MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 13, 1-1963

SPECIÁLNÍ TYPY SPOJITÝCH FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

KAREL TUHÁČEK, Ústí nad Orlicí

Označme A množinu bodů $\alpha = (m_1 2^\nu, m_2 2^\nu, \ldots, m_n 2^\nu)$, kde $m_1, m_2, \ldots, m_n$ jsou libovolná celá čísla a ν je libovolné celé nekladné číslo. Potom jsou správná tvrzení:

Věta A. *Existuje spojitá funkce $F(x)$ n proměnných, pro niž platí:*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} F(\alpha) \neq \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} F(\alpha)$$

pro $k \neq l$ a každý bod $\alpha \in A$ a

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} F(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} F(x)\,; \; k \neq l$$

všude jinde.

Věta B. *Existuje spojitá funkce n proměnných $G(x)$ těchto vlastností: Funkce $G(x)$ má ve všech bodech totální diferenciál. Ve všech bodech existují parciální derivace 1. řádu $\partial G(x)/\partial x_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, které jsou nespojité v libovolném bodě $\alpha \in A$.*

Důkaz obou tvrzení provedeme v dalším přímou konstrukcí funkcí požadovaných vlastností.

Zvolme libovolně n celých čísel $m_1, m_2, \ldots, m_n$, celé nekladné číslo ν a přirozená čísla $i < j$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Položme $a = (m_1 2^\nu, m_2 2^\nu, \ldots, m_n 2^\nu)$. Definujme funkci n proměnných vztahy:

$$^{i,j}f^{\nu}_{m_1, m_2, \ldots, m_n}(x) =$$

$$= 2^\nu \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|} \cdot \frac{(x_i - m_i 2^\nu)(x_j - m_j 2^\nu)}{\exp\left[2(x_i - m_i 2^\nu)^2 + 2(x_j - m_j 2^\nu)^2\right]} \cdot \frac{(x_i - m_i 2^\nu)^2 - (x_j - m_j 2^\nu)^2}{(x_i - m_i 2^\nu)^2 + (x_j - m_j 2^\nu)^2} \tag{1}$$

pro $x \neq a$ a

$$^{i,j}f^{\nu}_{m_1, m_2, \ldots, m_n}(a) = \lim_{x \to a} {}^{i,j}f^{\nu}_{m_1, m_2, \ldots, m_n}(x) = 0. \tag{2}$$

Věta 1. 1. *Funkce $^{i,j}f^{\nu}_{m_1, m_2, \ldots, m_n}(x)$ je spojitá.*

2. *Všude existují parciální derivace*

$$\frac{\partial}{\partial x_k} {}^{i,j}f^{\nu}_{m_1, \ldots, m_n}(x)\,; \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

3. *Ve všech bodech existují parciální derivace*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_l}\,{}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,m_2,\dots,m_n}(x); \qquad k \neq l; \qquad k, l = 1, 2, \dots, n.$$

4. *Je-li $x \neq a$, je*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_l}\,{}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_k}\,{}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x); \quad k \neq l; \quad k, l = 1, 2, \dots, n \tag{3}$$

a dále

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_l}\,{}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(a) \neq \frac{\partial^2}{\partial x_l\,\partial x_k}\,{}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(a); \quad k \neq l; \quad k, l = 1, 2, \dots, n. \tag{4}$$

Důkaz. 1. Spojitost funkce ${}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x)$ je zřejmá z (1) a (2).
2. Existence parciálních derivací 1. řádu. Pro $k \neq i, j$ je:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\,{}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x) = 0. \tag{5}$$

Pro $x \neq a$ je

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,{}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x) = 2^{\nu}\prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|}\,.\,\frac{x_j - m_j 2^{\nu}}{\exp\left[2(x_i - m_i 2^{\nu})^2 + 2(x_j - m_j 2^{\nu})^2\right]}\,. \\ .\left\{\left[1 - 4(x_i - m_i 2^{\nu})^2\right]\frac{(x_i - m_i 2^{\nu})^2 - (x_j - m_j 2^{\nu})^2}{(x_i - m_i 2^{\nu})^2 + (x_j - m_j 2^{\nu})^2} + \right. \\ \left. + 4\,\frac{(x_i - m_i 2^{\nu})^2 (x_j - m_j 2^{\nu})^2}{\left[(x_i - m_i 2^{\nu})^2 + (x_j - m_j 2^{\nu})^2\right]^2}\right\}; \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\,{}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x) = 2^{\nu}\prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|}\,.\,\frac{x_i - m_i 2^{\nu}}{\exp\left[2(x_i - m_i 2^{\nu})^2 + 2(x_j - m_j 2^{\nu})^2\right]}\,. \\ .\left\{\left[1 - 4(x_j - m_j 2^{\nu})^2\right]\frac{(x_i - m_i 2^{\nu})^2 - (x_j - m_j 2^{\nu})^2}{(x_i - m_i 2^{\nu})^2 + (x_j - m_j 2^{\nu})^2} - \right. \\ \left. - 4\,\frac{(x_i - m_i 2^{\nu})^2 (x_j - m_j 2^{\nu})^2}{\left[(x_i - m_i 2^{\nu})^2 + (x_j - m_j 2^{\nu})^2\right]^2}\right\} \tag{7}$$

a v bodě *a*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,{}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(a) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\,{}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(a) = 0. \tag{9}$$

Vztahy (8) a (9) plynou přímo z definice parciální derivace.

3. Parciální derivace 2. řádu. Je

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_l}\,{}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x) = 0 \tag{10}$$

pro $k \neq i, j$ nebo $l \neq i, j$. Pro $x \neq a$ je

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\,{}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_i}\,{}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x) = \\ = 2^{\nu}\prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|}\,.\,\frac{1}{\exp\left[2(x_i - m_i 2^{\nu})^2 + 2(x_j - m_j 2^{\nu})^2\right]}\,. \\ .\,\frac{(x_i - m_i 2^{\nu})^2 - (x_j - m_j 2^{\nu})^2}{(x_i - m_i 2^{\nu})^2 + (x_j - m_j 2^{\nu})^2}\,. \\ .\left\{\left[1 - 4(x_i - m_i 2^{\nu})^2\right]\left[1 - 4(x_j - m_j 2^{\nu})^2\right] + 16\,\frac{(x_i - m_i 2^{\nu})^2 (x_j - m_j 2^{\nu})^2}{(x_i - m_i 2^{\nu})^2 + (x_j - m_j 2^{\nu})^2} + \right. \\ \left. + 8\,\frac{(x_i - m_i 2^{\nu})^2 (x_j - m_j 2^{\nu})^2}{\left[(x_i - m_i 2^{\nu})^2 + (x_j - m_j 2^{\nu})^2\right]^2}\right\} \tag{11}$$

a v bodě *a*:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}\,{}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(a) = -2^{\nu}\prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|}, \qquad i < j; \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j\,\partial x_i}\,{}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(a) = +2^{\nu}\prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|}, \qquad i < j. \tag{13}$$

Tím je věta dokázána.

Věta 2. *Pro všechna x platí:*

$$|\,{}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x)| \leqq 2^{\nu}\prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|}; \tag{14}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_k}\,{}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x)\right| \leqq 5\,.\,2^{\nu}\prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|}; \qquad k = 1, 2, \dots, n; \tag{15}$$

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_l}\,{}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x)\right| \leqq 19\,.\,2^{\nu}\prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|}; \qquad k \neq l; \qquad k, l = 1, 2, \dots, n. \tag{16}$$

Důkaz. Nerovnost (14) plyne z (1) a (2). Pro $x \neq a$ je:

$$|\,{}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x)| = 2^{\nu}\prod_{s=1}^{n}{}^{-|m_s|}\,.\,\frac{|x_i - m_i 2^{\nu}|}{\exp\left[2(x_i - m_i 2^{\nu})^2\right]}\,.\,\frac{|x_j - m_j 2^{\nu}|}{\exp\left[2(x_j - m_j 2^{\nu})^2\right]}\,. \\ .\left|\frac{(x_i - m_i 2^{\nu})^2 - (x_j - m_j 2^{\nu})^2}{(x_i - m_i 2^{\nu})^2 + (x_j - m_j 2^{\nu})^2}\right| \leqq 2^{\nu}\prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|}\,.$$

V bodě *a* platí (2).

Nerovnost (15) je správná pro $k \neq i, j$. Položme nyní $k = i$. Je-li $x \neq a$, pak podle (6) je

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_i} {}^{i,j}f_{m_1,\ldots,m_n}(x) \right| = 2^\nu \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|} \cdot \frac{|x_j - m_j 2^\nu|}{\exp[2(x_i - m_i 2^\nu)^2 + 2(x_j - m_j 2^\nu)^2]} \cdot$$

$$\cdot \left\{ |1 - 4(x_i - m_i 2^\nu)^2| \left| \frac{(x_i - m_i 2^\nu)^2 - (x_j - m_j 2^\nu)^2}{(x_i - m_i 2^\nu)^2 + (x_j - m_j 2^\nu)^2} \right| + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{2(x_i - m_i 2^\nu)^2 (x_j - m_j 2^\nu)^2}{[(x_i - m_i 2^\nu)^2 + (x_j - m_j 2^\nu)^2]^2} \right\} \leqq$$

$$\leqq 2^\nu \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|} \frac{|x_j - m_j 2^\nu|}{\exp[2(x_j - m_j 2^\nu)^2]} \cdot \frac{1}{\exp[2(x_i - m_i 2^\nu)^2]} [1 + 4(x_i - m_i 2^\nu)^2 + 2] \leqq$$

$$\leqq 2^\nu \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|} \left\{ 3 \frac{1}{\exp[2(x_i - m_i 2^\nu)^2]} + 2 \frac{2(x_i - m_i 2^\nu)^2}{\exp[2(x_i - m_i 2^\nu)^2]} \right\} \leqq 5 \cdot 2^\nu \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|}.$$

To však platí i pro $x = a$, vzhledem k (8). Pro $k = j$ je důkaz obdobný podle (7) a (9).

Nerovnost (16). Z (10) plyne její správnost pro $k \neq i, j$ nebo $l \neq i, j$. Je-li $k = i$ nebo j a $l = i$ nebo j, $k \neq l$, je pro $x \neq a$ podle (11):

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} {}^{i,j}f^\nu_{m_1,\ldots,m_n}(x) \right| = 2^\nu \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|} \cdot \frac{1}{\exp[2(x_i - m_i 2^\nu)^2 + 2(x_j - m_j 2^\nu)^2]} \cdot$$

$$\cdot \left| \frac{(x_i - m_i 2^\nu)^2 - (x_j - m_j 2^\nu)^2}{(x_i - m_i 2^\nu)^2 + (x_j - m_j 2^\nu)^2} \right| \cdot \left\{ |1 - 4(x_i - m_i 2^\nu)^2| \cdot |1 - 4(x_j - m_j 2^\nu)^2| + \right.$$

$$+ 8 \frac{2|x_i - m_i 2^\nu| \cdot |x_j - m_j 2^\nu|}{(x_i - m_i 2^\nu)^2 + (x_j - m_j 2^\nu)^2} |x_i - m_i 2^\nu| \cdot |x_j - m_j 2^\nu| +$$

$$\left. + 4 \frac{2(x_i - m_i 2^\nu)^2 (x_j - m_j 2^\nu)^2}{[(x_i - m_i 2^\nu)^2 + (x_j - m_j 2^\nu)^2]^2} \right\} \leqq$$

$$\leqq 2^\nu \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|} \frac{1}{\exp[2(x_i - m_i 2^\nu)^2 + 2(x_j - m_j 2^\nu)^2]} \cdot$$

$$\cdot \{[1 + 4(x_i - m_i 2^\nu)^2][1 + 4(x_j - m_j 2^\nu)^2] + 8|x_i - m_i 2^\nu| \cdot |x_j - m_j 2^\nu| + 4\} =$$

$$= 2^\nu \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|} \frac{1}{\exp[2(x_i - m_i 2^\nu)^2 + 2(x_j - m_j 2^\nu)^2]} \cdot$$

$$\cdot \{5 + [4(x_i - m_i 2^\nu)^2 + 4(x_j - m_j 2^\nu)^2] + 16(x_i - m_i 2^\nu)^2 (x_j - m_j 2^\nu)^2 +$$

$$+ 8|x_i - m_i 2^\nu| \cdot |x_j - m_j 2^\nu|\} =$$

$$= 2^\nu \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|} \left\{ 2 \frac{2(x_i - m_i 2^\nu)^2 + 2(x_j - m_j 2^\nu)^2}{\exp[2(x_i - m_i 2^\nu)^2 + 2(x_j - m_j 2^\nu)^2]} + \right.$$

$$+ 5 \frac{1}{\exp[2(x_i - m_i 2^\nu)^2 + 2(x_j - m_j 2^\nu)^2]} +$$

$$+ 4 \frac{2(x_i - m_i 2^\nu)^2}{\exp[2(x_i - m_i 2^\nu)^2]} \cdot \frac{2(x_j - m_j 2^\nu)^2}{\exp[2(x_j - m_j 2^\nu)^2]} +$$

$$\left. + 8 \frac{|x_i - m_i 2^\nu|}{\exp[2(x_i - m_i 2^\nu)^2]} \cdot \frac{|x_j - m_j 2^\nu|}{\exp[2(x_j - m_j 2^\nu)^2]} \right\} \leqq$$

$$\leqq 19 \cdot 2^\nu \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|}.$$

To platí podle (12) a (13) i pro $x = a$. Tím je věta dokázána.

Poznámka 1. Řada

$$\sum_{\nu=-\infty}^{0} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} K 2^\nu \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|},$$

kde K je konstanta, konverguje absolutně a její součet je menší než $K 2^{n+1}$.

Dále nechť čísla $m_1, m_2, \ldots, m_n$ jsou libovolná celá a ν libovolné celé nekladné číslo. Množinu bodů $\alpha = (m_1 2^\nu, m_2 2^\nu, \ldots, m_n 2^\nu)$ jsme označili A. Definujme funkci $F(x)$ n proměnných rovnicí:

$$F(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{0} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \ldots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} {}^{i,j}f^\nu_{m_1,\ldots,m_n}(x). \tag{17}$$

Věta 3. 1. *Funkce $F(x)$ je spojitá.*

2. *Všude existují parciální derivace $\partial F(x)/\partial x_k$; $k = 1, 2, \ldots, n$.*

3. *Ve všech bodech existují parciální derivace $\partial^2 F(x)/\partial x_k \partial x_l$; $k \neq l$; $k, l = 1, 2, \ldots, n$.*

4. *Platí:*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} F(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} F(x); \quad x \notin A; \quad k \neq l. \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} F(\alpha) \neq \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} F(\alpha), \quad k \neq l, \tag{19}$$

pro každý bod α množiny A.

Poznámka 2. Řadou všude rozumím „zobecněnou řadu"; viz [1], str. 93.

Poznámka 3. Buď $\mathcal{M}$ spočetná množina. Řada $\Sigma_{m \in \mathcal{M}} f_m(x)$ buď absolutně a stejnoměrně konvergetní řada funkcí n proměnných definovaných v oboru M a součet řady označme $f(x)$. Nechť pro všechna $m \in \mathcal{M}$ existují v M derivace $\partial f_m(x)/\partial x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a nechť řada $\Sigma_{m \in \mathcal{M}} \partial f_m(x)/\partial x_i$ konverguje v M absolutně a stejnoměrně. Potom existuje i $\partial f(x)/\partial x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a platí

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \sum_{m \in \mathcal{M}} \frac{\partial}{\partial x_i} f_m(x).$$

Důkaz věty 3. 1. Spojitost funkce $F(x)$ je zřejmá, protože řada (17) konverguje absolutně a stejnoměrně.

2. Řada (17) a řada

$$\sum_{\nu=-\infty}^{0} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\partial}{\partial x_k} {}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x)$$

konvergují absolutně a stejnoměrně, tedy platí:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} F(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{0} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\partial}{\partial x_k} {}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x).$$

Obdobně platí:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} F(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{0} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} {}^{i,j}f^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x). \quad (20)$$

Ze vztahů (20) a (3) plyne rovnost

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} F(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} F(x)$$

pro $x \notin A$ a $k \neq l$; $k, l = 1, 2, \ldots, n$.

Ze vztahů (20), (12) a (13) plyne pro $\alpha \in A$ a $k \neq l$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} F(\alpha) \neq \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} F(\alpha).$$

Bod α je libovolný bod množiny A.

Zvolme libovolně n celých čísel $m_1, m_2, \ldots, m_n$ a celé nekladné číslo ν. Položme $a = (m_1 2^\nu, m_2 2^\nu, \ldots, m_n 2^\nu)$. Definujme funkci n proměnných rovnicemi:

$$g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x) = 2^\nu \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|} \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_i 2^\nu)^2}{\prod_{i=1}^{n} \exp[2(x_i - m_i 2^\nu)^2]} \sin \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_i 2^\nu)^2}}, \quad (21)$$

pro $x \neq a$ a

$$g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(a) = \lim_{x \to a} g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x) = 0. \quad (22)$$

Věta 4. 1. *Funkce $g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x)$ je spojitá.*

2. *Všude existují všechny parciální derivace 1. řádu.*

3. *Všechny parciální derivace 1. řádu jsou nespojité v bodě a.*

4. *Funkce $g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x)$ má totální diferenciál.*

Důkaz. 1. Spojitost funkce $g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x)$ je zřejmá z definice funkce rovnicemi (21) a (22).

2. Existence parciálních derivací 1. řádu. Pro $x \neq a$ je:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x) = 2^\nu \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|} \left\{ \frac{2(x_j - m_j 2^\nu)}{\prod_{i=1}^{n} \exp[2(x_i - m_i 2^\nu)^2]} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_i 2^\nu)^2}} - \right.$$

$$- 4(x_j - m_j 2^\nu) \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_i 2^\nu)^2}{\prod_{i=1}^{n} \exp[2(x_i - m_i 2^\nu)^2]} \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_i 2^\nu)^2}} -$$

$$\left. - \frac{x_j - m_j 2^\nu}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_i 2^\nu)^2}} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \exp[2(x_i - m_i 2^\nu)^2]} \cdot \cos \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_i 2^\nu)^2}} \right\}. \quad (23)$$

V bodě a platí

$$\frac{\partial}{\partial x_j} g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(a) = 0. \quad (24)$$

3. Počítejme limitu $\partial g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x)/\partial x_j$ pro

$(m_1 2^\nu, m_2 2^\nu, \ldots, m_{j-1} 2^\nu, x_j, m_{j+1} 2^\nu, \ldots, m_n 2^\nu) \to a$, tj. limitu výrazu

$$2^\nu \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|} \left\{ \frac{2(x_j - m_j 2^\nu)}{\exp[2(x_j - m_j 2^\nu)^2]} \sin \frac{1}{|x_j - m_j 2^\nu|} - \right.$$

$$- 4(x_j - m_j 2^\nu) \frac{(x_j - m_j 2^\nu)^2}{\exp[2(x_j - m_j 2^\nu)^2]} \sin \frac{1}{|x_j - m_j 2^\nu|} -$$

$$\left. - \frac{x_j - m_j 2^\nu}{|x_j - m_j 2^\nu|} \cdot \frac{1}{\exp[2(x_j - m_j 2^\nu)^2]} \cdot \cos \frac{1}{|x_j - m_j 2^\nu|} \right\}, \quad (25)$$

pro $x_j \to m_j 2^\nu$. Sestrojme posloupnost $\{{}^i x_j\}_{i=1}^{\infty}$ vybranou z hodnot x_j tak, že

$$\cos \frac{1}{|{}^i x_j - m_j 2^\nu|} = 1,$$

$i = 1, 2, \ldots$, a $\lim_{i \to \infty} {}^i x_j = m_j 2^\nu$. Potom existují následující limity:

$$\lim_{{}^i x_j \to m_j 2^\nu +} \frac{{}^i x_j - m_j 2^\nu}{|{}^i x_j - m_j 2^\nu|} \cos \frac{1}{|{}^i x_j - m_j 2^\nu|} = +1,$$

$$\lim_{{}^i x_j \to m_j 2^\nu -} \frac{{}^i x_j - m_j 2^\nu}{|{}^i x_j - m_j 2^\nu|} \cos \frac{1}{|{}^i x_j - m_j 2^\nu|} = -1.$$

Tedy neexistuje limita výrazu (25) pro $x_j \to m_j 2^\nu$.

4. Existence totálního diferenciálu funkce $g^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x)$ je zřejmá v bodech $x \neq a$ ze spojitosti parciálních derivací 1. řádu. Tedy existuje funkce $\eta^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(h)$ daná rovnicí:

$$g^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x+h) - g^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} g^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x)\, h_j + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} h_j^2}\; \eta^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(h),$$

pro kterou platí

$$\lim_{h\to 0} \eta^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(h) = 0.$$

V bodě a je

$$g^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(a+h) - g^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(a) = g^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(a+h) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}\; \eta^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(h),$$

kde

$$\eta^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(h) = 2^{\nu} \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}}{\prod_{i=1}^{n} \exp 2h_i^2} \sin \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}}$$

a tedy je

$$\lim_{h\to 0} \eta^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(h) = 0.$$

Věta 5. *Pro všechna x platí nerovnosti:*

$$|g^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x)| \leqq 2^{\nu} \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|}; \tag{26}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j} g^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x)\right| \leqq 6 \,.\, 2^{\nu} \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|}, \qquad j = 1, 2, \dots, n; \tag{27}$$

$$\left|\sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}\; \eta^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(h)\right| \leqq 2(1+3n)\, 2^{\nu} \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|} \tag{28}$$

pro $|h_i| \leqq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Viz poznámku 1.

Důkaz. Nerovnost (26). Pro $x \neq a$ je z (21)

$$|g^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x)| = 2^{\nu} \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|} \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_i 2^{\nu})^2}{\exp\left[\sum_{i=1}^{n} 2(x_i - m_i 2^{\nu})^2\right]} \,.\, \left|\sin \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_i 2^{\nu})^2}}\right| < 2^{\nu} \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|}.$$

V bodě a platí (22).

Nerovnost (27). Pro $x \neq a$ plyne ze vztahu (23):

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_j} g^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x)\right| \leqq 2^{\nu} \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|} \left\{ \frac{2|x_j - m_j 2^{\nu}|}{\prod_{i=1}^{n} \exp[2(x_i - m_i 2^{\nu})^2]} \,.\, \left|\sin \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_i 2^{\nu})^2}}\right| + 4 \frac{|x_j - m_j 2^{\nu}|}{\prod_{i=1}^{n} \exp[(x_i - m_i 2^{\nu})^2]} \,.\, \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_i 2^{\nu})^2}{\exp\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_i 2^{\nu})^2\right]} \,.\, \left|\sin \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_i 2^{\nu})^2}}\right| + \left|\frac{x_j - m_j 2^{\nu}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_i 2^{\nu})^2}}\right| \,.\, \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} \exp[2(x_i - m_i 2^{\nu})^2]} \,.\, \left|\cos \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_i 2^{\nu})^2}}\right| \right\} \leqq 6 \,.\, 2^{\nu} \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|}.$$

Tento vztah platí vzhledem k (24) i v bodě a.

Nerovnost (28).

$$\left|\sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}\; \eta^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(h)\right| \leqq |g^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x+h)| + |g^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x)| + \sum_{j=1}^{n} \left[\left|\frac{\partial}{\partial x_j} g^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x)\right| . |h_j|\right] \leqq 2^{\nu} \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|} + 2^{\nu} \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|} + 6n 2^{\nu} \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|} = 2(1+3n)\, 2^{\nu} \prod_{s=1}^{n} 2^{-|m_s|}; \qquad |h_j| \leqq 1, \qquad j = 1, 2, \dots, n.$$

Tím je věta 5 dokázána.

Dále buďte čísla $m_1, m_2, \dots, m_n$ libovolná celá a číslo ν libovolné celé nekladné. Množinu bodů $\alpha = (m_1 2^{\nu}, m_2 2^{\nu}, \dots, m_n 2^{\nu})$ jsme označili A.

Definujme funkci n proměnných $G(x)$ rovnicí

$$G(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{0} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} g^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x). \tag{29}$$

Věta 6. 1. *Funkce $G(x)$ je spojitá.*

2. *Ve všech bodech existují parciální derivace $\partial G(x)/\partial x_j$, $j = 1, 2, \dots, n$.*

3. *Všechny parciální derivace $\partial G(x)/\partial x_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, jsou nespojité v libovolném bodě $\alpha \in A$.*

4. *Funkce $G(x)$ má všude totální diferenciál.*

Důkaz. 1. Funkce $g^{\nu}_{m_1,\dots,m_n}(x)$ jsou spojité, řada (29) konverguje absolutně a stejnoměrně a tedy je funkce $G(x)$ spojitá.

2. Řada (29) i řada

$$\sum_{\nu=-\infty}^{0} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_j} g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x), \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

konvergují absolutně a stejnoměrně. Tedy platí

$$\frac{\partial}{\partial x_j} G(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{0} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_j} g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x), \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{30}$$

Viz poznámku 3.

3. Buď α libovolný bod množiny A. To znamená, že existují celá čísla $m_1, m_2, \ldots, m_n$ a celé nekladné číslo ν tak, že $\alpha = (m_1 2^\nu, m_2 2^\nu, \ldots, m_n 2^\nu)$. Bod α je charakterizován $n + 1$ čísly $m_1, m_2, \ldots, m_n$ a ν. Lze jej určit též čísly $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ a λ, pro která platí

$$\mu_i 2^\lambda = m_i 2^\nu, \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{31}$$

Z toho pro čísla $m_1, m_2, \ldots, m_n$ a $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ plyne:

$$\mu_1 : \mu_2 : \ldots : \mu_n = m_1 : m_2 : \ldots : m_n, \tag{32}$$
$$\operatorname{sgn} \mu_i = \operatorname{sgn} m_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Nechť číslo 2 není společným dělitelem čísel $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Potom určení bodu $\alpha = (\mu_1 2^\lambda, \mu_2 2^\lambda, \ldots, \mu_n 2^\lambda)$ čísly $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ a λ nazveme nejjednodušším vyjádřením bodu α. Všechna ostatní vyjádření jsou dána čísly $m_1, m_2, \ldots, m_n$ a ν, která splňují rovnice (31) a (32). Každý bod má právě jedno nejjednodušší vyjádření, které určuje funkci $g^{\lambda}_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x)$ s těmito vlastnostmi:

(A) Funkce $g^{\lambda}_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x)$ má všude všechny parciální derivace 1. řádu.

(B) Všechny parciální derivace 1. řádu jsou nespojité v bodě

$$\alpha = (\mu_1 2^\lambda, \mu_2 2^\lambda, \ldots, \mu_n 2^\lambda).$$

Tytéž vlastnosti (A) a (B) mají v bodě α právě ty funkce $g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x)$, jejichž indexy splňují vztahy (31) a (32). Tím se množina všech funkcí $g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x)$ vzhledem k bodu α rozdělí na dvě množiny tak, že do prvé – M_α – budou patřit právě ty funkce, které v bodě α splňují podmínky (A) a (B); do druhé – N_α – ty, které zbývají. Ze vztahů (21) a (22) a z věty 4 plyne

$$\operatorname{sgn} g^{\lambda}_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x) = \operatorname{sgn} g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x); \tag{33}$$
$$g^{\lambda}_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(\alpha) = g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(\alpha) = 0$$

a dále ze vztahů (23) a (24)

$$\operatorname{sgn} \frac{\partial}{\partial x_j} g^{\lambda}_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x) = \operatorname{sgn} \frac{\partial}{\partial x_j} g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x); \tag{34}$$
$$\frac{\partial}{\partial x_j} g^{\lambda}_{\mu_1,\ldots,\mu_n}(\alpha) = \frac{\partial}{\partial x_j} g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(\alpha) = 0;$$
$$j = 1, 2, \ldots, n,$$

je-li $\alpha = (\mu_1 2^\lambda, \mu_2 2^\lambda, \ldots, \mu_n 2^\lambda) = (m_1 2^\nu, m_2 2^\nu, \ldots, m_n 2^\nu)$. Vzhledem k (33) a (34) je součet funkcí z množiny M_α opět funkce z této množiny a stejně tak pro funkce z N_α. Řadu (30), která konverguje absolutně a stejnoměrně, můžeme přerovnat tak, že nejprve sečteme funkce z množiny M_α, což bude funkce s vlastnostmi (A) a (B) v bodě α, a potom sečteme zbývající funkce z množiny N_α. To bude funkce, která v bodě α podmínky (A) a (B) nesplňuje. Parciální derivace $\partial G(x)/\partial x_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, je vyjádřena jako součet dvou funkcí, z nichž jedna je spojitá a druhá nespojitá v bodě α.

Spojitost funkce (30) pro $x \notin A$ je zřejmá.

4. Totální diferenciál.

$$G(x + h) - G(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{0} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x + h) -$$
$$- \sum_{\nu=-\infty}^{0} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x) =$$
$$= \sum_{\nu=-\infty}^{0} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} [g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x + h) - g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x)] =$$
$$= \sum_{\nu=-\infty}^{0} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x)\, h_j + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}\; \eta^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(h) \right] =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{\nu=-\infty}^{0} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_j} g^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(x)\, h_j +$$
$$+ \sum_{\nu=-\infty}^{0} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}\; \eta^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(h) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} G(x)\, h_j + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} h_i^2}\, \eta(h),$$

je-li

$$\eta(h) = \sum_{\nu=-\infty}^{0} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \eta^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(h)$$

a $|h_i| \leq 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Ještě dokážeme, že $\lim_{h\to 0} \eta(h) = 0$.

$$\lim_{h\to 0} \eta(h) = \lim_{h\to 0} \sum_{\nu=-\infty}^{0} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \eta^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(h) =$$
$$= \sum_{\nu=-\infty}^{0} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=-\infty}^{\infty} \lim_{h\to 0} \eta^{\nu}_{m_1,\ldots,m_n}(h) = 0.$$

LITERATURA

[1] Jarník V., *Diferenciální počet* II, Praha 1956.

[2] Petr K., *Diferenciální počet*, Praha 1925.

[3] Grebenča M. K., Novoselov S. I., *Učebnice matematické analysy* (překlad z ruštiny), Praha 1955.

[4] Meder A., *Über die Herstellung von Funktionen $f(x, y)$, für welche $f_{x,y}(x, y) \neq f_{y,x}(x, y)$ ist*, Acta universitatis latviensis (Riga) *13* (1926), 655—668.

[5] Hahn H., *Theorie der reellen Funktionen*, Berlin 1921.

[6] Bögel K., *Zur theorie der Funktionen mehrerer Veränderlichen*, Jahrsbericht der Deutschen Mathem. Vereinigung *34* (1926), 490—498.

[7] Inabe N., *Über die nach x partiellstetig Funktionen $f(x, y)$*, Proceedings of the Physic-Mathematical Society of Japan *16* (1934), 201—203, 225—226.

Došlo 18. 8. 1961.

НЕКОТОРЫЕ ТИПЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Карел Тухачек

Резюме

Пусть A множество точек $a = (m_1 2^\nu, m_2 2^\nu, \ldots, m_n 2^\nu)$, где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ — целые числа и ν — целое отрицательное число или 0. Имеет место

Теорема A. Существует непрерывная функция $F(x)$ n переменных такая, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} F(\alpha) \neq \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} F(\alpha)$$

для $k \neq l$; $k, l = 1, 2, \ldots, n$ и всякой точки $\alpha \in A$, и, далее,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} F(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} F(x); \quad k \neq l; \quad k, l = 1, 2, \ldots, n$$

для $x \notin A$.

Теорема B. Существует непрерывная функция $G(x)$ n переменных, которая обладает следующими свойствами:

1. Существует полной дифференциал $G(x)$ в каждой точке.
2. Частные произвольные первого порядка разрывны в произвольной точке $\alpha \in A$.

Доказательство этих теорем заключается в конструкции функций с требуемыми свойствами.

Функции ${}^{i,j}f^{\nu}_{m_1, \ldots, m_n}(x)$ определенные отношениями (1) и (2) выполняют условия теоремы A для $k = i$, $l = j$ в точке $a = (m_1 2^\nu, m_2 2^\nu, \ldots, m_n 2^\nu)$. Функция $F(x)$ определенная равенством (17) обладает свойствами требуемыми теоремой A в каждой точке множества A.

Функции $g^{\nu}_{m_1, \ldots, m_n}(x)$ определенные отношениями (22), (23) обладают свойствами теоремы B в точке $a = (m_1 2^\nu, m_2 2^\nu, \ldots, m_n 2^\nu)$ и функция $G(x)$ в равенстве (29) обладает всеми требуемыми свойствами во всех точках множества A.

SUR LES TYPES SPECIALS DES FONCTIONS CONTINUES DE PLUSIEURS VARIABLES

Karel Tuháček

Résumé

Désignons par A l'ensemble des points $a = (m_1 2^\nu, m_2 2^\nu, \ldots, m_n 2^\nu)$, où $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sont des nombres entiers et ν est un nombre entier négatif ou nul. Puis on a le

Théorème A. Il existe une fonction $F(x)$ de n variables pour laquelle on a

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} F(\alpha) \neq \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} F(\alpha) \text{ pour } k \neq l$$

et pour tous les points $\alpha \in A$ et

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l} F(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_k} F(x), \qquad k \neq l$$

partout ailleurs.

Théorème B. Il existe une fonction continue $G(x)$ de n variables jouissante les propriétés suivantes: La fonction $G(x)$ a partout le différentiel total. Les dérivées partielles du premier ordre sont discontinues dans chaque point $\alpha \in A$.

La démonstration de tous les deux théorèmes est effectuée par la construction des fonctions en question.

La fonction ${}^{i,j}f^{\nu}_{m_1, \ldots, m_n}(x)$ bien définie par les expressions (1) et (2) remplit les conditions du théorème A pour $k = i$, $l = j$ dans le point $a = (m_1 2^\nu, \ldots, m_n 2^\nu)$. La fonction $F(x)$ donnée par l'équation (17) a alors les propriétés demandées par le théorème A dans tous les points de l'ensemble A.

La fonction $g^{\nu}_{m_1, \ldots, m_n}(x)$ donnée par les expressions (22) et (23) a les propriétés du théorème B dans le point $a = (m_1 2^\nu, \ldots, m_n 2^\nu)$ et la fonction $G(x)$ de l'équation (29) a déjà toutes les propriétés demandées dans tous les points de l'ensemble A.