MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 13, 1-1963

O ÚPLNE MAXIMÁLNYCH PRVKOCH V POLOGRUPÁCH

IMRICH FABRICI, Bratislava

V práci [1] W. M. Faucett, R. J. Koch a K. Numakura študovali štruktúru pologrúp pomocou pojmu maximálneho prvku pologrupy. V tejto poznámke zavedieme pojem *úplne maximálneho prvku* pologrupy, a ukážeme, v akom vzťahu je k pojmu maximálneho prvku a ako súvisí so štruktúrou pologrupy.

Pripomeňme najskôr niektoré pojmy a známe tvrdenia, ktoré použijeme.

Prvok a pologrupy S sa nazýva maximálnym, ak $a \in SaS$ a ak platí: $a \in SbS \Rightarrow \Rightarrow b \in SaS$ pre každé $b \in S$.

Ak a je prvok pologrupy S, množinu $I_a = a \cup Sa \cup aS \cup SaS$ nazývame hlavným ideálom pologrupy S, vytvoreným prvkom a. Množinu všetkých prvkov vytvárajúcich ten istý hlavný ideál ako prvok a označujeme F_a a nazývame F-trieda.

Označme $K_a = I_a - F_a$. K_a je množina prvkov z I_a, ktoré nevytvárajú ideál I_a. Ako je známe z [4], K_a je ideál v S i v I_a. Podielová pologrupa I_a/K_a je buď jednoduchá pologrupa s nulou, ktorá sa rovná svojmu štvorcu, alebo $(I_a/K_a)^2 = 0$.

Pojem maximálneho vlastného ideálu používame v tom istom zmysle ako v [2]. Je to taký vlastný ideál, ktorý nie je obsiahnutý v žiadnom inom vlastnom ideáli. V prípade, že v pologrupe existuje jediný maximálny vlastný ideál, označíme ho M^*.

Definícia 1. *Nech S je pologrupa, $a \in S$. Budeme hovoriť, že prvok a je úplne maximálny, ak $SaS = S$.*

Lema 1. *Každý úplne maximálny prvok pologrupy S je maximálnym prvkom pologrupy S.*

Dôkaz. Nech a je úplne maximálny prvok pologrupy S. Potom platí $SaS = S$. Teda $a \in SaS$. Ak $a \in SbS$, pre nejaké $b \in S$, potom $b \in S = SaS$. A tak a je maximálny prvok.

Avšak nie každý maximálny prvok pologrupy S je úplne maximálny.

Príklad: Nech S je pologrupa pozostávajúca z troch prvkov, a to $\{a, b, c\}$. Násobenie je dané nasledujúcou tabuľkou:

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	c

Ľahko sa zistí, že prvky b, c sú maximálne, ale $SbS = \{a, b\} \neq S$, $ScS = \{a, c\} \neq S$, teda nie sú úplne maximálne.

Ukážeme, aká je štruktúra množiny všetkých úplne maximálnych prvkov pologrupy S.

Veta 1. *Nech S je pologrupa, ktorá nie je jednoduchá. Nech S obsahuje aspoň jeden úplne maximálny prvok. Potom existuje jediný maximálny vlastný ideál v S a množina úplne maximálnych prvkov je komplementom tohto ideálu.*

Dôkaz. Nech P je množina všetkých úplne maximálnych prvkov pologrupy S. Nech a je ľubovoľný prvok z P, t. j. $SaS = S$. Odtiaľ vyplýva, že všetky úplne maximálne prvky patria do tej istej F-triedy F_a, t. j. $P \subset F_a$. Aby sme dokázali, že $P = F_a$, stačí dokázať, že $F_a \subset P$. Pripusťme, že to nie je pravda. Existuje teda prvok b, pre ktorý $b \in F_a$ a $b \notin P$. Keďže $b \in F_a$, musí byť $I_a = I_b$. Ale to znamená, že $b \cup Sb \cup bS \cup SbS = SaS = S$. Keďže však $b \notin P$, $SbS \neq S$. Z rovnosti $b \cup Sb \cup bS \cup SbS = S$ vyplýva, že $a \in b \cup Sb \cup bS \cup SbS$. Z toho odvodíme spor. Pretože nemôže byť $a = b$, musí byť $a \in Sb$, alebo $a \in bS$, alebo $a \in SbS$.

Ak by bolo $a \in Sb$, dostali by sme vzťah, $aS \subset SbS$ a teda $SaS \subset S^2bS \subset SbS \neq S$, čo však nemôže byť, lebo $SaS = S$. Podobne ukážeme, že nemôže byť $a \in bS$. Zostáva možnosť, že $a \in SbS$. Odtiaľ však vyplýva, že $Sa \subset S^2bS \subset SbS$ a teda $SaS \subset SbS^2 \subset SbS \neq S$, čo je zasa spor. Tým sme dostali, že $P = F_a$.

Pologrupu S môžeme písať v tvare $S = F_a \cup K_a = P \cup M^*$, kde $M^* = K_a$ je maximálny vlastný ideál v S. Treba ešte dokázať, že iný maximálny vlastný ideál neexistuje.

Keby existoval ešte nejaký iný maximálny vlastný ideál M, $M \neq M^*$, muselo by byť $M \cap P \neq 0$. Ale v tom prípade by bolo $SMS = S$ (lebo v M existuje aspoň jeden úplne maximálny prvok), čo by bol spor s tým, že M je maximálny vlastný ideál.

Z uvedenej vety bezprostredne vyplýva

Veta 2. *Ak pologrupa S má viac ako jeden maximálny vlastný ideál, nemôže mať žiadny úplne maximálny prvok.*

V prípade, že pologrupa S má maximálny vlastný ideál M^*, vo všeobecnosti ešte komplement nemusí obsahovať úplne maximálne prvky.

Príklad. Nech $S = \{a, b\}$. Násobenie je dané tabuľkou:

	a	b
a	b	b
b	b	b

Je zrejmé, že jediným maximálnym vlastným ideálom pologrupy S je $M^* = \{b\}$.

Ale $SaS = \{b\} \neq S$.

Ale platí nasledujúca

Veta 3. *Nech S je pologrupa. Nech S obsahuje jediný maximálny ideál M^*. Ak $S - M^*$ obsahuje viac ako jeden prvok, potom $S - M^*$ je množinou všetkých úplne maximálnych prvkov.*

Dôkaz. Pretože M^* je maximálny vlastný ideál, podľa [1] je S/M^* jednoduchá pologrupa s nulou. Ale podľa [3] (lema 2.11) T je jednoduchá pologrupa vtedy a len vtedy, ak pre každé nenulové t platí: $TtT = T$. Tým je dôkaz urobený.

LITERATÚRA

[1] Faucett W. M., Koch R. J., Numakura K., *Complements of maximal ideals in compact semigroups*, Duke Math. J. *22* (1955), 655—661.

[2] Schwarz Š., *О максимальных идеалах в теории полугрупп* I, Чехосл. Мат. Ж. *3 (78)* (1953), 139—153.

[3] Rees D., *On semigroups*, Prcc. of the Cambridge Philosophical Society *36* (1940), 387—400.

[4] Green J. A., *On the structure of semigroups*, Annals of Math. *54* (1951), 163—172.

Došlo 29. 3. 1962.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Elektrotechnickej fakulty Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

О ВПОЛНЕ МАКСИМАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ В ПОЛУГРУППАХ

Имрих Фабрици

Резюме

Пусть S полугруппа, и $a \in S$. Будем говорить, что элемент $a \in S$ вполне максимальный, если $SaS = S$. Двусторонний идеал мы назовем максимальным собственным идеалом, если он не содержится в никаком другом собственном идеале.

Доказываются следующие теоремы:

1. Пусть S полугруппа, которая не является простой. Пусть S содержит хотя бы один вполне максимальный элемент. Тогда существует один максимальный собственный идеал M^* в S а $S - M^*$ является множеством всех вполне максимальных элементов из S.

2. Наоборот: Если S содержит только один максимальный собственный идеал M^* и $S - M^*$ содержит более одного элемента, то $S - M^*$ является множеством всех вполне максимальных элементов из S.

3. Если полугруппа S содержит более одного максимального собственного идеала, то она не имеет никакого вполне максимального элемента.

ON TOTALLY MAXIMAL ELEMENTS IN SEMIGROUPS

Imrich Fabrici

Summary

Let S be a semigroup, $a \in S$. We say that a is totally maximal, if $SaS = S$. A two-sided ideal is said to be maximal, if it is not equal to the whole semigroup S and it is not properly contained in any other two-sided ideal of S.

The following theorems are proved:

1. Let S be a semigroup, which is not a simple semigroup. Suppose that S contains at least one totally maximal element. Then there exists a unique maximal proper ideal M^* of S and $S - M^*$ is the set of all totally maximal elements of S.

2. Conversely: If S contains a unique maximal proper ideal M^* and $S - M^*$ contains more than one element, then $S - M^*$ is a set of all totally maximal elements of S.

3. If S contains more than one maximal proper ideal, then there does not exist a totally maximal element in S.