MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 13, 1-1963

O JEDNOM PROBLÉMU Z DĚJIN ČÍNSKÉ MATEMATIKY

JOSEF KAUCKÝ, Bratislava

1.

V článku téhož názvu [1] vypráví P. Turán tuto zajímavou historii.

Jeho přítel György Szekeres utekl v roce 1937 před hitlerovým fašismem do Šanghaje, kde se seznámil s matematikem Csang-Jungem, odborníkem v dějinách matematiky.

Csang-Jung se mnoho zabýval studiem knihy čínského matematika minulého století Li Zsen-Sua (1810–1882), která vyšla v roce 1867 v Nankingu pod názvem „Cō ku hszi csaj szuan hszue". Autor knihy si vytkl za cíl shrnout v ní část objevů čínské matematiky.

V této knize je uvedeno – podle staré čínské tradice bez důkazu – mnoho matematických výsledků a mezi nimi i vztah, který v moderním označení dává kombinatorickou rovnici

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2. \tag{1}$$

Csang-Jung hledal tuto formuli v dílech západních matematiků, v nichž našel některé jiné v knize obsažené výsledky, nenašel ji však a ani sám ji nedovedl dokázat.

Budiž ještě poznamenáno, jak P. Turán uvádí, že autor knihy převzal některé výsledky od slavného čínského matematika 13. století Csu Si-Csie-a. Jiný maďarský matematik János Surányi v článku [2] dokonce píše, že mezi těmito výsledky je i kombinatorický vztah (1).

2.

První důkazy kombinatorické identity (1) pocházejí od P. Turána a G. Szekerese, kteří ji dokázali na sobě nezávisle a každý jiným způsobem. Oba důkazy uveřejnil, jak uvádí L. Takács v článku [4], Csang-Jung spolu s jinými pracemi v čínsky psané publikaci [3]. Turán zrekonstruoval svůj důkaz v článku [1], na Szekeresův důkaz, který byl rovněž analytické povahy, pamatuje prý se jen natolik, že také nebyl jednoduchý.

Turánův důkaz spočívá v odvození rovnice

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k}^2 x^n = (1-x)^{-2k-1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 x^j =$$
$$= \left\{ \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 x^j \right\} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{2k+\nu}{2k} x^\nu \right\}, \tag{2}$$

z níž identita (1) vychází již jednoduše porovnáním koeficientů u x^n v rozvojích výrazů na obou stranách rovnice se nacházejících.

Budiž ještě uvedeno, že k odvození rovnice (2) užil Turán také vztahu

$$\sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu}^2 x^\nu = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \binom{k+\nu}{k} (x-1)^{k-\nu}, \tag{3}$$

který odvodil z některých vlastností Legendreových polynomů. Tuto rovnici, kterou budeme v dalším potřebovat, jsem jednodušším způsobem odvodil v článku [5].

3.

Po Turánovi dokázalo v letech 1955–1956 identitu (1) různými a jednoduššími způsoby několik maďarských matematiků: Lájos Takács [4], János Surányi [2], Géza Huszár [6], János Maté [7]. V Surányiově práci je uveřejněn také důkaz Loo Keng Hua, není však uvedeno, z kterého roku pochází.

V roce 1958 dokázal T. S. Nanjundiah [8] obecnější vztah, z něhož identita (1) vychází jako speciální případ. Recenze této práce v Mathematical Reviews, vol. 20, mě vlastně přivedla na uvedené práce maďarských matematiků.

4.

Na rovnici (1) jsem přišel nezávisle na těchto pracích při studiu známé Fellerovy knihy o počtu pravděpodobnosti a jeho aplikacích [9]. Tam totiž na konci XI. kapitoly v 9. odstavci je problém tohoto znění:

Let the sequence of Bernoulli trials up to the first failure be called a turn. Consider now two sequences of Bernoulli trials with probabilities p_1, q_1, and p_2, q_2, respectively. Show that the probability that the same number of turns will lead to the Nth success can be exhibited in either of the forms

$$(p_1p_2)^N \sum_{\nu=1}^{\infty} \binom{N+\nu-2}{\nu-1}^2 (q_1q_2)^{\nu-1} =$$
$$= (p_1p_2)^N (1-q_1q_2)^{1-2N} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k}^2 (q_1q_2)^k. \tag{4}$$

Feller připomíná, že tento problém (No. 10) zrovna tak jako oba problémy předcházející (No. 8 a No. 9) obsahují výsledky práce holandských matematiků O. Bottema a S. C. van Veena [10], v níž jsou počítány některé pravděpodobnosti, týkající se hry na kulečníku.

Z rovnice (4) vychází kombinatorická identita

$$\sum_{k=0}^{\nu} \binom{2N+\nu-k}{\nu-k} \binom{N}{k}^2 = \binom{N+\nu}{\nu}^2. \tag{5}$$

Vidíme snadno, že rovnice (4) po krácení výrazem $(p_1p_2)^N$ není nic jiného než Turánova rovnice (2) a vztah (5) nic jiného než identita (1). Je-li tedy rovnice (4) dokázána na základě pravděpodobnostních úvah, je tím podán nový důkaz rovnice (2), a tím i vztahu (1).

5.

Je přirozené, že jsem se snažil dokázat vzorec (5) nějakým jiným způsobem než z rovnice (4). Psal jsem o tom též prof. Jankovi, který mně v dopise ze dne 1. 10. 1956 sdělil, že sice nikomu na katedře není o vzorci nic známo, že se však doc. dr. J. Seitzovi po delší námaze podařilo vzorec dokázat a důkaz je k dopisu připojen. Pokud vím, nebyl tento zajímavý důkaz dosud nikde uveřejněn.

Pak jsem vzorec dokázal jednodušším způsobem na základě známých a běžně používaných kombinatorických formulí v článku [11], který je v málo známé publikaci.

V následujícím odstavci je podán pozměněný důkaz dr. Seitze. Hodnota parciální derivace v rovnici (7) je totiž určena ne úplnou indukcí, ale pomocí Leibnizovy formule, což je jednodušší a přirozenější způsob. Poslední dva odstavce obsahují jednak můj důkaz z článku [11] a dále odvození rovnice (2) z pravděpodobnostních úvah O. Bottema a van Veena.

Ukazuje se, že rovnice (2), z níž vychází identita (1), není nic jiného, než transformační rovnice pro hypergeometrickou řadu se speciálními parametry, což je ostatně vidět již z Turánova důkazu.

6.

a) Dr. Seitz vychází z rozvoje

$$\frac{1}{1-xy} = 1 + xy + x^2y^2 + \ldots + x^ky^k + \ldots, \tag{6}$$

který platí pro každou dvojici čísel $|x| < 1$, $|y| < 1$.

Řadu na pravé straně pišme ve tvaru

$$1 + xy + \ldots + x^{k-1}y^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} x^{k+n}y^{k+n}$$

a derivujme ji k-krát podle x a k-krát podle y. Použijeme-li označení

$$(N)_r = N(N-1)\ldots(N-r+1),$$

dostáváme touto operací z obecného členu řady výraz

$$\{(k+n)_k\}^2\, x^ny^n,$$

odkud po dělení $(k!)^2$ vychází

$$\binom{k+n}{k}^2 x^ny^n.$$

Máme tedy rovnici

$$\frac{1}{(k!)^2} \frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k} \left(\frac{1}{1-xy} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n}{k}^2 x^ny^n, \tag{7}$$

takže jde jen o výpočet derivace na její levé straně.

Nyní se však snadno zjistí, že pro $k = 1$ a $k = 2$ je

$$\frac{1}{(1!)^2} \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \left(\frac{1}{1-xy} \right) = \frac{\binom{1}{0}^2 + \binom{1}{1}^2 xy}{(1-xy)^3},$$

$$\frac{1}{(2!)^2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left(\frac{1}{1-xy} \right) = \frac{\binom{2}{0}^2 + \binom{2}{1}^2 xy + \binom{2}{2}^2 x^2y^2}{(1-xy)^5},$$

takže se dá očekávat, že bude obecně platit

$$\frac{1}{(k!)^2} \frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k} \left(\frac{1}{1-xy} \right) = \frac{1}{(1-xy)^{2k+1}} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 x^jy^j. \tag{8}$$

Dr. Seitz dokázal tento vztah indukcí. Přitom hlavní krok indukce je pracný, a proto budeme dokazovat jiným způsobem.

b) Především snadno zjistíme, že platí rovnice

$$\frac{\partial^r (1-xy)^{-N}}{\partial x^r} = (N+r-1)_r\, y^r (1-xy)^{-N-r}, \tag{9}$$

z níž záměnou x s y vychází podobný vzorec

$$\frac{\partial^r (1-xy)^{-N}}{\partial y^r} = (N+r-1)_r\, x^r (1-xy)^{-N-r}. \tag{9'}$$

Nyní pomocí první rovnice, v níž položíme $r = k$ a $N = 1$, dostaneme

$$\frac{1}{(k!)^2} \frac{\partial^k}{\partial y^k} \left\{ \frac{\partial^k}{\partial x^k} (1-xy)^{-1} \right\} =$$

$$= \frac{1}{(k!)^2} \frac{\partial^k}{\partial y^k} \{(k)_k y^k (1 - xy)^{-k-1}\} =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (y^k)^{(j)} \frac{\partial^{k-j}}{\partial y^{k-j}} (1 - xy)^{-(k+1)},$$

odkud pomocí vztahu (9'), v němž položíme $N = k + 1$ a $r = k - j$, máme dále

$$\frac{1}{(k!)^2} \frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k} \left(\frac{1}{1 - xy} \right) =$$

$$= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (k)_j y^{k-j} (2k - j)_{k-j} x^{k-j} (1 - xy)^{-2k-1+j} =$$

$$= (1 - xy)^{-2k-1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \binom{2k - j}{k} (xy)^{k-j} (1 - xy)^j =$$

$$= \frac{(xy)^k}{(1 - xy)^{2k+1}} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \binom{k + j}{k} \left(\frac{1}{xy} - 1 \right)^{k-j}.$$

Tento výraz se ještě zjednoduší pomocí identity (3), takže dostáváme

$$\frac{1}{(k!)^2} \frac{\partial^{2k}}{\partial x^k \partial y^k} \left(\frac{1}{1 - xy} \right) =$$

$$= \frac{(xy)^k}{(1 - xy)^{2k+1}} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \frac{1}{(xy)^j} =$$

$$= \frac{1}{(1 - xy)^{2k+1}} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 (xy)^{k-j} =$$

$$= (1 - xy)^{-2k-1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 (xy)^j.$$

Tím je Seitzův výraz pro derivaci (8) odvozen.

Nyní stačí tento výraz dosadit do rovnice (7) a máme Turánovu rovnici (2), z níž identita (1) vychází již zmíněným způsobem.

7.

Z rovnice

$$\binom{N + \nu}{\nu} = \sum_{l=0}^{\nu} \binom{N}{l} \binom{\nu}{l}$$

a z identity

$$\binom{N + \nu}{\nu} \binom{\nu}{l} = \binom{N + l}{N} \binom{N + \nu}{N + l}$$

vychází

$$\binom{N + \nu}{\nu}^2 = \sum_{l=0}^{\nu} \binom{N}{l} \binom{N + l}{N} \binom{N + \nu}{N + l}.$$

Nyní ze známého vzorce (viz Netto [12], p. 252)

$$\sum_{l=0} (-1)^l \binom{p - l}{m} \binom{k}{l} = \binom{p - k}{p - m} \qquad (10)$$

je

$$\binom{N + \nu}{N + l} = \sum_{k=0}^{\nu - l} (-1)^k \binom{2N + \nu - l - k}{2N} \binom{N - l}{k} =$$

$$= (-1)^l \sum_{k=l}^{\nu} (-1)^k \binom{2N + \nu - k}{2N} \binom{N - l}{k - l},$$

takže

$$\binom{N + \nu}{\nu}^2 = \sum_{l=0}^{\nu} (-1)^l \binom{N + l}{N} \binom{N}{l} \sum_{k=l}^{\nu} (-1)^k \binom{2N + \nu - k}{2N} \binom{N - l}{k - l} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \binom{2N + \nu - k}{\nu - k} \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{N + l}{N} \binom{N}{l} \binom{N - l}{k - l}. \qquad (11)$$

Zbývá vypočítat hodnotu vnitřního součtu.

Avšak ze vzorce (10) je

$$\binom{N}{k} = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{N + k - l}{N} \binom{k}{l},$$

odkud pomocí identity

$$\binom{N}{k} \binom{k}{l} = \binom{N + l - k}{l} \binom{N}{k - l}$$

vychází

$$\binom{N}{k}^2 = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{N + k - l}{N} \binom{N}{k - l} \binom{N + l - k}{l} =$$

$$= (-1)^k \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{N + l}{N} \binom{N}{l} \binom{N - l}{k - l}.$$

Dosadíme-li odtud do rovnice (11), máme vztah (5).

8.

Hra na kulečníku se zpravidla hraje tak, že vyhrává ten, kdo první udělá N předem smluvených karambolů. Hráči však mohou učinit tuto dohodu. Dosáhne-li N karambolů ten hráč, který začínal, může jeho protivník ještě jednou hrát. Dokončí-li tak rovněž N karambolů, potom je hra nerozhodná. A právě výpočet této remízy vede k rovnici (4).

Nechť hráči A a B hrají spolu partii o N karambolech. Buď p_1 (p_2) během hry konstantní pravděpodobnost, že hráč A (B) udělá karambol, a položme $q_1 = 1 - p_1$ a $q_2 = 1 - p_2$. Když hra skončila remízou, mají oba hráči za sebou stejný počet sérií. Přitom série je sled strků (šťouchů), v nichž hráč udělal karambol, po nichž následuje neúspěšný šťouch. Skončila-li hra remízou v v sériích, udělal každý hráč $N + v - 1$ strků, z nichž bylo N úspěšných a $v - 1$ neúspěšných. Neúspěšnými strky je zakončeno prvních $v - 1$ sérií a poslední série nebyla dokončena, neboť v ní byl udělán N-tý karambol. Těchto $v - 1$ neúspěchů může být kdekoliv na prvních $N + v - 2$ místech, což dává

$$\binom{N+v-2}{v-1}$$

možností.

Nyní v každém z těchto případů je příslušná pravděpodobnost

$$p_1^N q_1^{v-1},$$

takže pravděpodobnost, že hráč A udělal v v sériích N karambolů, je

$$\binom{N+v-2}{v-1} p_1^N q_1^{v-1}.$$

Podobně pravděpodobnost, že hráč B udělal v v sériích N karambolů, je

$$\binom{N+v-2}{v-1} p_2^N q_2^{v-1}$$

a pro pravděpodobnost, že partie skončí v v sériích remízou, vychází

$$\binom{N+v-2}{v-1}^2 (p_1p_2)^N (q_1q_2)^{v-1}.$$

Označíme-li konečně $R(N)$ pravděpodobnost, že partie o N karambolech skončí remízou, máme

$$R(N) = (p_1p_2)^N \sum_{v=1}^{\infty} \binom{N+v-2}{v-1}^2 (q_1q_2)^{v-1} =$$

$$= (p_1p_2)^N \sum_{v=0}^{\infty} \binom{N+v-1}{v}^2 (q_1q_2)^v$$

a to je výraz na levé straně rovnice (4).

Nyní je však

$$R(N) = (p_1p_2)^N \sum_{v=0}^{\infty} \frac{N(N+1)\ldots(N+v-1)}{1.2.\ldots.(1+v-1)} \cdot \frac{N(N+1)\ldots(N+v-1)}{1.2.\ldots v} (q_1q_2)^v,$$

takže užijeme-li ještě označení

$$F(a, b, c; x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\ldots(a+v-1)}{c(c+1)\ldots(c+v-1)} \cdot \frac{b(b+1)\ldots(b+v-1)}{v!} x^v$$

pro hypergeometrickou řadu, vidíme, že je

$$R(N) = (p_1p_2)^N F(N, N, 1; q_1q_2).$$

Vzpomeneme-li si konečně na transformační formuli

$$F(a, b, c; x) = (1 - x)^{c-a-b} F(c - a, c - b, c; x),$$

dostáváme pro pravděpodobnost remízy jiný výraz

$$R(N) = (p_1p_2)^N (1 - q_1q_2)^{1-2N} . F(1 - N, 1 - N, 1; q_1q_2) =$$

$$= (p_1p_2)^N (1 - q_1q_2)^{1-2N} . \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\{(N-1)(N-2)\ldots(N-k)\}^2}{(k!)^2} (q_1q_2)^k =$$

$$= (p_1p_2)^N (1 - q_1q_2)^{1-2N} \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k}^2 (q_1q_2)^k.$$

A to je výraz na pravé straně rovnice (4).

LITERATURA

[1] Turán P., *A kínai matematika történetének egy problémájáról*, Matematikai Lapok V (1954), 1—6.

[2] Surányi J., *Megjegyzések a kínai matematika történetének egy problémájához*, Matematikai Lapok VI (1955), 30—35.

[3] Csang-Jung, Ko hszüe (Science) XXIII (1939), 647—663.

[4] Takács L., *Megjegyzés Turán Pál „A kínai matematika történetének egy problémájáról" című dolgozatához*, Matematikai Lapok VI (1955), 27—29.

[5] Kaucký J., *Poznámka k jednomu článku P. Turána*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV *12* (1962), 212—216.

[6] Huszár G., *A kínai matematika történetének egy problémájáról*, Matematikai Lapok VI (1955), 36—38.

[7] Maté J., *A kínai matematika történetének egy problémájáról*, Matematikai Lapok VII (1956), 112—113.

[8] Nanjundiah T. S., *Remark on a note of P. Turán*, Amer. Math. Monthly *65* (1958), 354.

[9] Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications* I, New York 1950.

[10] Bottema O.—van Veen S. C., *Kansberekningen bij het biljartspel*, Nieuw Archief voor Wiskunde *22* (1943), 16—33.

[11] Kaucký J., *Důkaz rovnice* $\sum_{k=0}^{v} \binom{2N+v-k}{v-k}\binom{N}{k}^2 = \binom{N+v}{v}^2$. Sborník Vojenské technické akademie A. Zápotockého v Brně *5* (1957), 6—8.

[12] Netto E., *Lehrbuch der Combinatorik*, Leipzig 1901.

Došlo 24. 9. 1962.

Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie vied v Bratislave

ÜBER EIN PROBLEM AUS DER GESCHICHTE DER CHINESISCHEN MATHEMATIK

Josef Kaucký

Auszug

Im Jahre 1867 erschien in Nanking unter dem Titel „Cō ku hszi csaj szuan hszue" ein Buch des chinesischen Mathematikers Li Zsen-Su (1810—1882). In diesem Buche ist — nach alter chinesischer Tradition ohne Beweis — eine Reihe mathematischer Ergebnisse angeführt und unter anderen auch eine Beziehung, die in der modernen Art der Bezeichnung die kombinatorische Identität (1) ergibt.

Die ersten Beweise dieser Formel, die von P. Turán und G. Szekeres stammen, sind im Jahre 1939 in der chinesisch geschriebenen Publikation (3) veröffentlicht worden. Turán hat nach Jahren seinen Beweis in der Arbeit [1] rekonstruiert, auf den Beweis von Szekeres, der auch von analytischer Natur war, konnte er sich jedoch nicht mehr erinnern.

Der Beweis von P. Turán beruht in der Herleitung der Gleichung (2), aus der die Identität (1) schon einfach durch Vergleich der Koeffizienten bei x^n an ihren beiden Seiten hervorgeht. Auf Turáns Beweis bezieht sich auch der Artikel [5].

Nach Turán bewies in den Jahren 1955—1956 die Formel (1), und zwar auf verschiedene Weise und auf einfachere Art, eine Reihe ungarischer Mathematiker in den Aufsätzen [2, 5—7]. Im Jahre 1958 hat T. S. Nanjundiah [8] eine algemeinere Beziehung bewiesen.

Unabhängig von diesen Arbeiten bin ich auf die Formel (1) beim Studium des Fellerschen Buches [9] gekommen. Dort soll nämlich im Problem No. 10 auf S. 236 die Gleichung (4) nachgewiesen werden, aus der die Identität (5) hervorgeht. Aber die Gleichung (4) ist nichts anderes als Turáns Gleichung (2) und die Beziehung (5) ist eigentlich die Formel (1).

Es sei noch bemerkt, daß das erwähnte Problem das Ergebnis enthält, welches Feller aus der Arbeit [10] übernommen hat, in der einige Wahrscheinlichkeiten berechnet sind, die sich auf das Billiardspiel beziehen.

Die Beziehung (5) habe ich versucht auf andere Weise als mit der Gleichung (4) zu beweisen. Der erste Beweis (aus dem Jahre 1956), der bisher noch nicht veröffentlicht wurde, ist von J. Seitz. Danach habe ich die Formel (5) auf kürzere Weise in der Bemerkung [11] bewiesen.

Im 6. Absatz der vorangehenden Arbeit ist der abgeänderte Beweis von J. Seitz enthalten. Die Gleichung (8) ist hier nicht durch Induktion bewiesen, sondern die partielle Ableitung ist unter Benutzung der Leibnizschen Formel berechnet worden. Dann folgt mein Beweis aus [11] und in dem letzten Absatz ist angeführt, wie man zu der Gleichung (4) durch wahrscheinlichkeitstheoretische Erwägungen aus der Arbeit [10] kommt. Das Ergebnis ergibt, daß die Gleichung (2) nichts anderes ist, als die bekannte Transformationsgleichung für die hypergeometrische Reihe, angewendet auf eine Reihe mit speziellen Parametern.