MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 13, 1-1963

PRÍSPEVOK K METÓDE URČENIA POTENCIÁLOV ZO SINGULARÍT JOSTOVÝCH FUNKCIÍ

JÁN WEISS, Bratislava

ÚVOD

Nedávno v prácach [2] a [3] sa vyšetroval vzťah medzi singularitami Jostových funkcií a potenciálmi. Namiesto štandardného postupu, opierajúceho sa o použitie Geľfandovej – Levitanovej rovnice [1], skúmal sa tento vzťah priamo tak, že sa zvolil určitý výraz pre Jostovu funkciu s jednoduchými analytickými vlastnosťami v komplexnej rovine impulzu k. Pre neznáme funkcie vystupujúce v tomto výraze odvodil sa systém nelineárnych diferenciálnych rovníc, na ktorý sa použili bežné metódy. Jeho riešenie sa previedlo na riešenie systému lineárnych nehomogénnych rovníc v tom prípade, ak Jostova funkcia má N pólov na kladnej časti imaginárnej osi, a na riešenie nehomogénnej lineárnej integrálnej rovnice, ak táto funkcia má nespojitosť pozdĺž rezu na kladnej časti imaginárnej osi v komplexnej rovine impulzu k. Ukazuje sa však, že tento postup je dosť zdĺhavý už v prípade vĺn s, p a d.

V tejto práci predkladá sa iný – jednoduchší – spôsob riešenia, ktorý sa môže osvedčiť, ako sa nazdávame, pri riešení tohto problému aj pre vyššie parciálne vlny. Podstata našej metódy spočíva v nasledujúcom: Ako východiskový tvar Jostovej funckie berie sa taký tvar, ktorému nezodpovedá pól v bode $k = 0$, ale jeden, resp. dva póly prvého rádu na kladnej časti imaginárnej osi v blízkosti počiatku (samozrejme okrem ďalších singularít na tejto osi). Príslušné diferenciálne rovnice sa riešia spôsobom odlišným od [2] a [3]. Pritom však dochádzame k uvedeným lineárnym rovniciam. V nich sa potom tento pól, resp. dvojica pólov, posúva do počiatku, čím dostávame výsledky pre Jostovu funkciu, ktorá sa vyznačuje pólom prvého, resp. druhého rádu v bode $k = 0$.

Práca je rozdelená na tri časti. V prvej sa odvodzuje riešenie, keď Jostova funkcia je regulárna v počiatku v komplexnej rovine impulzu, v druhej a tretej časti získavajú sa riešenia v prípade, keď Jostova funkcia má pól prvého, resp. druhého radu.

I. JOSTOVA FUNCKIA REGULÁRNA V POČIATKU

V práci [2] riešenie Schrödingerovej rovnice

$$f''(k, r) + k^2 f(k, r) = u(r) f(k, r) \tag{1,1}$$

po zavedení funkcie

$$g(k, r) = 1 + 2\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j(r)}{2ik + \kappa_j}, \tag{1,2}$$

ktorá súvisí s Jostovou funkciou vzťahom $g(k, r) = f(k, r)\, e^{ikr}$, redukuje sa na riešenie systému (rov. (5) a (6) v [2])

$$\alpha_j'' + \kappa_j \alpha_j' - u\alpha_j = 0, \tag{1,3}$$

$$2\sum_{j=1}^{N} \alpha_j'' + u = 0. \tag{1,4}$$

Pri riešení rovníc (1,3) a (1,4) na rozdiel od [2] postupujme takto: Zaveďme si namiesto funkcie $g(k, r)$ funkciu

$$h(k, r) = e^{2ikr} g(-k, r), \tag{1,5}$$

pre ktorú platí rovnica

$$h''(k, r) - 2\, ikh'(k, r) = u(r)\, h(k, r). \tag{1,6}$$

Keď v tejto rovnici dosadíme postupne za $-2ik$ konštanty κ_j, dostaneme systém rovníc zhodný so systémom (1,3). Musí teda platiť

$$h\left(\frac{1}{2} i\kappa_j, r\right) = \frac{1}{c_j \kappa_j} \alpha_j(r), \tag{1,7}$$

kde c_j je ľubovoľná konštanta.

S ohľadom na (1,2), (1,5) a (1,7) riešenie (1,3) má tvar

$$\alpha_j(r) = \kappa_j c_j\, e^{-\kappa_j r}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i(r)}{\kappa_j + \kappa_i}\right)$$

v súhlase s výsledkom (10) v [2].

II. JOSTOVA FUNKCIA S PÓLOM PRVÉHO RÁDU V POČIATKU

V tomto prípade, keď Jostova funkcia má v počiatku pól prvého rádu, treba, ako je ukázané v [3], riešiť systém rovníc [označený tam (D1) a (D2)]

$$\alpha_0'' + 2(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i')\, \alpha_0 = 0, \tag{2,1}$$

$$\alpha_j'' + \kappa_j \alpha_j' + 2(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i')\, \alpha_j = 0. \tag{2,2}$$

Riešme však systém podobný uvedenému:

$$\alpha_0'' + \kappa_0 \alpha_0' + 2(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i')\, \alpha_0 = 0, \tag{2,3}$$

$$\alpha_j'' + \kappa_j \alpha_j' + 2(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i')\, \alpha_j = 0. \tag{2,4}$$

Riešenie systému (2,1) a (2,2) dostaneme z riešenia systému (2,3) a (2,4), keď v tomto riešení urobíme limitný prechod $\kappa_0 \to 0$.

Aplikujúc riešenie z časti I. (teraz pre $i = 0, 1, 2, \ldots, N$), možno písať

$$\alpha_0(r) = \kappa_0 c_0 \,\mathrm{e}^{-\kappa_0 r}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i(r)}{\kappa_0 + \kappa_i} + \frac{\alpha_0(r)}{\kappa_0}\right), \tag{2,5}$$

$$\alpha_j(r) = \kappa_j c_j \,\mathrm{e}^{-\kappa_j r}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i(r)}{\kappa_j + \kappa_i} + \frac{2\alpha_0(r)}{\kappa_j + \kappa_0}\right). \tag{2,6}$$

Keď vo výraze (2,6) položíme bezprostredne $\kappa_0 = 0$, dostaneme riešenie (D5) v [3]:

$$\alpha_j(r) = \kappa_j c_j \,\mathrm{e}^{-\kappa_j r}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i(r)}{\kappa_j + \kappa_i} + \frac{2\alpha_0(r)}{\kappa_j}\right).$$

Aby výraz (2,5) pre α_0 nepredstavoval triviálne riešenie ($\alpha_0(r) \equiv 0$), musíme c_0 vhodne voliť. Treba poznamenať, že c_0 môže, pochopiteľne, závisieť od κ_0, avšak s ohľadom na limitný prechod $\kappa_0 \to 0$ môžeme sa vo výraze pre c_0 obmedziť na veličiny len lineárne v κ_0. Je zrejmé, že pre $\kappa_0 \to 0$ musí $c_0 \to 1$, lebo ináč by neplatilo $\alpha_0(r) \not\equiv 0$. Voľme preto

$$c_0 = 1 - \kappa_0 r_0, \tag{2,7}$$

kde r_0 je ľubovoľná konštanta. Keď (2,7) dosadíme do (2,5) a vykonáme limitný prechod $\kappa_0 \to 0$, dostaneme výsledok zhodný s (D4) v práci [3], t. j.:

$$\alpha_0(r) = \frac{1}{r + r_0}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i(r)}{\kappa_i}\right).$$

III. JOSTOVA FUNKCIA S PÓLOM DRUHÉHO RÁDU V POČIATKU

Ide tu teraz o riešenie nasledujúceho systému rovníc [v [3] rov. (D6), (D7) a (D8)]:

$$\beta'' + 2\Big(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i'\Big)\beta = 0, \tag{3,1}$$

$$\alpha_0'' - 2\beta' + 2\Big(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i'\Big)\alpha_0 = 0, \tag{3,2}$$

$$\alpha_j'' + \kappa_j\alpha_j' + 2\Big(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i'\Big)\alpha_j = 0. \tag{3,3}$$

Budeme vychádzať zo systému rovníc

$$\alpha_j'' + \kappa_j\alpha_j' + 2\Big(a_1' + a_2' + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i'\Big)\alpha_j = 0, \tag{3,4}$$

$$a_1'' + \omega_1 a_1' + 2\Big(a_1' + a_2' + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i'\Big)a_1 = 0, \tag{3,5}$$

$$a_2'' + \omega_2 a_2' + 2\Big(a_1' + a_2' + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i'\Big)a_2 = 0, \tag{3,6}$$

z ktorého možno dostať predchádzajúci systém, ak dosadíme

$$a_1(r) + a_2(r) = \alpha_0(r), \tag{3,7}$$

$$-\Delta\omega a_2(r) = \beta(r), \tag{3,8}$$

kde $2\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ a požadujeme, aby $\omega_1 = \omega \to 0$ a $\Delta\omega \to 0$. Rovnice (3,4) majú vzhľadom na uvedené podmienky riešenie

$$\alpha_j(r) = \kappa_j c_j \,\mathrm{e}^{-\kappa_j r}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i(r)}{\kappa_j + \kappa_i} + 2\frac{\alpha_0(r)}{\kappa_j} + 4\frac{\beta(r)}{\kappa_j^2}\right). \tag{3,9}$$

Riešenia ostávajúcich dvoch rovníc

$$a_1(r) = \omega_1 d_1 \,\mathrm{e}^{-\omega_1 r}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i(r)}{\omega_1 + \kappa_i} + \frac{a_1(r)}{\omega_1} + 2\frac{a_2(r)}{\omega_1 + \omega_2}\right),$$

$$a_2(r) = \omega_2 d_2 \,\mathrm{e}^{-\omega_2 r}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i(r)}{\omega_2 + \kappa_i} + 2\frac{a_1(r)}{\omega_1 + \omega_2} + \frac{a_2(r)}{\omega_2}\right),$$

napíšme v tvare

$$a_1(r) = \frac{1}{a(r)}\left[\omega_1\Pi_1(r)\,\xi_1(r) - \omega_1\Pi_1(r)\,\xi_1(r)\,\xi_2(r) + \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\Pi_2(r)\,\xi_1(r)\,\xi_2(r)\right], \tag{3,10}$$

$$a_2(r) = \frac{1}{a(r)}\left[\omega_2\Pi_2(r)\,\xi_2(r) - \omega_2\Pi_2(r)\,\xi_1(r)\,\xi_2(r) + \frac{2\omega_1\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\Pi_1(r)\,\xi_1(r)\,\xi_2(r)\right], \tag{3,11}$$

kde

$$a(r) = 1 - \xi_1(r) - \xi_2(r) + \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\right)^2 \xi_1(r)\,\xi_2(r),$$

$$\Pi_1(r) = 1 + 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i(r)}{\omega_1 + \kappa_i}, \qquad \Pi_2(r) = 1 + 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i(r)}{\omega_2 + \kappa_i},$$

$$\xi_1(r) = d_1\,\mathrm{e}^{-\omega_1 r}, \qquad \xi_2(r) = d_2\,\mathrm{e}^{-\omega_2 r},$$

pričom d_1 a d_2 sú ľubovoľné konštanty. Aby sme dostali pre $\alpha_0(r)$ a $\beta(r)$ nenulové riešenie, treba d_1 a d_2 voliť takto:

$$d_1 = A + \frac{B}{\Delta\omega}, \qquad d_2 = A - \frac{B}{\Delta\omega}. \tag{3,12}$$

Namiesto konštánt A a B v (3,12) je účelné zaviesť iné konštanty r_0 a σ vzťahmi

$$A = \omega r_0(1 - \omega^2\sigma)\,\mathrm{e}^{-\omega r_0}, \qquad B = \omega\,\mathrm{e}^{-\omega r_0}. \tag{3,13}$$

Výpočet menovateľa v (3,10) a (3,11) vedie k výsledku

$$a(r) = \frac{1}{3}\omega^3(r + r_0)^3 + s\omega^3, \tag{3,14}$$

kde $s = 2r_0\sigma$.

Pre $\alpha_0(r)$ a $\beta(r)$ na základe (3,7), (3,8), (3,10), (3,11), (3,12), (3,13) a (3,14) pomocou limitného prechodu $\omega \to 0$ a $\Delta\omega \to 0$, pri ktorom napr.

$$\Pi_1(r) - \Pi_2(r) = 4\Delta\omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i(r)}{(\omega + \kappa_i)^2},$$

plynú výsledky v zhode s riešeniami (D9) a (D13) v [3]

$$\beta(r) = \frac{\alpha_0(r)}{r + r_0},$$

$$\alpha_0(r) = \frac{3(r + r_0)^3}{(r + r_0)^3 + 3s}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i(r)}{\kappa_i} + \frac{4}{r + r_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i(r)}{\kappa_i^2}\right).$$

V tejto práci zaoberali sme sa iba prípadom, keď jedinými singularitami sú póly. Je však zrejmé, že problém, pri ktorom vystupuje nespojitosť Jostovej funkcie pozdĺž rezu, vyšetroval by sa už ľahko analogicky.

Záverom považujem za milú povinnosť poďakovať sa dr. Milanovi Petrášovi, C. Sc., za pracovný námet a s ním súvisiace hodnotné rozhovory.

LITERATÚRA

[1] Гельфанд И. М., Левитан Б. М., Известия АНСССР (серия математ.) *15* (1951), 309,
[2] Petráš M., Czech. J. Phys. B *12* (1962), 87.
[3] Petráš M., Matematicko-fyzikálny časopis SAV *12* (1962), 136.

Došlo 30. V. 1962.

Katedra fyziky Strojníckej fakulty Slovenskej vysokej školy technickej v Bratislave

К МЕТОДУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ИЗ ОСОБЕННОСТЕЙ ФУНКЦИЙ ЙОСТА

Ян Вайс

Резюме

Дан более простой способ решения уравнений определяющих функции Йоста, чем в работах [2] и [3], в которых изучались потенциалы принадлежащие данным особенностям функций Йоста для моментов количества движения $l = 0, 1, 2$. Функцию Йоста выберём прежде всего в такой форме, которой соответствует один или два полюса первого порядка в непосредственной близости от начала координат (естественно, кроме дальнейших особенностей на этой оси). Чтобы получить выражения для функции Йоста обладающей полюсом первого или второго порядка в точке $k = 0$, этот полюс или пара полюсов потом смещаются в начало координат в системе линейных неоднородных уравнений, которая вытекает из решения соответствующих нелинейных дифференциальных уравнений.

В первой части статьи производится расчёт решения, когда функция Йоста регулярна в начале координат в комплексной плоскости импульса, в второй и третьей частях получаются решения в случаях, когда функция Йоста имеет полюс первого или второго порядка.

CONTRIBUTION TO THE METHOD OF DETERMINATION OF POTENTIALS FROM THE SINGULARITIES OF JOST FUNCTIONS

Ján Weiss

Summary

This paper gives a simpler method of solving the equations determining Jost functions than that in papers [2] and [3] in which potentials belonging to given singularities of Jost functions for angular momenta $l = 0, 1, 2$ were investigated. At first, the Jost function is chosen in such form to which one pole or two poles of the first order on the positive part of the imaginary axis near the origin correspond (besides farther singularities on this axis, of course). In order to obtain results for the Jost function with the pole of the first or second order at the point $k = 0$, this pole or the pair of poles is then shifted to the origin in the system of linear nonhomogeneous equations which follows from the solution of the appropriate nonlinear differential equations.

In the first part of this paper the solution with the Jost function being regular in the origin in the complex plane of the impulse has been derived; in the second and third parts solutions in the cases, when the Jost function has the pole of the first or second order are obtained.