyřrozměrném prostoru.

1. V šestirozměrném prostoru projektivním S_6 mějme jednoparametrický systém rovin $S_2(t) = [y_0(t), y_1(t), y_2(t)]$. Varietu vytvořenou rovinami $S_2(t)$ budeme nazývat *monosystémem* a značit $V_{2,6}$ (viz práci [4]). Monosystém $V_{2,6}$ nazveme *nerozvinutelným*, jestliže matice

$$(y_0, y_1, y_2, y'_0, y'_1, y'_2)$$

má hodnost 6. V tomto článku se budeme zabývat jen nerozvinutelnými monosystémy.

Mějme tedy nerozvinutelný monosystém $V_{2,6}$ daný řídicími křivkami y_0, y_1, y_2. Jestliže matice

$$(y_0, y_1, y_2, y'_0, y'_1, y'_2, y''_0, y''_1, y''_2)$$

má všude hodnost 6, pak snadno zjistíme, že celý monosystém leží v pětirozměrném prostoru. Tento případ byl podrobně studován v práci [4], a proto se jím nyní nebudeme zabývat. Uvažujeme tedy případ, že napsaná matice má hodnost 7 (přitom vylučujeme jednotlivé body, ve kterých hodnost matice je 6). Řídicí křivky můžeme očíslovat tak, aby

$$y_0, y_1, y_2, y'_0, y'_1, y'_2, y''_0$$

byly lineárně nezávislé. Potom je splněn systém diferenciálních rovnic

$$\left.\begin{aligned} y'''_0 &= a y''_0 = \sum_{j=0}^{2} b^j y'_j + \sum_{j=0}^{2} c^j y_j, \\ y''_i &= a_i y''_0 + \sum_{j=0}^{2} m_i^j y'_j = \sum_{j=0}^{2} n_i^j y_j, \qquad i = 1, 2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

kde $a, a_i, \ldots, n_i^j$ jsou funkce t. Zavedeme-li novou soustavu řídicích křivek vztahy

$$\bar{y}_0 = y_0,$$
$$\bar{y}_1 = y_1 - a_1 y_0,$$
$$\bar{y}_2 = y_2 - a_2 y_0,$$

budou mezi $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ platit rovnice obdobné rovnicím (1), ale bude přitom

$$a_1 \equiv a_2 \equiv 0. \tag{2}$$

Budeme nadále předpokládat, že řídicí křivky jsou zvoleny tak, že platí (1) a (2).

2. Tečným prostorem variety $V_{2,6}$ v bodě

$$x_0 = \sum_{j=0}^{2} \alpha_0^j y_j(t_0)$$

je prostor

$$T(\alpha_0^j, t_0) = [y_0(t_0), y_1(t_0), y_2(t_0), \sum_{j=0}^{2} \alpha_0^j y_j'(t_0)].$$

Sjednocení tečných prostorů v bodech tvořícího prostoru

$$[y_0(t_0), y_1(t_0), y_2(t_0)]$$

je prostor

$$T(t_0) = [y_0(t_0), y_1(t_0), y_2(t_0), y_0'(t_0), y_1'(t_0), y_2'(t_0)].$$

Máme-li na monosystému křivku

$$x(t) = \sum_{j=0}^{2} \alpha^j(t)\, y_j(t), \tag{3}$$

je jejím k-oskulačním prostorem v bodě $x(t_0)$ prostor

$$\Omega_k(t_0) = [x(t_0), x'(t_0), \ldots, x^{(k)}(t_0)].$$

Tečná křivka x v bodě t_0, tj. prostor $\Omega_1(t_0)$, leží v prostoru $T(\alpha^j(t_0), t_0)$ a ovšem i v prostoru $T(t_0)$. Zjistíme, za jakých podmínek leží dokonce 2-oskulační rovina $\Omega_2(t_0)$ křivky x v bodě t_0 v tečném prostoru $T(t_0)$.

Derivováním (3) dostaneme podle (1) a (2)

$$x' = \sum_{j=0}^{2} \alpha^j y_j' + \sum_{j=0}^{2} (.)\, y_j,$$

$$x'' = \sum_{j=0}^{2} \alpha^j y_j'' + \sum_{j=0}^{2} ((.)\, y_j' + (.)\, y_j) = \alpha^0 y_0'' + \sum_{j=0}^{2} ((.)\, y_j' + (.)\, y_j),$$

kde (.) značí koeficienty, které nás nezajímají. Aby $x''(t_0) \in T(t_0)$, je nutné a stačí, aby $\alpha^0(t_0) = 0$, tj. aby bod $x(t_0)$ ležel na přímce $[y_1(t_0), y_2(t_0)]$. Body na křivce x,

které mají vlastnost $x''(t) \in T(t)$, nazveme *kvasiasymptotickými body 1. řádu*; křivku, jejíž každý bod je kvasiasymptotickým bodem 1. řádu, nazveme *kvasiasymptotickou křivkou 1. řádu*. Zjistili jsme tedy, že *bod $x(t_0)$ na křivce (3) je za předpokladu (1) a (2) kvasiasymptotickým bodem 1. řádu právě když leží na přímce* $[y_1(t_0), y_2(t_0)]$. Tuto přímku nazveme *fleknodální přímkou 1. řádu* tvořícího prostoru $[y_0(t_0), y_1(t_0), y_2(t_0)]$, její body *fleknodálními body 1. řádu* tohoto tvořícího prostoru a přímkovou plochu tvořenou fleknodálními přímkami 1. řádu nazveme *fleknodální plochou 1. řádu*. *Křivka na monosystému je tedy kvasiasymptotickou křivkou 1. řádu právě tehdy, leží-li na fleknodální ploše 1. řádu.*

3. Budeme opět předpokládat, že máme nerozvinutelný monosystém $V_{2,6}$ daný vztahy (1) a (2) a omezíme se na případ, že není současně

$$m_1^0 \equiv m_2^0 \equiv 0. \tag{4}$$

Vhodným očíslováním řídicích křivek můžeme dosáhnout toho, že

$$m_1^0 \neq 0. \tag{5}$$

Zavedeme-li novou soustavu řídicích křivek vztahy

$$\bar{y}_0 = y_0,$$
$$\bar{y}_1 = y_1,$$
$$\bar{y}_2 = y_2 - \frac{m_2^0}{m_1^0}\, y_1,$$

budou platit rovnice obdobné rovnicím (1), ale kromě (2) bude platit ještě

$$m_2^0 \equiv 0. \tag{6}$$

Budiž $x(t)$ kvasiasymptotická křivka 1. řádu na $V_{2,6}$. Bod $x(t_0)$ nazveme *kvasiasymptotickým bodem 2. řádu* křivky $x(t)$, jestliže $x'''(t_0) \in T(t_0)$. Kvasiasymptotickou křivku 1. řádu, jejíž každý bod je kvasiasymptotickým bodem 2. řádu, nazveme *kvasiasymptotickou křivkou 2. řádu*.

Najdeme podmínky, za kterých bod na kvasiasymptotické křivce 1. řádu

$$x = \alpha^1 y_1 + \alpha^2 y_2$$

je kvasiasymptotický 2. řádu. Podle (1), (2) a (6) zjistíme, že

$$x''' = \alpha^1 m_1^0 y_0'' + \sum_{j=0}^{2} ((.)\, y_j' + (.)\, y_j).$$

Vzhledem k (5) je tedy bod $x(t_0)$ kvasiasymptotický 2. řádu právě tehdy, když $\alpha^1(t_0) = 0$, tj. splyne-li s bodem $y_2(t_0)$. Bod $y_2(t)$ nazveme (samozřejmě za předpokladu (2) a (6)) *fleknodálním bodem 2. řádu* tvořícího prostoru $[y_0(t), y_1(t), y_2(t)]$

a křivku tvořenou fleknodálními body 2. řádu nazveme *fleknodální křivkou 2. řádu.* Máme tedy výsledek: *Bod na kvasiasymptotické křivce 1. řádu je kvasiasymptotický 2. řádu právě tehdy, je-li fleknodální 2. řádu. Kvasiasymptotická křivka 1. řádu je kvasiasymptotická 2. řádu právě tehdy, splývá-li s fleknodální křivkou 2. řádu.*

4. Předpokládejme, že nerozvinutelný monosystém je dán rovnicemi (1) a že kromě (2), (5) a (6) platí ještě

$$m_2^1 \neq 0. \tag{7}$$

Zavedeme nový systém řídicích křivek pomocí vztahů

$$\left.\begin{aligned} y_2 &= \bar{y}_2, \\ y_1 &= \mu_1 \bar{y}_1 + \mu_2 \bar{y}_2, \quad \mu_1 \neq 0, \\ y_0 &= \nu_0 \bar{y}_0 + \nu_1 \bar{y}_1 + \nu_2 \bar{y}_2, \quad \nu_0 \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Mezi $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ platí vztahy obdobné vztahům (1) (koeficienty v těchto rovnicích budeme značit obdobně jako v (1), ale s pruhem nahoře) a snadno zjistíme, že platí také (2), (5), (6), (7). Derivováním (8) dostaneme

$$\begin{aligned} y_2' &= \bar{y}_2, \\ y_1' &= \mu_1 \bar{y}_1' + \mu_2 \bar{y}_2' + \mu_1' \bar{y}_1 + \mu_2' \bar{y}_2, \\ y_0' &= \nu_0 \bar{y}_0' + \nu_1 \bar{y}' + \nu_2 \bar{y}_2' + \nu_0' \bar{y}_0 + \nu_1' \bar{y}_1 + \nu_2' \bar{y}_2, \\ y_2'' &= \bar{y}_2'', \\ y_1'' &= \mu_1 \bar{y}_1'' + \mu_2 \bar{y}_2'' + 2\mu_1' \bar{y}_1' + 2\mu_2' \bar{y}_2' + (.)\, \bar{y}_1 + (.)\, \bar{y}_2. \end{aligned}$$

Dosazením do poslední z rovnic (1) dostaneme

$$\bar{y}_2'' = m_2^1 \mu_1 \bar{y}_1' + (m_2^1 \mu_2 + m_2^2)\, \bar{y}_2' + \sum_{j=0}^{2} (.)\, \bar{y}_j.$$

Vzhledem k (7) můžeme zvolit $\mu_1, \mu_2, \mu_1 \neq 0$, právě jedním způsobem tak, aby

$$\overline{m_2^1} \equiv 1, \qquad \overline{m_2^2} = 0.$$

Dosazením do předposlední rovnice (1) potom dostaneme

$$\bar{y}_1'' = m_1^0 \frac{\nu_0}{\mu_1} \bar{y}_0' + \left(m_1^0 \frac{\nu_1}{\mu_1} + m_1^1 - \frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{2\mu_1'}{\mu_1}\right) \bar{y}_1' +$$

$$+ \left(m_1^0 \frac{\nu_2}{\mu_1} + m_1^1 \frac{\mu_2}{\mu_1} + \frac{m_1^2}{\mu_1} - \frac{2\mu_2'}{\mu_1}\right) \bar{y}_2' + \sum_{j=0}^{2} (.)\, \bar{y}_j.$$

Vzhledem k (5) tedy můžeme zvolit $\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_0 \neq 0$, právě jedním způsobem tak, aby

$$\overline{m_1^0} \equiv 1, \qquad \overline{m_1^1} \equiv \overline{m_2^2} \equiv 0.$$

Můžeme tedy v obecném případě řídicí křivky monosystému zvolit tak, aby platilo

$$\left.\begin{aligned} y_0''' &= a\, y_0'' + \sum_{j=0}^{2} b^j y_j' + \sum_{j=0}^{2} c^j y_j, \\ y_1'' &= y_0' + \sum_{j=0}^{2} n_1^j y_j, \\ y_2'' &= y_1' + \sum_{j=0}^{2} n_2^j y_j. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

5. Zvolíme-li řídicí křivky monosystému $V_{2,6}$ tak, aby platilo (9), nejsou koeficienty v rovnicích (9) ještě jednoznačně určeny. Můžeme totiž ještě jednak znásobit y_2 libovolnou skalární funkcí, jednak změnit parametr. Změňme systém řídicích křivek a parametr podle vzorců

$$\left.\begin{aligned} y_2(t) &= \lambda(t)\, \bar{y}_2(\bar{t}(t)), \quad \frac{d\bar{t}}{dt} \neq 0, \quad \lambda \neq 0, \\ y_1(t) &= \mu_1(t)\, \bar{y}_1(\bar{t}(t)) + \mu_2(t)\, \bar{y}_2(\bar{t}(t)), \quad \mu_1 \neq 0, \\ y_0(t) &= \nu_0(t)\, \bar{y}_0(\bar{t}(t)) + \nu_1(t)\, \bar{y}_1(\bar{t}(t)) + \nu_2(t)\, \bar{y}_2(\bar{t}(t)), \quad \nu_0 \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Zvolíme-li libovolně funkce $\lambda(t)$, $\bar{t}(t)$ (aby $\lambda \neq 0$, $d\bar{t}/dt \neq 0$), pak podle § 4 můžeme právě jedním způsobem určit funkce $\mu_1, \mu_2, \nu_0, \nu_1, \nu_2$ tak, že mezi $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ budou opět platit vztahy obdobné vztahům (9). Přitom bude (budeme označovat derivace podle t čárkou, derivace podle $\bar{t}$ tečkou):

$$\begin{aligned} y_2' &= \lambda \bar{t}' \dot{\bar{y}}_2 + (.)\, \bar{y}_2, \\ y_2'' &= \lambda (\bar{t}')^2 \ddot{\bar{y}}_2 + (.)\, \dot{\bar{y}}_2 + (.)\, \bar{y}_2, \\ y_1' &= \mu_1 \bar{t}' \dot{\bar{y}}_1 + (.)\, \dot{\bar{y}}_2 + (.)\, \bar{y}_1 + (.)\, \bar{y}_2, \\ y_1'' &= \mu_1 (\bar{t}')^2 \ddot{\bar{y}}_1 + (.)\, \ddot{\bar{y}}_2 + (.)\, \dot{\bar{y}}_1 + (.)\, \dot{\bar{y}}_2 + (.)\, \bar{y}_1 + (.)\, \bar{y}_2 = \\ &= \mu_1 (\bar{t}')^2 \ddot{\bar{y}}_1 + (.)\, \dot{\bar{y}}_1 + (.)\, \dot{\bar{y}}_2 + (.)\, \bar{y}_0 + (.)\, \bar{y}_1 + (.)\, \bar{y}_2, \\ y_0' &= \nu_0 \bar{t}' \dot{\bar{y}}_3 + (.)\, \dot{\bar{y}}_1 + (.)\, \dot{\bar{y}}_2 + (.)\, \bar{y}_0 + (.)\, \bar{y}_1 + (.)\, \bar{y}_2, \end{aligned}$$

tedy

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\bar{y}}_2 &= \frac{\mu_1 \bar{t}'}{\lambda (\bar{t}')^2} \dot{\bar{y}}_1 + (.)\, \dot{\bar{y}}_2 + \frac{n_2^0 \nu_0}{\lambda (\bar{t}')^2} \bar{y}_0 + (.)\, \bar{y}_1 + (.)\, \bar{y}_2, \\ \ddot{\bar{y}}_1 &= \frac{\nu_0 \bar{t}'}{\mu_1 (\bar{t}')^2} \dot{\bar{y}}_0 + (.)\, \dot{\bar{y}}_1 + (.)\, y_2 = \sum_{j=0}^{2} (.)\, \bar{y}_j. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Protože jsme funkce $\mu_1, \mu_2, \nu_0, \nu_1, \nu_2$ zvolili tak, aby mezi $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ platily vztahy obdobné vztahům (9), musí být v první rovnici (11) koeficient u $\dot{\bar{y}}_1$ a v druhé rovnici (11) koeficient u $\dot{\bar{y}}_0$ roven 1, tedy

$$\mu_1 = \lambda \bar{t}', \qquad \nu_0 = \mu_1 \bar{t}' = \lambda (\bar{t}')^2.$$

Označíme-li v rovnicích (9) pro $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ koeficienty pruhem nahoře, pak podle (11) dostaneme

$$\bar{n}_2^0 = n_2^0 \frac{\nu_0}{\lambda(\bar{t}')^2} = n_2 \frac{\lambda(\bar{t}')^2}{\lambda(\bar{t}')^2} = n_2^0.$$

Funkce n_2^0 v (9) je tedy invariant monosystému.

6. Zvolme opět řídicí křivky monosystému, aby platilo (9), a omezme se na transformace (10), při kterých se nemění parametr, tj. při kterých $\bar{t} = t$. Zjistíme, jak musíme zvolit funkce $\mu_1, \mu_2, \nu_0, \nu_1, \nu_2$, aby mezi $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2$ opět platily vztahy obdobné vztahům (9).

Derivováním (10) v případě $t = \bar{t}$ dostaneme

$$\begin{aligned}
y_2' &= \lambda\bar{y}_2' + \lambda'\bar{y}_2,\\
y_2'' &= \lambda\bar{y}_2'' + 2\lambda'\bar{y}_2' + (.)\,\bar{y}_2,\\
y_1' &= \mu_1\bar{y}_1' + \mu_2\bar{y}_2' + \mu_1'\bar{y}_1 + \mu_1'\bar{y}_2,\\
y_1'' &= \mu_1\bar{y}_1'' + \mu_2\bar{y}_2'' + 2\mu_1'\bar{y}_1' + 2\mu_2'y_2' + (.)\,\bar{y}_1 + (.)\,\bar{y}_2,\\
y_0' &= \nu_0\bar{y}_0' + \nu_1\bar{y}_1' + \nu_2\bar{y}_2' + \sum_{j=0}^{2} (.)\,y_j.
\end{aligned}$$

Dosazením do poslední rovnice (9) dostaneme

$$\bar{y}_2'' = \frac{\mu_1}{\lambda}\bar{y}_1' + \left(\frac{\mu_2}{\lambda} - \frac{2\lambda'}{\lambda}\right)\bar{y}_2' + \sum_{j=0}^{2} (.)\,y_j.$$

Aby opět platily vztahy (9), musí tedy být

$$\frac{\mu_1}{\lambda} = 1, \qquad \frac{\mu_2}{\lambda} - \frac{2\lambda'}{\lambda} = 0,$$

tedy

$$\mu_1 = \lambda, \qquad \mu_2 = 2\lambda'.$$

Dosazením do druhé rovnice (9) dostaneme

$$\begin{aligned}
\bar{y}_1'' = &-\frac{\mu_2}{\mu_1}\bar{y}_2'' - \frac{2\mu_1'}{\mu_1}\bar{y}_1' - \frac{2\mu_2'}{\mu_1}y_2' + \frac{\nu_0}{\mu_1}\bar{y}_0' + \frac{\nu_1}{\mu_1}\bar{y}_1' +\\
&+ \frac{\nu_2}{\mu_1}\bar{y}_2' + \sum_{j=0}^{2} (.)\,\bar{y}_j =\\
= &\frac{\nu_0}{\lambda}\bar{y}_0' = \left(\frac{\nu_1}{\lambda} - \frac{4\lambda'}{\lambda}\right)\bar{y}_1' + \left(\frac{\nu_2}{\lambda} - \frac{4\lambda''}{\lambda}\right)\bar{y}_2' + \sum_{j=0}^{2} (.)\,\bar{y}_j.
\end{aligned}$$

Aby platily vztahy (9), musí být

$$\frac{\nu_0}{\lambda} = 1, \qquad \frac{\nu_1}{\lambda} - \frac{4\lambda'}{\lambda} = 0, \qquad \frac{\nu_2}{\lambda} - \frac{4\lambda''}{\lambda} = 0,$$

tedy

$$\nu_0 = \lambda, \qquad \nu_1 = 4\lambda', \qquad \nu_2 = 4\lambda''.$$

Dostali jsme tedy transformaci

$$\left.\begin{aligned}
y_2 &= \lambda\bar{y}_2, \qquad \lambda \neq 0,\\
y_1 &= \lambda\bar{y}_1 + 2\lambda'\bar{y}_2,\\
y_0 &= \lambda\bar{y}_0 + 4\lambda'\bar{y}_1 + 2\lambda''\bar{y}_2.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Zjistili jsme tedy, že (12) *je nejobecnější transformace, která zachovává vztahy (9), nemění-li se parametr.*

Derivováním poslední z rovnic (12) s přihlédnutím k (9) dostaneme

$$\begin{aligned}
y_0' &= \lambda\bar{y}_0' + 4\lambda'\bar{y}_1' + \lambda'\bar{y}_0 + (.)\,\bar{y}_2' + (.)\,\bar{y}_1 + (.)\,\bar{y}_2,\\
y_0'' &= \lambda\bar{y}_0'' + 4\lambda'\bar{y}_1'' + 2\lambda'\bar{y}_0' + (.)\,\bar{y}_1' + (.)\,\bar{y}_2' + \sum_{j=0}^{2} (.)\,\bar{y}_j =\\
&= \lambda\bar{y}_0'' + 6\lambda'\bar{y}_0' + (.)\,\bar{y}_1' + (.)\,\bar{y}_2' + \sum_{j=0}^{2} (.)\,\bar{y}_j,\\
y_0''' &= \lambda y_0''' + 7\lambda' y_0'' + \sum_{j=0}^{2} ((.)\,\bar{y}_j' + (.)\,\bar{y}_j).
\end{aligned}$$

Body $\bar{y}_1'', \bar{y}_2''$ jsou lineárními kombinacemi bodů $\bar{y}_j, \bar{y}_j'$. Dosazením do první z rovnic (9) dostaneme

$$\bar{y}_0''' = \left(a - 7\frac{\lambda'}{\lambda}\right)y_0'' + \sum_{j=0}^{2} ((.)\,\bar{y}_j' + (.)\,\bar{y}_j),$$

tedy

$$\bar{a} = a - 7\frac{\lambda'}{\lambda}. \tag{13}$$

Zvolíme-li $\lambda = \lambda_0 \exp((1/7)\int a\,dt)$, kde λ_0 je libovolná konstanta různá od nuly, bude $\bar{a} = 0$. Řídicí křivky jsou pak jednoznačně určeny až na týž konstantní faktor. Avšak je vidět, že koeficienty rovnic (9) se nezmění, znásobíme-li y_0, y_1, y_2 týmž konstantním faktorem. Máme tedy tento výsledek:

Nechť monosystém je možno vyjádřit rovnicemi tvaru (9). Potom při vhodné volbě řídicích křivek – aniž bychom změnili parametr – je možno dosáhnout toho, že platí (9), při čemž

$$a \equiv 0. \tag{14}$$

Ostatní koeficienty v (9) jsou potom při zvoleném parametru jednoznačně určeny a jsou to tedy semiinvarianty monosystému.

7. Nechť monosystém $V_{2,6}$ je dán rovnicemi (9) (normalizaci (14) není třeba před-
pokládat). Bod $x(t_0)$ křivky (3) jsme nazvali kvasiasymptotickým bodem 1. řádu,
jestliže $x''(t_0) \in T(t_0)$. Jestliže dokonce $x''(t_0) \in T(\alpha^j(t_0), t_0)$, nazveme bod $x(t_0)$ *asym-
ptotickým bodem* křivky (3).

Protože pro křivku (3) podle (9) máme

$$x'' = \alpha^0 y_0'' + (2\alpha^{0\prime} + \alpha^1)\, y_0' + (2\alpha^{1\prime} + \alpha^2)\, y_1' + 2\alpha^{2\prime} y_2' + \sum_{j=0}^{2} (.)\, y_j$$

a přitom

$$T(\alpha^j(t_0), t_0) = \left[y_0(t_0), y_1(t_0), y_2(t_0), \sum_{j=0}^{2} \alpha^j(t_0)\, y_j(t_0) \right],$$

bude bod $x(t_0)$ křivky (3) asymptotický tehdy a jen tehdy, jestliže $\alpha^0(t_0) = 0$ a matice

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha^1 & \alpha^2 \\ 2\alpha^{0\prime} + \alpha^1 & 2\alpha^{1\prime} + \alpha^2 & 2\alpha^{2\prime} \end{pmatrix} \tag{15}$$

má hodnost 1, vezmeme-li hodnoty funkcí v bodě t_0. Snadno vypočteme, že má-li matice (15) v bodě t_0 hodnost 1 pro funkce $\alpha^i(t)$, má vzhledem k $\alpha^0(t_0) = 0$ hodnost 1 i pro funkce $c(t)\, \alpha^i(t)$, kde $c(t)$ je libovolná hladká funkce všude různá od nuly. To ostatně plyne i přímo z geometrického významu. Podmínka $\alpha^0(t_0) = 0$ nám říká, že asymptotický bod může ležet jen na fleknodální ploše 1. řádu.

Mějme nyní na fleknodální ploše 1. řádu bod

$$A = \alpha_0^1 y_1(t_0) + \alpha_0^2 y_2(t_0)$$

a budiž (3) křivka procházející bodem A a mající bod A za asymptotický bod. Potom

$$\alpha^0(t_0) = 0, \qquad \alpha^1(t_0) = c\alpha_0^1, \qquad \alpha^2(t_0) = c\alpha_0^2, \qquad c \neq 0, \tag{16}$$

protože dále matice (15) má mít hodnost 1, musejí derivace $\alpha^{i\prime}(t_0) = \xi^i$ splňovat rovnice

$$\xi^0 = \frac{1}{2} c\alpha_0^1, \qquad 2c\alpha_0^1 \xi^2 - c\alpha_0^2 (2\xi^1 + c\alpha_0^2) = 0. \tag{17}$$

Budiž $\bar{x} = \sum_{j=0}^{2} \bar{\alpha}^j(t)\, y_j(t)$ jiná křivka na monosystému procházející bodem A a mající bod A jako asymptotický bod. Potom, označíme-li $\bar{\alpha}^{i\prime}(t_0) = \bar{\xi}^i$, platí podobně

$$\bar{\alpha}^0(t_0) = 0, \qquad \bar{\alpha}^1(t_0) = \bar{c}\alpha_0^1, \qquad \bar{\alpha}^2(t_0) = \bar{c}\alpha_0^2, \qquad \bar{c} \neq 0, \tag{18}$$

$$\bar{\xi}^0 = \frac{1}{2} \bar{c}\alpha_0^1, \qquad 2\bar{c}\alpha_0^1 \bar{\xi}^2 - \bar{c}\alpha_0^2 (2\bar{\xi}_1 + \bar{c}\alpha_0^2) = 0. \tag{19}$$

Srovnáním prvních rovnic (17) a (19) dostaneme

$$\bar{\xi}^0 = \frac{\bar{c}}{c} \xi^0; \tag{20}$$

podobně srovnáním druhých rovnic (17) a (19) dostaneme

$$\alpha_0^1 \left(\bar{\xi}^2 - \frac{\bar{c}}{c} \xi^2 \right) - \alpha_0^2 \left(\bar{\xi}^1 - \frac{\bar{c}}{c} \xi^1 \right) = 0,$$

což znamená, že existuje číslo k tak, že

$$\bar{\xi}^1 = \frac{\bar{c}}{c} \xi^1 + k\alpha_0^1, \qquad \bar{\xi}^2 - \frac{\bar{c}}{c} \xi^2 + k\alpha_0^2. \tag{21}$$

Srovnáním (20) a (21) s (16) a (18) vidíme, že obě křivky mají v bodě A touž tečnu. Naopak snadno zjistíme, že každá křivka na monosystému procházející bodem A a mající tuto tečnu má bod A jako asymptotický. Máme tedy výsledek: *Křivka na monosystému $V_{2,6}$ daném rovnicemi (9) může mít asymptotické body jen na fleknodální ploše 1. řádu. Přitom v každém bodě A fleknodální plochy 1. řádu existuje právě jeden směr takový, že křivka procházející bodem A má bod A asymptotický právě tehdy, má-li v A tečnu tohoto směru.* Tomuto směru budeme říkat *asymptotický směr v bodě A.*

Aby všechny body křivky (3) byly asymptotické, bylo by nutno, aby $\alpha^0 \equiv 0$ a aby matice (15) měla hodnost 1 pro všechna t. Je vidět, že je to možné jen pro $\alpha^0 \equiv \alpha^1 \equiv \equiv \alpha^2 \equiv 0$. To znamená, že *na monosystému daném rovnicemi* (9) *neexistují asymptotické křivky.*

8. Mějme opět monosystém vyjádřený rovnicemi (9). Víme již z § 3, že $y_2(t)$ je kvasiasymptotická křivka 2. řádu. Její bod $y_2(t_0)$ nazveme kvasiasymptotickým 3. řádu, jestli-že platí dokonce $y_2^{\mathrm{IV}}(t_0) \in T(t_0)$. Derivováním poslední z rovnic (9) a dosazením z ostatních rovnic (9) dostaneme:

$$\begin{aligned} y_2''' &= y_1'' + n_2^0 y_0' + (.)\, y_1' + (.)\, y_2' + \sum_{j=0}^{2} (.)\, y_j = \\ &= (1 + n_2^0)\, y_0' + (.)\, y_1' + (.)\, y_2' + \sum_{j=0}^{2} (.)\, y_j, \\ y_2^{\mathrm{IV}} &= (1 + n_2^0)\, y_0'' + \sum_{j=0}^{2} ((.)\, y_j' + (.)\, y_j). \end{aligned} \tag{22}$$

Odtud dostaneme tento výsledek: *Bod $x(t_0)$ na kvasiasymptotické křivce 2. řádu monosystému* (9) *je kvasiasymptotickým bodem 3. řádu právě tehdy, jestliže $n_2^0(t_0) = -1$.* Tím je částečně objasněn geometrický význam invariantu n_2^0.

9. Všimněme si na závěr aspoň zběžně případů, které jsme zatím vyloučili. Především na začátku § 4 jsme požadovali splnění (7). Předpokládejme nyní,

že pro monosystém (1) platí (2), (5) a (6) a že kromě toho $m_2^1 \equiv 0$. Potom rovnice (1) budou vypadat takto:

$$y_0''' = a y_0'' + \sum_{j=0}^{2} b^j y_j' + \sum_{j=0}^{2} c^j y_j,$$

$$y_1'' = m_1^0 y_0' + m_1^1 y_1' + m_1^2 y_2' + \sum_{j=0}^{2} n_1^j y_j, \qquad m_1^0 \neq 0, \tag{22}$$

$$y_2'' = m_2^2 y_2' + \sum_{j=0}^{2} n_2^j y_j.$$

Je ihned vidět rozdíl mezi případem (9) a případem (22). V případě (9) neexistovaly asymptotické křivky. *V případě (22) je křivka $y_2(t)$, tj. jediná kvasiasymptotická křivka 2. řádu, současně asymptotickou křivkou.* Snadno zjistíme, že *$y_2(t)$ je za předpokladu $m_1^0 \neq 0$ jediná asymptotická křivka.*

Dále si všimneme případu, který jsme vyloučili na začátku § 3, že totiž pro monosystém (1) platí (2) a (4). Máme-li v tomto případě kvasiasymptotickou křivku 1. řádu

$$x(t) = \alpha'(t)\, y_1(t) + \alpha^2(t)\, y_2(t),$$

potom pro každé t nejen $x''(t) \in T(t)$, ale dokonce $x'''(t) \in T(t)$. *Každá kvasiasymptotická křivka 1. řádu je tedy v tomto případě kvasiasymptotickou křivkou 2. řádu.*

LITERATURA

[1] Čech E., *Projektivní geometrie přímkových ploch v prostorech o jakémkoli počtu dimensí* I., Rozpravy II. třídy České akademie *33* (1924), 13, 1—8.

[2] Čech E., *Nová metoda projektivní geometrie zborcených ploch*, Časopis pro pěst. mat. a fys. *53*, (1924), 31—37.

[3] Fubini G., Čech E., *Geometria proiettiva differenziale*, Bologna 1927.

[4] Jůza M., *Sur les variétés représentants une généralisation des surfaces réglées*, Чех. мат. журнал *10 (85)* (1960), 440—456.

[5] Švec A., *Sur la déformation projective des surfaces réglées*, Чех. мат. журнал *5 (80)* (1955), 355—361.

[6] Švec A., *Quelques remarques au sujet de la théorie des surfaces réglées dans des espaces projectifs de dimension impaire*, Чех. мат. журнал *10 (85)* (1960), 309—315.

[7] Wilczynski E. J., *Projective differential geometry of curves and ruled surfaces*, Leipzig 1906.

Došlo 27. 7. 1962.

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ S_6

Милослав Юза

Резюме

Пусть в проективном пространстве S_6 дано многообразие, образованное однопараметрической системой плоскостей $S_2(t) = [y_0(t), y_1(t), y_2(t)]$. Пусть точки $y_0, y_1, y_2, y_0', y_1', y_2', y_0''$ линейно независимы. В этом случае имеет место система дифференциальных уравнений (1). Мы можем выбрать направляющие кривые y_0, y_1, y_2 таким образом, чтобы имело место (2). Если (4) не выполняется, но (7) справедливо, то мы можем подобрать направляющие кривые таким образом, что уравнения (1) будут иметь форму (9).

Обозначим через $T(a_0^j, t_0)$ касательное пространство многообразия $V_{2,6}$ в точке $x_0 = \sum_{j=0}^{2} a_0^j y_j(t_0)$. Обозначим далее через $T(t_0)$ объединение касательных пространств во всех точках плоскости $[y_0(t_0), y_1(t_0), y_2(t_0)]$. Если $x(t)$ — кривая на $V_{2,6}$, то всегда $x'(t) \in T(t)$. Если кроме того $x''(t) \in T(t), \ldots, x^{(k)}(t) \in T(t)$, то мы будем кривую $x(t)$ называть *квазиасимптотической кривой порядка* $k - 1$. Если имеет место $x''(t) \in T(a_0^j, t_0)$, то кривую $x(t)$ будем называть *асимптотической кривой*.

Если уравнения многообразия $V_{2,6}$ имеют форму (9), то можно доказать следующее теоремы: *кривая на $V_{2,6}$ является квазиасимптотической порядка* 1, *если она лежит на поверхности* $[y_1(t), y_2(t)]$, *и только в этом случае. Кривая $y_2(t)$ — единственная квазиасимптотическая кривая порядка* 2. *Эта кривая будет квазиасимптотической порядка* 3 *тогда и только тогда, когда* $n_2^0 \equiv -1$. *На многообразии не существует асимптотических кривых.*

В случае, когда ни (4) ни (7) не имеет места, направляющие кривые можно подобрать таким образом, что уравнения (1) имеют форму (22). В этом случае *имеются те же квазиасимптотические кривые, что и в предыдущем случае, но кривая $y_2(t)$* (*единственная квазиасимптотическая кривая порядка* 2) *является также асимптотической кривой.*

Если имеет место (4), мы видим, что *квазиасимптотические кривые порядка* 1 — *кривые на поверхности* $[y_1(t), y_2(t)]$, *но каждая квазиасимптотическая кривая порядка* 1 *является квазиасимптотической кривой порядка* 2.

LE SYSTÈME MONOPARAMÉTRIQUE DES PLANS DANS L'ESPACE S_6

Miloslav Jůza

Résumé

Ayons dans l'espace projectif S_6 une variété $V_{2,6}$ formée par un système monoparamétrique des plans $S_2(t) = [y_0(t), y_1(t), y_2(t)]$. Les points $y_0, y_1, y_2, y_0', y_1', y_2', y_0''$ soient linéairement indépendants. Alors, le système (1) des équations différentielles a lieu. Par le choix convenable des courbes directrices y_0, y_1, y_2 nous pouvons faire valoir (2). Si (4) n'a pas lieu et (7) a lieu, on peut choisir les courbes directrices de la manière que les équations (1) prennent la forme (9).

Nous désignons l'espace tangent de la variété $V_{2,6}$ au point $x_0 = \sum_{j=0}^{2} a_0^j y_j(t_0)$ par $T(a_0^j, t_0)$.

Nous désignons encore la somme des espaces tangents à tous les points du plan $[y_0(t_0), y_1(t_0), y_2(t_0)]$ par $T(t_0)$. Étant $x(t)$ une courbe sur $V_{2,6}$, on a toujour $x'(t) \in T(t)$. Si on a aussi $x''(t) \in T(t), \ldots, x^{(k)}(t) \in T(t)$, on apelle la courbe $x(t)$ *quasiasymptotique d'ordre* $k-1$. Si on a $x''(t) \in T(a_0^j, t_0)$ on appelle la courbe $x(t)$ *asymptotique*.

Dans le cas où équations de la variété $V_{2,6}$ ont la forme (9), on peut prouver les résultats suivants: *Étant $x(t)$ une courbe sur $V_{2,6}$, cette courbe est quasiasymptotique d'ordre 1 si et seulement si elle est tracée sur la surface $[y_1(t), y_2(t)]$. Une seule courbe quasiasymptotique d'ordre 2 est la courbe $y_2(t)$. Cette courbe est quasiasymptotique d'ordre 3 si et seulement si $n_2^0 \equiv -1$. Sur la variété il n'y a pas courbes asymptotiques.*

Dans le cas où ni (4) ni (7) n'a lieu, les équations (1) prennent la forme (22) auprès de la choix convenable des courbes directrices. Dans ce cas, *les courbes quasiasymptotiques sont les mêmes que dans le cas précedent, mais la courbe $y_2(t)$ (une seule courbe quasiasymptotique d'ordre 2) est aussi asymptotique.*

Dans le cas où (4) a lieu, on voit que *les courbes quasiasymptotiques d'ordre 1 sont aussi les courbes tracées sur la surface $[y_1(t), y_2(t)]$ et que chaque courbe quasiasymptotique d'ordre 1 est aussi quasi-asymptotique d'ordre 2.*