MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 13, 1-1963

ИЗ ТЕОРИИ ЭЙЛЕРОВСКИХ МНОГОГРАННИКОВ

АНТОН КОЦИГ (Anton Kotzig), Братислава

В работе [1] мы рассматривали функцию $\sigma(h)$ на множестве ребер эйлеровского многогранника P, определенную следующим образом:

Пусть h — произвольное ребро из P и пусть S_1, S_2 — грани многогранника P, инцидентные с ребром h (известно, что каждое ребро эйлеровского многогранника инцидентно с двумя и только с двумя его гранями). Обозначим через $\gamma(S_1)$ и $\gamma(S_2)$ число ребер, инцидентных с гранью S_1 и S_2 соответственно (если, например, $\gamma(S_1) = n$, то мы говорим обычно, что S_1 — n-угольник). Полагаем:

$$\sigma(h) = \gamma(S_1) + \gamma(S_2).$$

В работе [1] нами доказано (см. теоремы 1 и 3) следующее: В произвольном эйлеровском многограннике P найдется такое ребро h, что имеет место $\sigma(h) \leqq 13$; если P не содержит никакого треугольника, то в P существует даже такое ребро h', что $\sigma(h') \leqq 11$.

В настоящей работе будет показано, каким образом могут быть достигнутые результаты углублены, если ограничиться рассмотрением эйлеровских многогранников, обладающих следующим свойством: все вершины многогранника инцидентны с одним и тем же числом ребер. Эйлеровский многогранник, в котором каждая вершина инцидентна с k ребрами, мы будем называть эйлеровским многогранником k-ой степени. Ясно, что существуют только эйлеровские многогранники третьей, четвертой и пятой степени (см. [1], лемма 3).

Напомним сначала в форме теорем простые следствия уже названных и более общих теорем для эйлеровских многогранников третьей степени.

Теорема 1. *В произвольном эйлеровском многограннике третьей степени найдется такое ребро h, что имеет место $\sigma(h) \leqq 13$ и существует эйлеровский многогранник, в котором для каждого ребра h' имеет место $\sigma(h') \geqq 13$.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из теоремы 1 цитированной работы [1]. Эйлеровский многогранник третьей степени, в котором для произвольного ребра h' имеет место $\sigma(h') \geqq 13$, изображен на рис. 1 (там имеет место: либо $\sigma(h') = 13$, либо $\sigma(h') = 20$). Справедливость теоремы поэтому очевидна.

Теорема 2. *Пусть P — произвольный эйлеровский многогранник третьей степени, не содержащий треугольника; тогда в P найдется такое ребро h, что имеет место $\sigma(h) \leqq 11$. Существует такой эйлеровский многогранник третьей степени без треугольника, в котором для каждого ребра h' имеет место $\sigma(h') \geqq 11$.*

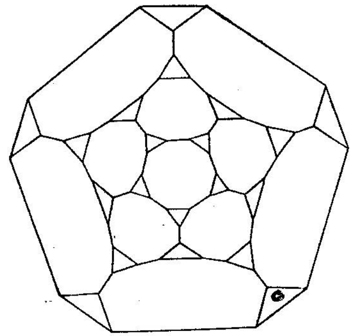


Рис. 1.

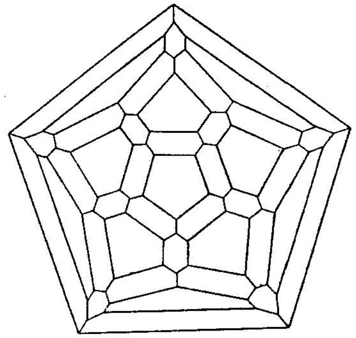


Рис. 2.

Доказательство. Первое утверждение является непосредственным следствием теоремы 3 из [1]. На рис. 2 изображен эйлеровский многогранник третьей степени, не содержащий никакого треугольника (а также никакого четырехугольника), в котором для произвольного ребра h' имеет место либо $\sigma(h') = 11$, либо $\sigma(h') = 12$.

Раньше чем приступить к выводу следующих теорем, мы введем подходящую символику и напомним некоторые известные факты.

Пусть P — произвольный эйлеровский многогранник. Через v_i обозначим число тех вершин многогранника P, которые инцидентны с i ребрами (т. е. тех, которые являются вершинами i-той степени); через s_i обозначим число i-угольников многогранника P и через g число его ребер. Символ $g_{i,j}$ используем для обозначения числа тех ребер многогранника P, на которых граничат i-угольник и j-угольник. Наконец, положим:

$$v = \sum_{i=3}^{\infty} v_i; \qquad s = \sum_{i=3}^{\infty} s_i$$

следовательно, $v(s)$ есть число всех вершин (граней) многогранника P. Для каждого эйлеровского многогранника справедливо следующее:

$$\sum_{i=3}^{\infty} iv_i = 2g = \sum_{i=3}^{\infty} is_i \tag{1}$$

$$v - g + s = 2, \tag{2}$$

$$ks_k = g_{k,k} + \sum_{i=3}^{\infty} g_{i,k} \quad \text{для всякого натурального } k > 2. \tag{3}$$

Справедливость уравнений (1) становится очевидной после такого рассуждения: Если подсчитать для всех вершин (соответственно, граней) число ребер, инцидентных с данной вершиной (соответственно, с гранью), то получится число всех ребер эйлеровского многогранника, умноженное на два (так как каждое ребро инцидентно с двумя вершинами, а также с двумя гранями). С помощью аналогичного рассуждения становится ясной справедливость уравнений (3). Уравнение (2) есть известное — полученное Эйлером — уравнение, справедливое для всех эйлеровских многогранников.

Теорема 3. *Пусть P — эйлеровский многогранник четвертой степени, тогда для его ребер имеет место:* $10g_{3,3} + 5g_{3,4} + 2g_{3,5} \geqq 120$, а *значит, в P найдется всегда такое ребро h, что* $\sigma(h) \leqq 8$. *Граница 120 — строгая и она не может быть уже для эйлеровских многогранников четвертой степени повышена, а верхняя граница 8 для минимального значения функции $\sigma(h)$ не может быть уже понижена.*

Доказательство. Так как, согласно условию, P является эйлеровским многогранником четвертой степени, то имеет место $v_4 = v$; $v_k = 0$ для всех $k \neq 4$. Из (1) следует $v = \frac{1}{2} g$; после подстановки в уравнение (2) и после его преобразования получим:

$$s_3 = 8 + s_5 + 2s_6 + \ldots + (k-4)\, s_k + \ldots \tag{4}$$

После подстановки в (4) согласно (3) получим следующий вид:

$$\frac{1}{3}(2g_{3,3} + g_{3,4} + g_{3,5} + \ldots + g_{3,k} + \ldots) =$$
$$= 8 + \frac{1}{5}(g_{3,5} + g_{4,5} + \ldots) +$$
$$+ \frac{2}{6}(g_{3,6} + g_{4,6} + \ldots) +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \frac{k-4}{k}(g_{3,k} + g_{4,k} + \ldots) +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Из этого вытекает:

$$\frac{2}{3} g_{3,3} + \frac{1}{3} g_{3,4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) g_{3,5} = 8 + C,$$

где $C \geqq 0$

следовательно,

$$10g_{3,3} + 5g_{3,4} + 2g_{3,5} \geqq 120, \tag{5}$$

что и требовалось доказать. Из указанного очевидно, что существует такое ребро h (больше того, их существует по меньшей мере 12 [см. (5)]), для которого $\sigma(h) \leqq 8$. На рис. 3 изображены три эйлеровских многогранника P_1, P_2, P_3. Для каждого из них имеет место $10g_{3,3} + 5g_{3,4} + 2g_{3,5} = 120$, что доказывает

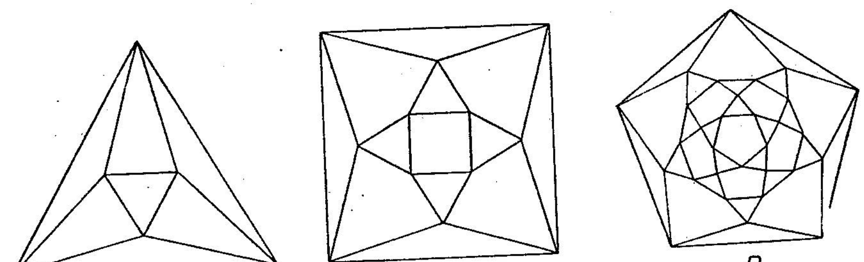


Рис. 3. $P_1 : g_{3,3} = 12$; $g_{3,4} = g_{3,5} = 0$. $P_2 : g_{3,4} = 24$; $g_{3,3} = g_{3,5} = 0$. $P_3 : g_{3,5} = 60$; $g_{3,3} = g_{3,4} = 0$.

справедливость второго утверждения теоремы. Многогранник P_3 обладает притом следующим свойством: для каждого его ребра h' имеет место: $\sigma(h') = 8$, значит, граница 8 не может быть уже в общем случае понижена. Доказательство теоремы закончено.

Теорема 4. *В произвольном эйлеровском многограннике пятой степени найдется по меньшей мере 30 таких ребер, которые инцидентны с двумя треугольниками (тогда, очевидно, для каждого такого ребра h имеет место $\sigma(h) = 6$); значит, всегда имеет место $g_{3,3} \geqq 30$ и существует эйлеровский многогранник пятой степени, в котором $g_{3,3} = 30$.*

Доказательство. Согласно условию, $v_5 = v$; $v_k = 0$ для всех $k \neq 5$. Следовательно, $v = \frac{2}{5} g$. После подстановки этого в (2) и после преобразований получаем

$$s_3 = 20 + 2s_4 + 5s_5 + \ldots + (3k-10)\, s_k + \ldots \tag{6}$$

Но

$$s_3 = \frac{1}{3}(2g_{3,3} + g_{3,4} + g_{3,5} + \ldots + g_{3,k} + \ldots)$$

и для $k > 3$ имеет место:

$$(3k-10)\,s_k = \frac{1}{k}(3k-10)\,g_{3,k} + c_k \quad \text{где } c_k \geqq 0. \tag{7}$$

Из (6), (7) вытекает:

$$\frac{2}{3}\,g_{3,3} = 20 + \sum_{k=4}^{\infty}\left(\frac{3k-10}{k} - \frac{1}{3}\right)g_{3,k} + \sum_{k=4}^{\infty} c_k. \tag{8}$$

Но $\dfrac{3k-10}{k} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{8k-30}{3k} > 0$ для всех $k \geqq 4$; следовательно, $g_{3,3} \geqq 30$, что доказывает справедливость основного утверждения теоремы. Правильный двадцатигранник (рис. 4) является примером эйлеровского многогранника пятой степени, в котором $g_{3,3} = 30$. Доказательство теоремы закончено.

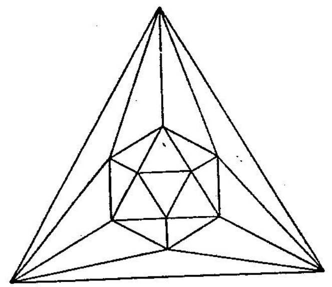


Рис. 4.

Перейдем теперь ко второй части наших рассуждений и наметим дальнейшие — некоторые, может быть, еще открытые — проблемы из теории эйлеровских многогранников.

Пусть P — произвольный эйлеровский многогранник, и пусть V — множество его вершин. Определим функцию $\Delta(v)$, где v — вершина из V, следующим образом: пусть $S_1, \dots, S_n$ — те грани многогранника P, которые инцидентны с вершиной v; значение функции $\Delta(v)$ определим так: $\Delta(v) = \gamma(S_1) + \gamma(S_2) + \dots + \gamma(S_n)$.

Возникает вопрос, не существует ли – подобно тому, как мы нашли для функции $\sigma(h)$ — некоторая граница M такая, что имеет место: во всяком эйлеровском многограннике существует хотя бы одна такая вершина, что $\Delta(v) \leqq M$. Мы покажем сразу же, что такой границы M для множества всех ейлеровских многогранников нельзя указать.

Теорема 5. *Для каждого натурального числа M можно построить такой эйлеровский многогранник P, что для каждой его вершины будет иметь место:*

$$\Delta(v) > M.$$

Доказательство. Пусть n — натуральное число больше 2 и больше $M - 8$. Пусть P — n-угольная призма. Произвольная вершина из P инцидентна с двумя четырехугольниками и одним n-угольником. Значит, для произвольной вершины v многогранника P имеет место $\Delta(v) = n + 8$, следовательно, $\Delta(v) > M$. Поэтому P является многогранником, удовлетворяющим требованию теоремы. Это и доказывает теорему.

Доказанная теорема 5 показывает, что граница рассматриваемых свойств для всего множества эйлеровских многогранников не существует. Поставим теперь вопрос, нельзя ли найти такую границу хотя бы для некоторого из широких классов эйлеровских многогранников, какими являются, например, классы эйлеровских многогранников третьей, четвертой, пятой степени, которые представляли предмет нашего исследования в первой части работы. И на этот вопрос уже частично дает ответ доказательство теоремы 5. А именно, ясно, что каждая n-угольная призма является эйлеровским многогранником третьей степени и, таким образом, даже для всего класса эйлеровских многогранников третьей степени искомой границы не существует. Покажем, однако, что такая граница может быть найдена для некоторого его подкласса, а именно, для подкласса тех эйлеровских многогранников третьей степени, которые играют весьма значительную роль при решении многих проблем (например, при решении известной проблемы четырех красок — см. об этом, напр., работу Эррера [3]). Имеются в виду эйлеровские многогранники третьей степени, не содержащие ни треугольника ни четырехугольника.

Теорема 6. *В каждом эйлеровском многограннике третьей степени, который не содержит ни треугольника ни четырехугольника, найдется такая вершина v, что имеет место:* $\Delta(v) \leqq 18$.

Доказательство. Согласно предположению, $s_3 = s_4 = 0$, и $v = v_3 = \frac{2}{3}g$.

После подстановки в (2) получим:

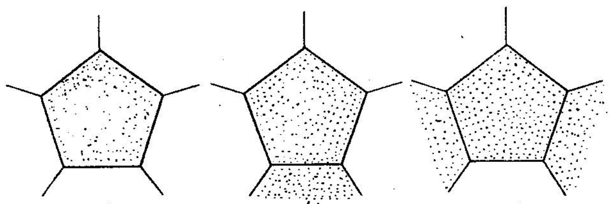
$$s_5 = 12 + s_7 + 2s_8 + \dots + (k-6)\,s_k + \dots \tag{9}$$

Предположим вопреки утверждению теоремы, что существует такой эйлеровский многогранник третьей степени P, который не содержит ни треугольника ни четырехугольника и в котором для каждой его вершины имеет место $\Delta(v) \geqq 19$.

Из уравнения (9) вытекает, что P содержит пятиугольники, а из принятого предположения следует, что в P не существует такой вершины, которая была бы инцидентна с тремя пятиугольниками. Ввиду сказанного могут поэтому в многограннике существовать только следующие три вида пятиугольников: а) пятиугольник, не граничащий ни с каким пятиугольником (рис. 5*a*); б) пятиугольник, граничащий с однпм и только с одним пятиугольником (рис. 5*b*). в) пятиугольник, граничащий с двумя пятиугольниками (рис. 5*c*).

Более чем с двумя пятиугольниками не может пятиугольник граничить (в противном случае нашлась бы такая вершина v, что имело бы место $\Delta(v) = 15$, что противоречит предположению).

Обозначим через p_0 (соответственно, через p_1 и p_2) число тех пятиугольников многогранника P, которые не граничат ни с каким пятиугольником (соответственно тех, которые граничат с одним пятиугольником и с двумя пятиугольниками).



a) б) c)

Рис. 5.

Очевидно, имеет место

$$p_0 + p_1 + p_2 = s_5 \qquad (10)$$

а также имеет место (см. рис. 5):

$$2g_{5,5} = p_1 + 2p_2. \qquad (11)$$

Учтем, что пятиугольник, не граничащий ни с каким пятиугольником, может граничить по большой мере с двумя шестиугольниками (если бы он граничил более чем с двумя, то в P существовала бы такая вершина v, что имело бы место $\Delta(v) = 5 + 6 + 6$, что противоречит предположению); пятиугольник, граничащий с одним пятиугольником, может граничить уже только с одним шестиугольником, а пятиугольник, граничащий с двумя пятиугольниками, не может уже граничить ни с каким шестиугольником. Следовательно, имеет место:

$$g_{5,6} \leqq 2p_0 + p_1. \qquad (12)$$

Однако,

$$2g_{5,5} + g_{5,6} + \ldots + g_{5,k} + \ldots = 5s_5, \qquad (13)$$

далее (см. [11], [12]):

$$2s_5 \geqq 2g_{5,5} + g_{5,6}. \qquad (14)$$

Откуда вытекает:

$$g_{5,7} + g_{5,8} + \ldots + g_{5,k} + \ldots \geqq 3s_5 = 36 + 3s_7 + 6s_8 + \ldots + 3(k-6)\,s_k + \ldots \qquad (15)$$

Из предположения $\Delta(v) \geqq 19$ следует также: произвольный семиугольник может граничить не более чем с тремя пятиугольниками, произвольный восьмиугольник может граничить не более чем с четырьмя пятиугольниками и для $k > 8$ справедливо: k-угольник может граничить не более чем с k пятиугольниками.

Итак, имеет место

$$\left.\begin{aligned} 3s_7 &\geqq g_{5,7}, \\ 4s_8 &\geqq g_{5,8}, \\ 9s_9 &\geqq g_{5,9}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ ks_k &\geqq g_{5,k}. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Если просуммировать отдельно левые стороны и отдельно правые стороны неравенств (15), (16) и сравнить суммы, то после преобразований получим:

$$0 \geqq 36 + 2s_8 + 2s_{10} + 4s_{11} + \ldots + (2k-18)\,s_k + \ldots \qquad (17)$$

Мы получили противоречие, так как числа s_i не могут быть отрицательными, а выражение $(2k - 18)$ для $k > 9$ положительно. Предположение о существовании такого эйлеровского многогранника третьей степени P, который не содержит ни треугольника ни четырехугольника и в котором для произвольной вершины w имеет место $\Delta(w) \geqq 19$, приводит к противоречию. Поэтому в каждом из рассматриваемых многогранников должна существовать хотя бы одна вершина, для которой $\Delta(v) \leqq 18$, что и требовалось доказать.

Открытой остается следующая проблема: из теоремы 6 еще не следует, что существует такой эйлеровский многогранник третьей степени без треугольника и без четырехугольника, в котором для произвольной его вершины имеет место: $\Delta(v) \geqq 18$. Ничего не известно о том, можно ли границу 18 обострить до 17. Дело в том, что известны эйлеровские многогранники третьей степени, не содержащие ни треугольника ни четырехугольника, в которых имеет место $\Delta(v) \geqq 17$ (примером такого многогранника может служить многогранник, изображенный на рис. 2.). Следовательно, ниже 17 нельзя указанную границу сдвинуть. Поэтому представляется интересной следующая задача: Построить минимальный (т. е. с минимальным числом вершин) эйлеровский многогранник третьей степени, не содержащий ни треугольника ни четырехугольника, в котором для произвольной вершины v имеет место $\Delta(v) \geqq 18$, или же доказать, что такой многогранник не может быть построен.

Мы доказали две теоремы о значениях функции $\Delta(v)$, определенной в множестве вершин эйлеровского многогранника третьей степени. Поставим вопрос, будут ли справедливыми аналогичные теоремы для функции $\Delta(v)$, которую мы определим в множестве вершин эйлеровского многогранника четвертой степени. На поставленный вопрос дает ответ следующая теорема:

Теорема 7. *Для каждого натурального числа M может быть построен такой эйлеровский многогранник четвертой степени, что для каждой его вершины справедливо: $\Delta(v) > M$.*

Доказательство. Пусть P — эйлеровский многогранник четвертой степени, который содержит два n-угольника ($n \geqq 3$) и $2n$ треугольников и вид которого для $n = 4, 5, 6, 7$ изображен на рис. 6. Произвольная вершина v этого многогранника инцидентна с n-угольником и с тремя треугольниками. Значит, очевидно имеет место $\Delta(v) = n + 9$. Подходящим выбором числа n можно

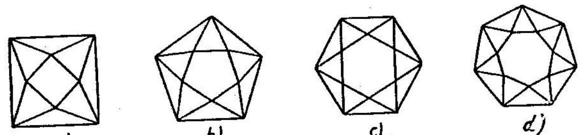


Рис. 6. a) $n = 4$; b) $n = 5$; c) $n = 6$; d) $n = 7$.

всегда добиться того, чтобы выполнялось $n + 9 > M$. Это и доказывает теорему.

Из уравнения (4), которое мы получили при доказательстве теоремы 3, ясно, что всякий эйлеровский многогранник четвертой степени содержит по меньшей мере 8 треугольников. Из этого вытекает, что множество эйлеровских многогранников четвертой степени без треугольников пусто. Значит, способ, который позволил для эйлеровских многогранников третьей степени к теореме 5 получить теорему 6, для эйлеровских многогранников четвертой степени теряет уже значение и смысл.

Для полноты следует еще сказать: Открытым остается вопрос о том, можно ли определить число M так, чтобы для каждого эйлеровского многогранника пятой степени P имело место: P содержит хотя бы одну такую вершину v, что $\Delta(v) \leqq M$ (здесь снова $\Delta(v) = \Sigma\gamma(S)$, где сумма берется по всем граням, инцидентным с вершиной v).

Предположение о том, что такое число M существует, вызывается тем фактом, что эйлеровские многогранники пятой степени содержат сравнительно очень много треугольников. Справедлива, например, такая теорема:

Теорема 8. *В каждом эйлеровском многограннике пятой степени найдется хотя бы одна такая вершина, которая инцидентна с более чем тремя треугольниками.*

Доказательство. Пусть P — эйлеровский многогранник пятой степени. Имеет место $v = v_5$; $5v = 2g$; $g = \frac{5}{2}v$. После подстановки в (2) получаем:

$$s = 2 + \frac{3}{2}v,$$

$$v = \frac{2s-4}{3}$$

Обозначим через w_i число тех вершин из P, которые инцидентны с i и только с i треугольниками.

Очевидно, имеет место:

$$\sum_{i=0}^{5} iw_i = 3s_3$$

(так как каждый треугольник имеет три вершины и он засчитан в данной сумме три раза)

$$\sum_{i=0}^{5} w_i = v.$$

Значит, среднее число треугольников, с которыми инцидентна вершина из P, будет

$$T = \frac{3s_3}{v} = \frac{9s_3}{2s-4} = \frac{9s_3}{-4 + 2(s_3 + s_4 + \ldots + s_k + \ldots)},$$

а значит [см. (6)]:

$$T = \frac{180 + 18s_4 + 45s_5 + \ldots + (27k - 90)s_k + \ldots}{36 + 6s_4 + 12s_5 + \ldots + (6k - 18)s_k + \ldots} =$$

$$= 3 + \frac{3[8 + s_5 + 2s_6 + \ldots + (k-4)s_k + \ldots]}{2[6 + s_4 + 2s_5 + \ldots + (k-3)s_k + \ldots]} > 3.$$

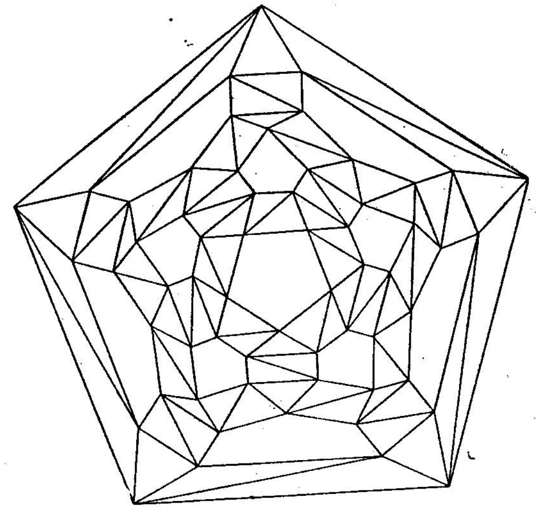


Рис. 7.

Итак, среднее T больше чем 3. Из этого сразу же вытекает, что по меньшей мере одна вершина из P инцидентна более чем с тремя треугольниками, что и требовалось доказать.

Существуют эйлеровские многогранники пятой степени, в которых каждая вершина инцидентна с четырьмя и только с четырьмя треугольниками. Такой многогранник изображен для примера на рис. 7. Этот пример одновременно говорит о том, что $M \geqq 17$. Эйлеровский многогранник пятой степени, в котором для каждой вершины имело бы место $\Delta(v) \geqq 18$, до сих пор не известен.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kotzig A., *Príspevok k teórii eulerovských polyédrov*, Matematicko-fyzikálny časopis V (1955), 101—113.
[2] Steinitz E., *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Berlin 1934.
[3] Errera A., *Du coloriage des cartes et de quelques questions d'Analysis Situs*, Thése, Bruxelles 1926.

Поступило 2. VII. 1962 г.

Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie vied v Bratislave

FROM THE THEORY OF EULER'S POLYHEDRONS

Anton Kotzig

Summary

Let P be an Euler's polyhedron, h — its edge, S_1, S_2 — its faces incident with the edge h. Denote by $\gamma(S_i)$ the number of the vertices incident with face S_i. On the set of the edges of the polyhedron P define the function $\sigma(h)$ thus: $\sigma(h) = \gamma(S_1) + \gamma(S_2)$. We shall speak that an Euler's polyh dron P is of n-th degree if each of its vertices is incident exactly with n edges (obviously, $n \in \{3, 4, 5\}$).

In the paper the following theorems concerning the values of the function $\sigma(h)$ are deduced:

Theorem 1. In any Euler's polyhedron of third degree an edge h exists so that $\sigma(h) \leqq 13$. An Euler's polyhedron exists so that $\sigma(h') \geqq 13$ for each of its edges h'.

Theorem 2. In any Euler's polyhedron of the third degree without triangles an edge h exists so that $\sigma(h) \leqq 11$. An Euler's polyhedron without triangles exists so that $\sigma(h') \geqq 11$ for each of its edges h'.

Denote by $g_{i,j}$ the number of the edges of the Euler's polyhedron, which are incident with an i-gon and with a j-gon.

Theorem 3. Let P be an Euler's polyhedron of fourth degree. Then $10g_{3,3} + 5g_{3,4} + 2g_{3,5} \geqq 120$ and, consequently, an edge h of P exists so that $\sigma(h) \leqq 8$. Both mentioned bounds, 120 and 8, cannot be improved.

Theorem 4. In any Euler's polyhedron of fifth degree at least 30 edges h exist such that $\sigma(h) = 6$.

Let v be a vertex of a polyhedron P and let $S_1, S_2, \ldots, S_n$ be faces of P incident with the vertex v. Define the function $\Delta(v)$ on the set of vertices of P thus:

$$\Delta(v) = \gamma(S_1) + \gamma(S_2) + \ldots + \gamma(S_n).$$

Following theorems concerning the function $\Delta(v)$ are deduced:

Theorem 5. To any positive integer M can be constructed an Euler's polyhedron P so that $\Delta(v) > M$ for each of its vertices v.

Theorem 6. In any Euler's polyhedron of third degree without triangles and quadrilaterals a vertex v exists for which $\Delta(v) \leqq 18$.

The author emphasizes the fact that it is not known whether the bound 18 in the theorem can be improved. It is known that this bound cannot be <17.

Theorem 7. To any positive integer M an Euler's polyhedron of fourth degree can be constructed such that for each of its vertices $\Delta(v) > M$.

Theorem 8. In any Euler's polyhedron of fifth degree at least one vertex exists which is incident with more than three triangles.