MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 13, 2, 1963

ПРОСТОТА И МИНИМАЛЬНЫЕ ИДЕАЛЫ ПРЯМОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПОЛУГРУПП

ЯН ИВАН (Ján Ivan), Братислава

В статье исследуются условия простоты прямого произведения полугрупп и взаимоотношения между его минимальными идеалами и минимальными идеалами прямых факторов. Обобщаются и дополняются некоторые результаты работы [2].

Сначала мы напомним определения и основные свойства простой полугруппы и минимальных идеалов полугруппы (согласно с [1]).

Пусть S — полугруппа. Непустое подмножество $M \subseteq S$ называется *левым (правым) идеалом* полугруппы S, если $SM \subseteq M$ $(MS \subseteq M)$. Множество M, которое является одновременно левым и правым идеалом, называется *двусторонним идеалом* полугруппы S.

M называется *идеалом* полугруппы S, если оно является левым или правым идеалом полугруппы S.

Элемент $z \in S$ называется *нулем (нулевым элементом)* полугруппы S, если $az = za = z$ для всякого $a \in S$.

Идеал M полугруппы S называется *собственным идеалом*, если он содержит по меньшей мере один элемент отличный от нуля и если $M \neq S$.

Итак т. наз. *нулевый идеал* (т. е. идеал, который содержит только нулевый элемент) не является собственным идеалом.

Полугруппа S, в которой произведение каждых двух элементов нулевой элемент, называется *нулевой полугруппой*.

Полугруппа S, которая отлична от нулевой полугруппы порядка 2 и не содержит ни одного собственного двустороннего (левого, правого) идеала, называется *простой (слева простой, справа простой) полугруппой*.

О необходимом и достаточном условии простоты полугруппы говорит следующая известная теорема (смотри [1]).

Теорема А. *Полугруппа S проста (слева проста, справа проста) тогда и только тогда, если для всякого ненулевого элемента $a \in S$ имеет место $SaS = S$ $(Sa = S,\ aS = S)$.*

Левый (правый, двусторонний) идеал полугруппы S называется *минимальным левым (правым, двусторонним) идеалом*, если он не содержит ни одного соб-

ственного подмножества, которое само являлось бы собственным левым (правым, двусторонним) идеалом полугруппы S.

На основе этого определения и теоремы А нетрудно доказать следующую известную вспомогательную теорему.

Теорема В. *Пусть S — полугруппа без нуля. Левый (правый, двусторонний) идеал M полугруппы S является минимальным левым (правым, двусторонним) идеалом тогда и только тогда, если для всякого $a \in M$ имеет место $Ma = M$ $(aM = M,\ MaM = M)$, т. е. если M слева простая (справа простая, простая) полугруппа.*

Остальные понятия как идемпотент, единица полугруппы и т. д. имеют общепринятое значение.

В последующем изложении мы пользуемся следующими обозначениями. Символ $A \subset B$ (в отличие от $A \subseteq B$) всегда обозначает, что A есть собственное подмножество множества B. Символ $A \not\subset B$ значит, что A не является собственным подмножеством множества B. Символ $\varnothing$ обозначает пустое множество а (z) — нулевый идеал. Остальные обозначения сохраняют общепринятое значение. Вместо „M является идеалом полугруппы S“ будем часто говорить „M является идеалом в S“.

1.

Пусть $\{S_i\}_{i \in I}$ — произвольная совокупность полугрупп. Множество всех функций ξ, определенных на I так, что $\xi(i) \in S_i$, обозначим через S и введем в него операцию умножения следующим способом: если α и β — два произвольных элемента множества S, то произведение их $\gamma = \alpha\beta$ определим, положив $\gamma(i) = \alpha(i)\beta(i)$ для всякого $i \in I$. Множество S с так определенной в нем операцией умножения представляет собою полугруппу, которую будем называть *(полным) прямым произведением полугрупп* $\{S_i\}_{i \in I}$ и обозначать $S = \prod_{i \in I} S_i$.

Лемма 1.1. *Полугруппа $S = \prod_{i \in I} S_i$ содержит по меньшей мере один идемпотент тогда и только тогда, если каждая из полугрупп $\{S_i\}_{i \in I}$ содержит по меньшей мере один идемпотент.*

Доказательство. Пусть для всякого $i \in I$ полугруппа S_i содержит идемпотент e_i. По определению полугруппы S существует такой элемент $\varepsilon \in S$, что $\varepsilon(i) = e_i$ для всякого $i \in I$ и следовательно $\varepsilon^2(i) = \varepsilon(i)\,\varepsilon(i) = e_i e_i = e_i$, т. е. $\varepsilon^2 = \varepsilon$, а это значит, что ε является идемпотентом в S.

Наоборот, пусть S содержит по меньшей мере один идемпотент ε и пусть $\varepsilon(i) = e_i$ для $i \in I$. Тогда элемент e_i является очевидно идемпотентом в S_i.

Аналогично доказывается

Лемма 1.2. *Полугруппа $S = \prod_{i\in I} S_i$ содержит единицу (нуль) тогда и только тогда, если каждая из полугрупп $\{S_i\}_{i\in I}$ содержит единицу (нуль).*

Теорема 1.1. *Пусть I — множество, которое содержит по меньшей мере два элемента. Пусть $\{S_i\}_{i\in I}$ — совокупность полугрупп, каждая из которых содержит по меньшей мере два элемента. Полугруппа $S = \prod_{i\in I} S_i$ является простой (слева простой, справа простой) тогда и только тогда, если S_i является простой (слева простой, справа простой) полугруппой без нуля для всякого $i \in I$.*

Доказательство. Пусть для всякого $i \in I$ полугруппа S_i проста без нуля. По лемме 1.2 полугруппа $S = \prod_{i\in I} S_i$ является тоже полугруппой без нуля. Докажем, что полугруппа S проста. Согласно теореме A достаточно доказать, что для всякого $\alpha \in S$ имеет место $S\alpha S = S$, т. е. к произвольным двум элементам α, $\beta \in S$ существуют такие элементы ξ, $\eta \in S$, что $\xi\alpha\eta = \beta$.

Пусть α, β произвольные элементы из S и пусть $\alpha(i) = a_i \in S_i$, $\beta(i) = b_i \in S_i$. Согласно предположению каждая полугруппа S_i проста без нуля и следовательно по теореме A к элементам a_i, $b_i \in S_i$ существуют такие элементы x_i, $y_i \in S_i$, что $x_i a_i y_i = b_i$. По определению полугруппы S существуют такие элементы ξ, $\eta \in S$, что $\xi(i) = x_i$, $\eta(i) = y_i$ для $i \in I$. Итак $\xi(i)\,\alpha(i)\,\eta(i) = x_i a_i y_i = b_i = \beta(i)$ для всякого $i \in I$, т. е. $\xi\alpha\eta = \beta$.

Пусть $S = \prod_{i\in I} S_i$ — простая полугруппа, т. е. для всякого ненулевого элемента $\alpha \in S$ имеет место $S\alpha S = S$. Докажем, что для всякого $i \in I$ полугруппа S_i является простой без нуля.

Пусть $k \in I$, a_k, $b_k \in S_k$ и пусть a_k — ненулевой элемент в S_k. По определению полугруппы S существуют такие элементы α, $\beta \in S$, что $\alpha(k) = a_k$, $\beta(k) = b_k$. Согласно теореме A существуют ξ, $\eta \in S$ такие, что $\xi\alpha\eta = \beta$ и следовательно $\xi(k)\, a_k \eta(k) = b_k$. Это значит, что для всякого ненулевого элемента $a_k \in S_k$ имеет место $S_k a_k S_k = S_k$ и следовательно по теореме A полугруппа S_k проста. Докажем дальше, что она без нуля. Исходя от противного, предположим, что полугруппа S_k содержит нуль z_k. По предположениям множество I содержит по меньшей мере один элемент $l \neq k$ и полугруппа S_l содержит по меньшей мере один ненулевой элемент a_l. Согласно определению полугруппы S существует такой элемент $\alpha \in S$, что $\alpha(k) = z_k$, $\alpha(l) = a_l$. Следовательно α — ненулевой элемент в S. Пусть M — множество всех таких элементов $\mu \in S$, для которых имеет место $\mu(k) = z_k$. Очевидно, что $\alpha \in M$, $M \neq S$ и $S\alpha S \subseteq M$. Это противоречит равенству $S\alpha S = S$, равносильному предположению, что полугруппа S проста. Следовательно полугруппа S_k является простой без нуля. Этим теорема доказана для простых полугрупп. В случае слева или справа простых полугрупп доказательство аналогично.

Непосредственным следствием леммы 1.2 и теоремы 1.1 является

Теорема 1.2. *Пусть I — множество, которое содержит по меньшей мере два элемента. Пусть $\{S_i\}_{i\in I}$ — совокупность полугрупп, каждая из которых содержит по меньшей мере два элемента. Полугруппа $S = \prod_{i\in I} S_i$ является простой (слева простой, справа простой) только тогда, если она без нуля.*

Из аксиом теории групп следует: группа является одновременно слева и справа простой (и следовательно простой) полугруппой без нуля. Наоборот, каждая полугруппа без нуля, которая одновременно слева и справа проста, является группой. Из этого и теоремы 1.1 вытекает

Теорема 1.3. *Полугруппа $S = \prod_{i\in I} S_i$ является группой тогда и только тогда, если для всякого $i \in I$ полугруппа S_i является группой.*

2.

Возникает вопрос, каким образом идеалы полугруппы $S = \prod_{i\in I} S_i$ связаны с идеалами полугрупп S_i. В этой статье эта проблема решается для минимальных идеалов. Доказательства теорем мы будем производить только для левых идеалов, так как доказательства для правых и двусторонних аналогичны.

Теорема 2.1. *Пусть M_i для всякого $i \in I$ является левым (правым, двусторонним) идеалом полугруппы S_i. Тогда $M = \prod_{i\in I} M_i$ является левым (правым, двусторонним) идеалом полугруппы $S = \prod_{i\in I} S_i$.*

Доказательство. Пусть M_i — левый идеал полугруппы S_i, т. е. $S_i M_i \subseteq M_i$. Для произвольных $\alpha \in S$, $\mu \in M$ имеет место $\alpha(i) \in S_i$, $\mu(i) \in M_i$ и следовательно $\alpha(i)\,\mu(i) \in S_i M_i \subseteq M_i$ для $i \in I$, т. е. $\alpha\mu \in M$. Это значит, что M является левым идеалом полугруппы S.

Пусть $N \subseteq S = \prod_{i\in I} S_i$. Множество всех таких элементов $x_i \in S_i$, для которых существует по меньшей мере один такой элемент $\xi \in N$, что $x_i = \xi(i)$, обозначим через $\mathrm{pr}_i(N)$ и будем называть *проекцией* множества N в полугруппу S_i.

Итак, если $\nu \in N$, потом $\nu(i) \in \mathrm{pr}_i(N)$. Очевидно, что всегда имеет место $N \subseteq \prod_{i\in I} \mathrm{pr}_i(N)$.

Теорема 2.2. *Пусть M — левый (правый, двусторонний) идеал полугруппы $S = \prod_{i\in I} S_i$. Потом:*

(1) $\mathrm{pr}_i(M)$ *является левым (правым, двусторонним) идеалом полугруппы S_i.*

(2) $\prod_{i\in I} \mathrm{pr}_i(M)$ *является левым (правым, двусторонним) идеалом полугруппы* S.

Доказательство. (1) Пусть M — левый идеал полугруппы S. Пусть $m_i \in \mathrm{pr}_i(M)$, $a_i \in S_i$ и пусть $m_i = \mu(i)$, $a_i = \alpha(i)$, $\mu \in M$, $\alpha \in S$. Так как M — левый идеал в S, имеет место $\alpha\mu \in M$. Из этого и из определения проекции $\mathrm{pr}_i(M)$ следует, что $\alpha(i)\,\mu(i) = a_i m_i \in \mathrm{pr}_i(M)$. Это значит, что $\mathrm{pr}_i(M)$ — левый идеал полугруппы S_i.

(2) следует из (1) и теоремы 2.1.

Доказанная теорема говорит, что проекция идеала полугруппы S в S_i является также идеалом полугруппы S_i. Проблема состоит в том, будет ли проекция минимального идеала в S_i снова минимальным идеалом в S_i. Докажем, что так бывает не всегда. Это зависит от того, является ли S полугруппой с нулем или без нуля, а во втором случае также и от того, все ли полугруппы без нуля. Поэтому мы будем отдельно рассматривать полугруппы без нуля и полугруппы с нулем.

Теорема 2.3. *Пусть I — множество, которое содержит по меньшей мере два элемента. Пусть $S = \prod_{i\in I} S_i$ — полугруппа без нуля а M — ее минимальный левый (правый, двусторонний) идеал. Тогда $\mathrm{pr}_i(M)$ является минимальным левым (правым, двусторонним) идеалом полугруппы S_i, если S_i без нуля, и нулевым идеалом, если S_i имеет нуль.*

Доказательство. Пусть M — минимальный левый идеал полугруппы S. Выберем произвольный элемент $k \in I$. По теореме 2.2 $\mathrm{pr}_k(M)$ является левым идеалом в S_k. Возможны два случая: а) S_k — полугруппа без нуля, б) S_k имеет нуль z_k. Докажем, что в первом случае $\mathrm{pr}_k(M)$ — минимальный левый идеал в S_k. Исходя от противного, предположим, что $\mathrm{pr}_k(M)$ не является минимальным левым идеалом в S_k. Это значит, что S_k содержит по меньшей мере один такой собственный левый идеал M_k', что $M_k' \subset \mathrm{pr}_k(M)$. Рассмотрим множество $P' = \prod_{i\in I} X_i$, где $X_i = \mathrm{pr}_i(M)$ для $i \neq k$, $X_k = M_k'$. По теоремам 2.1 и 2.2 множество P' является левым идеалом в S. Очевидно $\mathrm{pr}_k(P') = M_k' \subset \mathrm{pr}_k(M)$. Из этого следует, что $M \neq P'$, $M \not\subseteq P'$, так как из $M \subseteq P'$ выплывало бы $\mathrm{pr}_k(M) \subseteq \mathrm{pr}_k(P') = M_k'$. Из определения идеала P' следует дальше, что множество $M' = P' \cap M$ непустое и — будучи пересечением левых идеалов — является тоже левым идеалом в S. Из $M' = P' \cap M$, $M \not\subseteq P'$, $M \neq P'$ следует, что $M' \subset M$. Это противоречит предположению, что M — минимальный левый идеал в S. Следовательно $\mathrm{pr}_k(M)$ — минимальный левый идеал в S_k.

Исследуем теперь случай б), т. е. S_k содержит нуль z_k. Докажем, что в этом случае имеет место $\mathrm{pr}_k(M) = (z_k)$. Исходя от противного, предположим, что $(z_k) \subset \mathrm{pr}_k(M)$. Следовательно $\mathrm{pr}_k(M)$ содержит по меньшей мере один элемент $a_k \neq z_k$. Множество $P'' = \prod_{i\in I} X_i$, где $X_i = \mathrm{pr}_i(M)$ для $i \neq k$, $X_k = (z_k)$, является по теоремам 2.1 и 2.2 собственным левым идеалом в S. Ясно, что $\mathrm{pr}_k(P'') = (z_k) \subset \mathrm{pr}_k(M)$. Из этого следует $M \not\subseteq P''$, $M \neq P''$, так как $M \subseteq P''$ влечет за собою $\mathrm{pr}_k(M) \subseteq \mathrm{pr}_k(P'')$. Из определения идеала P'' следует, что множество $M'' = P'' \cap M$ непустое и как пересечение левых идеалов является тоже левым идеалом в S. Так как S полугруппа без нуля, ясно, что $M'' \neq (z)$. Из $M'' = P'' \cap M$, $M \not\subseteq P''$, $M \neq P''$ следует $M'' \subset M$, но это противоречит предположению, что M — минимальный левый идеал в S. Следовательно $\mathrm{pr}_k(M) = (z_k)$. Этим теорема доказана.

Применение. Доказанная теорема говорит, что проекция минимального идеала полугруппы $S = \prod_{i\in I} S_i$ в S_i является минимальным идеалом в S_i, если S_i без нуля. Позднее мы докажем (теорема 2.5), что при определенных предпосылках и обратно: каждый минимальный идеал полугруппы S_i без нуля является проекцией определенного минимального идеала полугруппы S. Но это недействительно для общих случаев.

Теорема 2.4. *Пусть $S = \prod_{i\in I} S_i$ — полугруппа с нулем и M — ее минимальный левый (правый, двусторонний) идеал. Тогда существует одно и только одно $k \in I$ такое, что $\mathrm{pr}_k(M)$ является минимальным левым (правым, двусторонним) идеалом полугруппы S_k и для $i \neq k$ есть $\mathrm{pr}_i(M) = (z_i)$, $M \cong \mathrm{pr}_k(M)$.*

Доказательство. Пусть M — минимальный левый идеал полугруппы S с нулем. Предположим прежде всего, что для всякого $i \in I$ $\mathrm{pr}_i(M) = (z_i)$. Тогда $\prod_{i\in I} \mathrm{pr}_i(M)$ является нулевым идеалом в S. Из этого и из $M \subseteq \prod_{i\in I} \mathrm{pr}_i(M)$ следует, что M — нулевой идеал в S, но это противоречит предположению, что M — минимальный левый идеал в S. Итак по меньшей мере для одного $i \in I$ имеет место $\mathrm{pr}_i(M) \neq (z_i)$. Пусть это для $i = k$. Следовательно $(z_k) \subset \mathrm{pr}_k(M)$. Также как в доказательстве теоремы 2.3 докажем, что $\mathrm{pr}_k(M)$ — минимальный левый идеал в S_k. Надо еще доказать, что для всякого $i \neq k$ $\mathrm{pr}_i(M) = (z_i)$. Допустим (доказывая от противного), что существует по меньшей мере одно $l \neq k$, $l \in I$ такое, что $\mathrm{pr}_l(M) \neq (z_l)$. Рассмотрим множество $P = \prod_{i\in I} X_i$, где $X_i = (z_i)$ для $i \neq l$, $X_l = \mathrm{pr}_l(M)$. Согласно теоремам 2.1 и 2.2 множество P является собственным левым идеалом в S. Очевидно, имеет место $\mathrm{pr}_k(P) = (z_k) \subset \mathrm{pr}_k(M)$. Отсюда $M \not\subseteq P$, $M \neq P$, так как из $M \subseteq P$ следует $\mathrm{pr}_k(M) \subseteq \mathrm{pr}_k(P)$. Так как $\mathrm{pr}_l(M)$ содержит хотя бы один ненулевой элемент a_l, то идея P содержит такой элемент α, что $\alpha(l) = a_l$, а $\alpha(i) = z_i$ для $i \neq l$. Элемент $\alpha \in P$ — ненулевой и принадлежит тоже к M. Следовательно множество $M' = P \cap M$ содержит хотя бы один ненулевой элемент и — будучи непустым пересечением левых идеалов — является собственным левым идеалом в S. Из соотношений $M' = P \cap M$, $M \not\subseteq P$,

$M \neq P$ следует $M' \subset M$. Но это противоречит предположению, что идеал M минимальный. Итак $\mathrm{pr}_i(M) = (z_i)$ для всякого $i \neq k$.

Наконец докажем, что $M \cong \mathrm{pr}_k(M)$. Так как $\mathrm{pr}_i(M)$ — минимальный левый идеал в S_i для $i = k$, а нулевый идеал для $i \neq k$, то M является множеством всех таких элементов $\alpha \in S$, что $\alpha(k) = a_k \in \mathrm{pr}_k(M)$, $\alpha(i) = z_i$ для $i \neq k$. Отображение $\alpha \to a_k$ идеала M на идеал $\mathrm{pr}_k(M)$, очевидно, изоморфизм. Итак имеет место $M \cong \mathrm{pr}_k(M)$.

Примечание. В последующем мы докажем, что и наоборот (в случае, когда $S = \prod_{i \in I} S_i$ — полугруппа с нулем) каждый минимальный идеал полугруппы S_i является проекцией определенного минимального идеала полугруппы S.

При помощи теорем 2.3 и 2.4 докажем теперь следующие теоремы, которые решают проблему взаимоотношения между идеалами полугруппы $S = \prod_{i \in I} S_i$ и идеалами полугрупп $\{S_i\}_{i \in I}$. Мы будем опять отдельно рассматривать полугруппы без нуля и полугруппы с нулем.

Если $S = \prod_{i \in I} S_i$ — полугруппа без нуля, то в силу леммы 1.2 по меньшей мере одна из полугрупп $\{S_i\}_{i \in I}$ не имеет нуля. В частном случае каждая полугруппа S_i без нуля. Прежде всего рассмотрим общий случай. Об этом говорит

Теорема 2.5. *Пусть $S = \prod_{i \in I} S_i$ — полугруппа без нуля. Пусть $I = J \cup K$, $J \cap K = \varnothing$, $J \neq \varnothing$. Пусть для $j \in J$ S_j — полугруппа без нуля а для $k \in K$ S_k — полугруппа с нулем. Тогда:*

(1) *Полугруппа S содержит по меньшей мере один минимальный левый (правый, двусторонний) идеал тогда и только тогда, если каждая из полугрупп $\{S_j\}_{j \in J}$, содержит по меньшей мере один минимальный левый (правый, двусторонний) идеал.*

(2) *Если для каждого $j \in J$ M_j — минимальный левый (правый, двусторонний) идеал полугруппы S_j, то $M = \prod_{i \in I} X_i$, где $X_i = M_i$ для $i \in J$, $X_i = (z_i)$ для $i \in K$, является минимальным левым (правым, двусторонним) идеалом полугруппы S и имеет место $M_j = \mathrm{pr}_j(M)$ для $j \in J$; $M \cong \prod_{i \in J} M_j$.*

(3) *Для каждого минимального левого (правого, двустороннего) идеала M полугруппы S имеет место $M = \prod_{i \in I} \mathrm{pr}_i(M)$, где для $i \in J$ $\mathrm{pr}_i(M)$ — минимальный левый (правый, двусторонний) идеал полугруппы S_i, а для $i \in K$ $\mathrm{pr}_i(M) = (z_i)$.*

Доказательство. Пусть S_j — полугруппа без нуля для всякого $j \in J$ и пусть M_j — ее минимальный левый идеал. Множество $M = \prod_{i \in I} X_i$, где $X_i = M_i$ для $i \in J$, $X_i = (z_i)$ для $i \in K$, является согласно теореме 2.1 левым идеалом полугруппы S. Докажем, что он минимальный. Так как S — полугруппа без нуля, согласно теореме B достаточно доказать, что к каждым двум элементам $\alpha, \beta \in M$, существует такой элемент $\xi \in M$, что $\xi\alpha = \beta$. Пусть $\alpha(i) = a_i$ для $i \in J$, а $\alpha(i) = z_i$ для $i \in K$, $\beta(i) = b_i$ для $i \in J$, а $\beta(i) = z_i$ для $i \in K$. По предложению M_i является минимальным левым идеалом в S_i для $i \in J$. Согласно теореме B к элементам $a_i, b_i \in S_i$ существует такой элемент $x_i \in S_i$, что $x_i a_i = b_i$. Потом M содержит такой элемент ξ, что $\xi(i) = x_i$ для $i \in J$, а $\xi(i) = z_i$ для $i \in K$. Очевидно имеет место $\xi\alpha = \beta$. Итак M является минимальным левым идеалом полугруппы S.

Пусть μ произвольный элемент из M и пусть $\mu(i) = m_i$ для $i \in J$, а $\mu(i) = z_i$ для $i \in K$. Отображение $\mu \to \mu'$, где μ' такой элемент из $\prod_{i \in J} M_j$, что $\mu'(j) = m_j$ для $j \in J$, является, очевидно, изоморфизмом; итак $M \cong \prod_{j \in J} M_j$. Правильность равенств $M_j = \mathrm{pr}_j(M)$ для $j \in J$ непосредственно вытекает из определения идеала M и проекции. Этим доказано утверждение (2). Вместе с тем доказано, что существование хотя бы одного минимального идеала в каждой полугруппе $S_j, j \in J$, является достаточным условием для того, чтобы существовал хотя бы один минимальный левый идеал полугруппы S. Из теоремы 2.3 непосредственно вытекает, что это условие для этого тоже необходимо. Этим доказано утверждение (1).

Остается еще доказать утверждение (3). Пусть M — минимальный левый идеал полугруппы S. Согласно теореме 2.3 $\mathrm{pr}_i(M)$ для $i \in J$ является минимальным левым идеалом в S_i, а $\mathrm{pr}_i(M) = (z_i)$ для $i \in K$. Итак согласно доказанному утверждению (2) $\prod_{i \in I} \mathrm{pr}_i(M)$ является минимальным левым идеалом в S. Из этого и из $M \subseteq \prod_{i \in I} \mathrm{pr}_i(M)$ следует $M = \prod_{i \in I} \mathrm{pr}_i(M)$.

В частном случае, когда для каждого $i \in I$ S_i — полугруппа без нуля (т. е. $K = \varnothing$), имеем следующий результат:

Теорема 2.6. *Пусть I — множество, которое содержит по меньшей мере два элемента. Пусть M_i — минимальный левый (правый, двусторонний) идеал полугруппы S_i для $i \in I$. Тогда $M = \prod_{i \in I} M_i$ — минимальный левый (правый, двусторонний) идеал полугруппы S в том и только в том случае, когда S_i — полугруппа без нуля для всякого $i \in I$.*

Доказательство. Пусть S_i — полугруппа без нуля для всякого $i \in I$ и пусть M_i — ее минимальный левый идеал. Согласно утверждению (2) теоремы 2.5 $M = \prod_{i \in I} M_i$ является минимальным левым идеалом в S.

Пусть $M = \prod_{i \in I} M_i$, где M_i значит минимальный левый идеал в S_i, является минимальным левым идеалом в S. В силу утверждения (3) теоремы 2.5 имеет место $M = \prod_{i \in I} \mathrm{pr}_i(M)$, где $\mathrm{pr}_i(M)$ — минимальный левый идеал в S_i, если S_i — полугруппа без нуля. В нашем случае по предположению $\mathrm{pr}_i(M) = M_i$ является минимальным левым идеалом в S_i для каждого $i \in I$. Отсюда вытекает, что S_i — полугруппа без нуля для каждого $i \in I$.

Последняя теорема говорит о минимальных идеалах полугруппы с нулем.

Теорема 2.7. *Пусть* $S = \prod_{i \in I} S_i$ — *полугруппа с нулем. Тогда:*

(1) *Полугруппа S содержит минимальный левый (правый, двусторонний) идеал тогда и только тогда, если по меньшей мере одна из полугрупп $\{S_i\}_{i \in I}$ содержит минимальный левый (правый, двусторонний) идеал.*

(2) *Если M_k — минимальный левый (правый, двусторонний) идеал полугруппы S_k, $k \in I$, тогда $M = \prod_{i \in I} X_i$, где $X_k = M_k$, $X_i = (z_i)$ для $i \neq k$, является минимальным левым (правым, двусторонним) идеалом полугруппы S и имеет место $M_k = \mathrm{pr}_k(M)$, $M \cong M_k$.*

(3) *Для каждого минимального (правого, двустороннего) идеала M полугруппы S имеет место $M = \prod_{i \in I} \mathrm{pr}_i(M)$, где для определенного $k \in I$ $\mathrm{pr}_k(M) = M_k$ — минимальный левый (правый, двусторонний) идеал полугруппы S_k, а для $i \neq k$ $\mathrm{pr}_i(M) = (z_i)$.*

Доказательство. Пусть M_k — минимальный левый идеал в S_k, $k \in I$. Согласно теореме 2.1 $M = \prod_{i \in I} X_i$, где $X_k = M_k$, $X_i = (z_i)$ для $i \neq k$, является левым идеалом в S. Очевидно, что $\mathrm{pr}_k(M) = M_k$, а $\mathrm{pr}_i(M) = (z_i)$ для $i \neq k$. Докажем, что M является минимальным левым идеалом в S. Исходя от противного, предположим, что M не является минимальным идеалом. Это значит, что S содержит хотя бы онин такой собственный левый идеал M', что $M' \subset M$. Ясно, что $\mathrm{pr}_i(M') = (z_i)$ для $i \neq k$, а $\mathrm{pr}_k(M') = M'_k \subset M_k$. Согласно теореме 2.2 M'_k является левым идеалом в S_k. Так как M' собственный левый идеал в S, то идеал M'_k также собственный. Но это противоречит предположению, что M_k минимальный левый идеал в S_k. Следовательно M является минимальным левым идеалом в S.

Идеал M является множеством всех таких элементов $\mu \in S$, для которых имеет место $\mu(i) = z_i$ для $i \neq k$, а $\mu(k) = m_k \in M_k$. Отображение $\mu \to m_k$ идеала M на идеал M_k является, очевидно, изоморфизмом; итак $M \cong M_k$. Этим доказано утверждение (2) и вместе с тем то, что существование минимального левого идеала хотя бы в одной из полугрупп $\{S_i\}_{i \in I}$ является достаточным условием для существования минимального левого идеала полугруппы S. Из теоремы 2.4 непосредственно вытекает, что это условие является тоже и необходимым. Этим доказано утверждение (1).

Остается еще доказать утверждение (3). Пусть M — минимальный левый идеал в S. Согласно теореме 2.4 существует одно и только одно $k \in I$ такое, что $\mathrm{pr}_k(M) = M_k$ является минимальным левым идеалом в S_k, а $\mathrm{pr}_i(M) = (z_i)$ для $i \neq k$. Согласно доказанному утверждению (2) $\prod_{i \in I} \mathrm{pr}_i(M)$ является минимальным левым идеалом в S. Отсюда и из $M \subseteq \prod_{i \in I} \mathrm{pr}_i(M)$ вытекает $M = \prod_{i \in I} \mathrm{pr}_i(m)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Rees D., *On semigroups*, Proc. Cambridge Phil. Soc. *36* (1940), 387—400.

[2] Ivan J., *O direktnom súčine pologrúp*, Mat.-fyz. časop. SAV, *3* (1953), 57—66.

Поступило 14. 7. 1962 г.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie Strojníckej fakulty
Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

SIMPLICITY AND MINIMAL IDEALS OF DIRECT PRODUCT OF SEMIGROUPS

Ján Ivan

Summary

Let $\{S_i\}_{i \in I}$ be an arbitrary collection of semigroups. Let S be a set of all function ξ definied on I so that $\xi(i) \in S_i$. We introduce multiplication in S as follows: if α and $\beta \in S$, then we define $\gamma = \alpha\beta$ by the equation $\gamma(i) = \alpha(i)\,\beta(i)$ for $i \in I$. It is immediate that S and this multiplication form a semigroup. We call the semigroup thus obtained the direct product of the semigroups $\{S_i\}_{i \in I}$ and we denote it as $S = \coprod_{i \in I} S_i$.

Let N be any subset of $S = \coprod_{i \in I} S_i$, and consider the mapping of N into S_i defined by $\nu \to \nu(i)$. In this mapping let the image of N be denoted $\mathrm{pr}_i(N)$.

This paper deals with conditions of the simplicity of semigroup $S = \coprod_{i \in I} S_i$ and investigates the relation of its minimal ideals to the minimal ideals of semigroups $\{S_i\}_{i \in I}$. Thus some results of paper [2] are being generalized and enlarged.

Minimal ideals and the simple semigroup are defined as in [1].

The main results are the following theorems:

Theorem 1.1. *Let I be a set containing at least two elements. Let $\{S_i\}_{i \in I}$ be a collection of semigroups each of which contains at least two elements. The semigroup $S = \coprod_{i \in I} S_i$ is simple (left simple, right simple) if and only if for every $i \in I$ S_i is a simple (left simple, right simple) semigroup without zero.*

Theorem 2.5. *Let* $S = \coprod_{i \in I} S_i$ *be a semigroup without zero. Let* $I = J \cup K$, $J \cap K = \emptyset$, $J \neq \emptyset$. *Let* S_j *be a semigroup without zero for every* $j \in J$ *and* S_k *a semigroup with zero for every* $k \in K$. *Then:*

(1) *The semigroup* S *contains at least one minimal left (right, twosided) ideal if and only if each of the semigroups* $\{S_j\}_{j \in J}$ *contains at least one minimal left (right, twosided) ideal.*

(2) *If* M_j *is the minimal left (right, twosided) ideal of* S_j *for* $j \in J$, *then* $M = \coprod_{i \in I} X_i$, *where* $X_i = M_i$ *for* $i \in J$, $X_i = (z_i)$ *for* $i \in K$, *is the minimal left (right, twosided) ideal of* S *and* $\mathrm{pr}_j(M) = M_j$ *is true for* $j \in J$, $M \cong \coprod_{i \in I} M_j$.

(3) *Every minimal left (right, twosided) ideal* M *of* S *can be expressed as* $M = \coprod_{i \in I} \mathrm{pr}_i(M)$, *where* $\mathrm{pr}_i(M)$ *is the minimal left (right, twosided) ideal of* S_i *for* $i \in J$, *and* $\mathrm{pr}_i(M) = (z_i)$ *for* $i \in K$.

The sign (z_i) denotes the zero-ideal of S_i.

Theorem 2.7. *Let* $S = \coprod_{i \in I} S_i$ *be a semigroup with zero. Then:*

(1) *The semigroup* S *contains a minimal left (right, twosided) ideal if and only if at least one of the semigroups* $\{S_i\}_{i \in I}$ *contains a minimal left (right, twosided) ideal.*

(2) *If* M_k *is he minimal left (right, twosided) ideal of* S_k *for a definite* $k \in I$, *then* $M = \coprod_{i \in I} X_i$, *where* $X_k = M_k$ *and* $X_i = (z_i)$ *for* $i \neq k$, *is the minimal left (right, twosided) ideal of* S, *and* $\mathrm{pr}_k(M) = M_k$, *and* $M \cong M_k$.

(3) *Every minimal left (right, twosided) ideal* M *of* S *can be expressed as* $M = \coprod_{i \in I} \mathrm{pr}_i(M)$, *where* $\mathrm{pr}_k(M)$ *is the minimal left (right, twosided) ideal of* S_k *for a definite* $k \in I$, *and* $\mathrm{pr}_i(M) = (z_i)$ *for* $i \neq k$.

Others theorems are of helpful or special character.