MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, XII, 4, 1962

O KONGRUENCI W S FOKÁLNÍMI PLOCHAMI PŘÍMKOVÝMI

JOSEF VALA, Brno

Práce se zabývá některými vlastnostmi C. Segreho kongruence W s fokálními plochami přímkovými. Zejména jsou studovány Riccatiho soustavy čar na fokálních plochách této kongruence.

a) Přímková plocha Φ nechť leží v projektivním trojrozměrném prostoru P_3 a je dána rovnicí:

$$x = y(u) + vz(u), \tag{1}$$

souřadnice řídicích čar y, z vyhovují pak diferenciálním rovnicím

$$\begin{aligned} y'' &= \alpha_{11}y + \alpha_{12}z + \beta_{11}y' + \beta_{12}z', \\ z'' &= \alpha_{21}y + \alpha_{22}z + \beta_{21}y' + \beta_{22}z', \end{aligned} \tag{2}$$

kde čárky znamenají derivace podle parametru u.

Zavedeme-li označení

$$\alpha = \alpha_{12} + (\alpha_{22} - \alpha_{11})\,v - \alpha_{21}v^2, \tag{3a}$$

$$\beta = \beta_{12} + (\beta_{22} - \beta_{11})\,v - \beta_{21}v^2, \tag{3b}$$

pak rovnice asymptotických čar plochy Φ se dá napsat ve tvaru

$$v' + \frac{1}{2}\beta = 0, \tag{4}$$

rovnice fleknodálních čar

$$\alpha - \frac{1}{2}\beta' + \frac{1}{4}\beta(\beta_{11} + \beta_{22}) = 0. \tag{5}$$

Riccatiho soustava čar na přímkové ploše Φ je soustava čar daná Riccatiho diferenciální rovnicí

$$v' + m_0 + m_1v + m_2v^2 = 0, \tag{6}$$

kde
$$m_0 = m_0(u), \quad m_1 = m_1(u), \quad m_2 = m_2(u).$$

Mezi tyto soustavy náleží také soustava čar

$$v' = 0\ [m_0 = m_1 = m_2 = 0]. \tag{7}$$

Budeme ji nazývat soustavou R na ploše Φ.

Tečny k čarám Riccatiho soustavy na ploše Φ podél její tvořicí přímky p tvoří regulus Γ_1 plochy druhého stupně Ψ. Plochy Ψ podél dvou soumezných přímek plochy Φ se protínají v přímce a kubické čáře k (Mayer [3]).

Přímky regulu Γ_1 jsou unisekantami čáry k. Každá tvořicí přímka druhého regulu Γ_2 plochy Ψ protíná čáru k ve dvojici bodů. Tyto dvojice lze vždy příslušnými přímkami regulu Γ_1 promítnouti na přímku p, kde jejich průsečíky tvoří páry involuce. Samodružné body nazývá M. Barner [1] zrcadlovými body přímky p vzhledem k soustavě (6). Nutná a postačující podmínka pro to, aby fleknodální body přímky p oddělovaly harmonicky její zrcadlové body vzhledem k soustavě R, je lineární závislost forem

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0, \qquad \beta' = 0,$$

kde $\beta' = 0$ značí formu β s koeficienty derivovanými podle parametru u.

b) Riccatiho soustava čar na ploše Φ se nazývá *axiální*, jestliže příslušné kubiky k se rozpadají vždy ve tři přímky. Přímky soustavy Γ_1 ploch Ψ tvoří pak C. Segreho kongruenci W s fokálními plochami přímkovými Φ a $\bar{\Phi}$.

Ve všech dalších úvahách budeme předpokládat, že rovnice plochy Φ je ve tvaru (1) a čáry $v = konst.$ na této ploše tvoří *axiální* soustavu R.

Nutná a postačující podmínka, aby soustava R byla axiální, je

$$\alpha_{12} = \varrho\beta_{12}, \quad \alpha_{22} - \alpha_{11} = \varrho(\beta_{22} - \beta_{11}), \quad \alpha_{21} = \varrho\beta_{21}, \quad \varrho = \varrho(u). \tag{8}$$

Pak (Barner [1], str. 67) lze zvoliti parametr u a normalisaci rovnice plochy Φ tak, že platí:

$$\alpha_{12} = \alpha_{22} - \alpha_{11} = \alpha_{21} = 0, \qquad \beta_{11} + \beta_{22} = 0, \tag{9}$$

a rovnice (2) mají pak tvar

$$\begin{aligned} y'' &= \alpha_{11}y + \beta_{11}y' + \beta_{12}z', \\ z'' &= \alpha_{22}z + \beta_{21}y' + \beta_{22}z'. \end{aligned} \tag{10}$$

V dalším budeme vždy předpokládat, že diferenciální rovnice řídicích čar plochy Φ jsou ve tvaru (10) a platí relace (9).

Uveďme některé věty z citovaného pojednání M. Barnera:

Čáry soustavy R náležejí jedinému lineárnímu komplexu, platí-li

$$\alpha_{11} + \alpha_{22} = \text{konst.}$$

Jestliže jedna čára soustavy R je rovinná a není přímkou, pak všechny čáry soustavy R jsou rovinné a platí $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$.

Jestliže čára soustavy R je současně asymptotikou plochy Φ, pak je přímkou.

c) Fokálními plochami kongruence přímek soustavy Γ_1 ploch Ψ příslušných k soustavě R jsou v uvažovaném vyjádření plocha Φ a plocha $\bar{\Phi}$ určená dvojicí řídicích čar $\bar{y} = y'$, $\bar{z} = z'$.

Diferenciální rovnice řídicích čar $\bar{y}$, $\bar{z}$ uvažujme ve tvaru

$$\begin{aligned} \bar{y}'' &= \bar{\alpha}_{11}\bar{y} + \bar{\alpha}_{12}\bar{z} + \bar{\beta}_{11}\bar{y}' + \bar{\beta}_{12}\bar{z}', \\ \bar{z}'' &= \bar{\alpha}_{21}\bar{y} + \bar{\alpha}_{22}\bar{z} + \bar{\beta}_{21}\bar{y}' + \bar{\beta}_{22}\bar{z}'. \end{aligned} \tag{11}$$

Dosadíme-li v rovnicích (11) za $\bar{y} = y'$, $\bar{z} = z'$ a za $\bar{y}' = y''$, $\bar{z}' = z''$ podle (2), snadno dostaneme

$$\begin{aligned} & y(\alpha'_{11} + \alpha_{11}\beta_{11}) + z(\alpha_{22}\beta_{12}) + y'(\alpha_{11} + \beta_{11}^2 + \beta'_{11} + \beta_{12}\beta_{21}) + \\ & \quad + z'(\beta_{11}\beta_{12} + \beta_{12}\beta_{22} + \beta'_{12}) = y(\bar{\beta}_{11}\alpha_{11}) + z(\bar{\beta}_{12}\alpha_{22}) + \\ & \quad + y'(\bar{\alpha}_{11} + \bar{\beta}_{11}\beta_{11} + \bar{\beta}_{12}\beta_{21}) + z'(\bar{\alpha}_{12} + \bar{\beta}_{11}\beta_{12} + \bar{\beta}_{12}\beta_{22}), \\ & y(\beta_{21}\alpha_{11}) + z(\alpha'_{22} + \alpha_{22}\beta_{22}) + y'(\beta_{21}\beta_{11} + \beta'_{21} + \beta_{21}\beta_{22}) + \\ & \quad + z'(\alpha_{22} + \beta_{21}\beta_{12} + \beta_{22}^2 + \beta'_{22}) = y(\bar{\beta}_{21}\alpha_{11}) + z(\bar{\beta}_{22}\alpha_{22}) + \\ & \quad + y'(\bar{\alpha}_{21} + \bar{\beta}_{21}\beta_{11} + \bar{\beta}_{22}\beta_{21}) + z'(\bar{\alpha}_{22} + \bar{\beta}_{21}\beta_{12} + \bar{\beta}_{22}\beta_{22}). \end{aligned} \tag{12}$$

Porovnáním koeficientů u y, z, y', z' v rovnicích (12) vychází pro koeficienty diferenciálních rovnic (11):

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_{11} &= \alpha_{11} + \beta'_{11} - \beta_{11}\frac{\alpha'_{11}}{\alpha_{11}}, & \bar{\alpha}_{21} &= \beta'_{21} - \frac{\alpha'_{22}}{\alpha_{22}}\beta_{21}, \\ \bar{\alpha}_{12} &= \beta'_{12} - \frac{\alpha'_{11}}{\alpha_{11}}\beta_{12}, & \bar{\alpha}_{22} &= \alpha_{22} + \beta'_{22} - \frac{\alpha'_{22}}{\alpha_{22}}\beta_{22}, \\ \bar{\beta}_{11} &= \frac{\alpha'_{11}}{\alpha_{11}} + \beta_{11}, & \bar{\beta}_{21} &= \beta_{21}, \\ \bar{\beta}_{12} &= \beta_{12}, & \bar{\beta}_{22} &= \frac{\alpha'_{22}}{\alpha_{22}} + \beta_{22}. \end{aligned} \tag{13}$$

Při odvození rovnic (13) se předpokládalo $\alpha_{11} = \alpha_{22} \neq 0$. Platí-li $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0$, pak plocha $\bar{\Phi}$ je rozvinutelnou, čáry soustavy R na Φ jsou podle b) rovinné. Tento případ vylučujeme z dalších úvah.

d) Korespondence H mezi body plochy Φ a $\bar{\Phi}$ je taková bodová korespondence obou ploch, že odpovídající si body leží na jediné tvořicí přímce kongruence Γ_1 příslušné k soustavě R na ploše Φ.

Podle (4) a (13) je zřejmé, že asymptotikám plochy Φ odpovídají v korespondenci H asymptotiky plochy $\bar{\Phi}$. Soustavě R na Φ bude odpovídat na ploše $\bar{\Phi}$ Riccatiho soustava čar, kterou označujeme $\bar{R}$.

Věta 1. *Soustava $\bar{R}$ je axiální tehdy a jen tehdy, náleží-li plocha Φ lineární kongruenci a její osy jsou čarami soustavy R.*

Důkaz: Podmínky axiality (8) pro soustavu R dostaneme podle (13) ve tvaru:

$$\beta'_{12} - \frac{\alpha'_{11}}{\alpha_{11}}\beta_{12} = \varrho(u)\,\beta_{12},$$
$$\beta'_{22} - \beta'_{11} - \frac{\alpha'_{11}}{\alpha_{11}}(\beta_{22} - \beta_{11}) = \varrho(u)\,(\beta_{22} - \beta_{11}),$$
$$-\beta_{21} + \frac{\alpha'_{11}}{\alpha_{11}}\beta_{21} = -\varrho(u)\,\beta_{21}$$

a odtud pak vychází

$$\beta_{12} = c_1 M(u), \quad \beta_{22} - \beta_{11} = c_2 M(u), \quad -\beta_{21} = c_3 M(u),$$

kde $c_1, c_2, c_3 = konst.$,

$$M(u) = \exp\left(\int\left[\varrho(u) + \frac{\alpha'_{11}}{\alpha_{11}}\right]\mathrm{d}u\right).$$

Rovnice asymptotik plochy Φ jsou pak podle (4)

$$v' + \frac{1}{2}M(u)\left[c_1 + c_2 v + c_3 v^2\right] = 0. \tag{14}$$

Čáry $v = v_1$, $v = v_2$, kde v_1, v_2 jsou kořeny rovnice

$$c_1 + c_2 v + c_3 v^2 = 0,$$

náležejí soustavě (14) i soustavě R, jsou tedy podle odst. b) přímkami.

Jestliže obráceně plocha Φ náleží lineární kongruenci o osách m, m', které náležejí soustavě R, pak plocha $\bar{\Phi}$ náleží téže kongruenci a přímky m, m' náležejí soustavě $\bar{R}$. Kvadratické plochy $\bar{\Psi}$, jejichž tvořicí přímky $\bar{\Gamma}_1$ se dotýkají čar soustavy $\bar{R}$ podél tvořicí přímky $\bar{p}$ plochy $\bar{\Phi}$, obsahují všechny čáry m, m'. Tedy charakteristiky ploch $\bar{\Psi}$ se nutně rozpadají ve čtyři přímky, soustava $\bar{R}$ a podobně i R je axiální.

V dalším předpokládejme, že soustava $\bar{R}$ na ploše $\bar{\Phi}$ není soustavou axiální.

Věta 2. *Fleknodální čáry plochy $\bar{\Phi}$ oddělují harmonicky zrcadlové čáry soustavy $\bar{R}$.*

Důkaz: Podle odst. a) a z rovnice (13) je involuce, jejíž samodružné body jsou zrcadlové body příslušné soustavě $\bar{R}$ na ploše $\bar{\Phi}$ určeny kořeny forem

$$\beta' - \frac{\alpha'_{11}}{\alpha_{11}}\beta = 0, \qquad \beta = 0, \tag{15}$$

rovnice fleknodálních čar plochy $\bar{\Phi}$ získáme podle (5) a (13) ve tvaru

$$\frac{1}{2}\beta' - \frac{1}{2}\frac{\alpha'_{11}}{\alpha_{11}}\beta = 0. \tag{16}$$

Z rovnic (16) a (15) vychází ihned hledaný výsledek.

e) Kvadratické plochy Ψ náležející soustavě R na ploše Φ určují korespondenci **P** tvořicích přímek ploch Φ a $\bar{\Phi}$ – odpovídající si přímky leží na jediné ploše Ψ.

Věta 3. *Korespondence **P** je projektivní deformací druhého řádu. Existuje jediná oskulační kolineace K prostoru P_3 pro niž je*

$$Ky = Hy = y', \qquad Kz = Hz = z'.$$

Nutně pak platí:

$$K(y, z) = (\bar{y}, \bar{z}) = (y', z'),$$
$$K\,\mathrm{d}(y, z) = \mathrm{d}(\bar{y}, \bar{z}) + N(\bar{y}, \bar{z}),$$
$$K\,\mathrm{d}^2(y, z) = \mathrm{d}^2(\bar{y}, \bar{z}) + 2N\,\mathrm{d}(\bar{y}, \bar{z}) + M(\bar{y}, \bar{z}). \tag{17}$$

Důkaz: Uvažujme kolineaci K'

$$K'y = \bar{y}, \qquad K'z = \bar{z},$$
$$K'y' = a_{11}\bar{y} + a_{12}\bar{z} + b_{11}\bar{y}' + b_{12}\bar{z}',$$
$$K'z' = a_{21}\bar{y} + a_{22}\bar{z} + b_{21}\bar{y}' + b_{22}\bar{z}', \tag{18}$$

kde a_{ik}, b_{ik} $(i, k = 1, 2)$ jsou funkcemi parametru u.

Hledejme, zda je možno zvolit koeficienty a_{ik}, b_{ik} tak, že jsou splněny relace (17).

Po snadném výpočtu dostaneme podle (18)

$$K'\,\mathrm{d}(y, z) = \{(\bar{y}, \bar{z})[a_{11} + a_{22}] + [(\bar{y}, \bar{y}')\,b_{21} + (\bar{y}, \bar{z}')\,b_{22} + (\bar{z}, \bar{y}')[-b_{11}] + (\bar{z}, \bar{z}')[-b_{12}]\}\,\mathrm{d}u, \tag{19}$$

$$\mathrm{d}(\bar{y}, \bar{z}) + N(\bar{y}, \bar{z}) = N(\bar{y}, \bar{z}) + \{(\bar{y}, \bar{z}') - (\bar{z}, \bar{y}')\}\,\mathrm{d}u. \tag{20}$$

Porovnáme-li koeficienty na pravých stranách relací (19) a (20), dostaneme

$$(a_{11} + a_{22})\,\mathrm{d}u = N, \qquad b_{21} = b_{12} = 0, \qquad b_{11} = b_{22} = 1. \tag{21}$$

Podobně získáme, použijeme-li relací (21) a (13):

$$\begin{aligned} K'\,\mathrm{d}^2(y, z) = \{(\bar{y}, \bar{z})\,[\alpha_{11} + \alpha_{22} + a_{12}\beta_{21} + a_{22}\beta_{22} + a_{11}\beta_{11} + \\ + a_{21}\beta_{12} + 2a_{11}a_{22} - 2a_{12}a_{21}] + (\bar{y}, \bar{y}')\,[\beta_{21} - 2a_{21}] + \\ + (\bar{y}, \bar{z}')\,[\beta_{22} + 2a_{11}] + (\bar{z}, \bar{y}')\,[-\beta_{11} - 2a_{22}] + \\ + (\bar{z}, \bar{z}')\,[-\beta_{12} + 2a_{12}] + 2(\bar{y}', \bar{z}')\}\,\mathrm{d}u^2, \end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}^2(\bar{y}, \bar{z}) + 2N\,\mathrm{d}(\bar{y}, \bar{z}) + M(\bar{y}, \bar{z}) = \\ &= (\bar{y}, \bar{z})\left\{\left[\alpha_{11} + \alpha_{22} + \beta'_{11} + \beta'_{22} - \beta_{11}\frac{\alpha'_{11}}{\alpha_{11}} - \beta_{22}\frac{\alpha'_{22}}{\alpha_{22}}\right]\mathrm{d}u^2 + M\right\} + \\ &+ \left\{(\bar{y}, \bar{y}')\,\beta_{21} + (\bar{y}, \bar{z}')\left[\frac{\alpha'_{22}}{\alpha_{22}} + \beta_{22} + 2(a_{11} + a_{22})\right] + \right. \\ &\left. + (\bar{z}, \bar{y}')\left[-\frac{\alpha'_{11}}{\alpha_{11}} - \beta_{11} - 2(a_{11} + a_{22})\right] + (\bar{z}, \bar{z}')[-\beta_{12}] + 2(\bar{y}', \bar{z}')\right\}\mathrm{d}u^2. \end{aligned} \tag{23}$$

Porovnáním pravých stran rovnic (22) a (23) pak vychází:

$$a_{11} = -\frac{1}{2}\frac{\alpha'_{11}}{\alpha_{11}}, \qquad a_{22} = -\frac{1}{2}\frac{\alpha'_{22}}{\alpha_{22}},$$
$$a_{21} = a_{12} = 0, \qquad M = 2a_{11}a_{22}\,du^2. \tag{24}$$

Relacemi (21) a (24) jsou koeficienty v rovnicích (18) jednoznačně určeny, kolineace K' je v tomto případě tedy kolineací K.

Jestliže soustava R náleží jedinému lineárnímu komplexu, pak kolineace K má zvláště jednoduchý tvar

$$Ky = \bar{y}, \qquad Kz = \bar{z}, \qquad Ky' = \bar{y}', \qquad Kz' = \bar{z}'.$$

Věta 4. *Korespondence* **P** *je projektivní deformací 3. řádu, vyhovují-li souřadnice řídicích čar plochy Φ diferenciálním rovnicím:*

$$y'' = \frac{k}{(u+c)^2}\,y + \frac{c_{11}}{(u+c)}\,y' + \frac{c_{12}}{(u+c)}\,z',$$
$$z'' = \frac{k}{(u+c)^2}\,z + \frac{c_{21}}{(u+c)}\,y' + \frac{c_{22}}{(u+c)}\,z', \tag{25}$$
$$c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}, k = konst., \qquad c_{11} + c_{22} = 0.$$

Styk třetího řádu je realisován kolineací

$$Ky = Hy = \bar{y} = y', \qquad Kz = Hz = \bar{z} = z', \tag{26}$$
$$Ky' = -\frac{1}{2}\frac{\alpha'_{11}}{\alpha_{11}}\,\bar{y} + \bar{y}', \qquad Kz' = -\frac{1}{2}\frac{\alpha'_{22}}{\alpha_{22}}\,\bar{z} + \bar{z}'.$$

Soustava R na ploše Φ náleží pak lineární kongruenci, jejíž osy rovněž náležejí soustavě R. Všechny čáry soustavy R jsou čarami W.

Důkaz: Korespondence **P** je projektivní deformací třetího řádu, platí-li pro kolineaci K mimo relace (17) ještě

$$K\,d^3(y, z) = d^3(\bar{y}, \bar{z}) + 3N\,d^2(\bar{y}, \bar{z}) + 3M\,d(\bar{y}, \bar{z}) + R(\bar{y}, \bar{z}). \tag{27}$$

Použijeme-li rovnic (13), (19), (20), (22), (23), dostaneme po delším výpočtu

$$Kd^3(y, z) = \{(\bar{y}, \bar{z})[\ldots] + (\bar{y}, \bar{y}')[\beta'_{21}] + (\bar{y}, \bar{z}')[\alpha_{11} + \alpha_{22} + \beta_{22}^2 + \beta'_{22} + \beta_{12}\beta_{21} + 2\alpha_{11}] + (\bar{z}, \bar{y}')[-\alpha_{11} - \alpha_{22} - \beta_{11}^2 - \beta'_{11} - \beta_{12}\beta_{21} - 2\alpha_{22}] + (\bar{z}, \bar{z}')[-\beta'_{12}]\}\,du^3, \tag{28}$$

$$d^3(\bar{y}, \bar{z}) + 3N\,d^2(\bar{y}, \bar{z}) + 3M\,d(\bar{y}, \bar{z}) + R(\bar{y}, \bar{z}) = \{(\bar{y}, \bar{z})[\ldots] + (\bar{y}, \bar{y}')[-\beta'_{21} + \beta_{21}A] + (\bar{y}, \bar{z}')\Big[\alpha_{11} + \alpha_{22} + \beta_{22}^2 + \beta'_{22} + \beta_{12}\beta_{21} + 2\alpha_{11} + 2\beta'_{11} - A\beta_{11} - \frac{1}{2}A^2 + A'\Big] + (\bar{z}, \bar{y}')\Big[-\alpha_{11} - \alpha_{22} - \beta_{11}^2 - \beta'_{11} - \beta_{12}\beta_{21} - 2\alpha_{22} - 2\beta'_{22} + A\beta_{22} + \frac{1}{2}A^2 - A'\Big] + (\bar{z}, \bar{z}')[\beta'_{12} - \beta_{12}A]\Big\}\,du^3, \tag{29}$$

$$A = \frac{\alpha'_{11}}{\alpha_{11}} = \frac{\alpha'_{22}}{\alpha_{22}},$$

kde koeficienty u $(\bar{y}, \bar{z})$ nás nezajímají.

Jestliže pravé strany rovnic (28), (29) se rovnají, nutně musí platit:

$$A\beta_{21} - 2\beta'_{21} = 0,$$
$$-A\beta_{12} + 2\beta'_{12} = 0,$$
$$A\beta_{22} + \frac{1}{2}A^2 - A' - 2\beta'_{22} = 0, \tag{30}$$
$$-A\beta_{11} - \frac{1}{2}A^2 + A' + 2\beta'_{11} = 0.$$

Relace (30) lze upravit na tvar:

$$A\beta_{21} - 2\beta'_{21} = 0,$$
$$-A(\beta_{22} - \beta_{11}) + 2(\beta_{22} - \beta_{11})' = 0, \tag{31}$$
$$-A\beta_{12} + 2\beta'_{12} = 0,$$

$$A^2 - 2A' = 0. \tag{32}$$

Z rovnic (32) vychází

$$\alpha_{11} = k\frac{1}{(u+c)^2} = \alpha_{22}, \qquad k = konst., \qquad c = konst.$$

a z rovnic (31)

$$\beta_{21} = \frac{c_{21}}{(u+c)}, \qquad \beta_{12} = \frac{c_{12}}{(u+c)}, \qquad \beta_{11} = \frac{c_{11}}{(u+c)},$$
$$\beta_{22} = \frac{c_{22}}{(u+c)}, \qquad c_{11} + c_{22} = 0; \qquad c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} = konst.$$

Diferenciální rovnice řídicích čar plochy Φ jsou tedy (25).

V rovnicích (25) proveďme transformaci parametru u

$$\frac{1}{(u+c)} = e^{\omega}. \tag{33}$$

Potom obdržíme:

$$y(u) = \hat{y}(\omega), \quad y' = \hat{y}_\omega \frac{d\omega}{du} = -\hat{y}_\omega e^\omega, \quad y'' = \hat{y}_{\omega\omega} e^{2\omega} + \hat{y}_\omega e^{2\omega},$$
$$z(u) = \hat{z}(\omega), \quad z' = \hat{z}_\omega \frac{d\omega}{du} = -\hat{z}_\omega e^\omega, \quad z'' = \hat{z}_{\omega\omega} e^{2\omega} + \hat{z}_\omega e^{2\omega}.$$

Transformace (33) zachovává soustavu čar R, rovnice řídicích čar plochy Φ jsou potom

$$\hat{y}_{\omega\omega} = k\hat{y} - (c_{11} + 1)\,\hat{y}_\omega - c_{12}\hat{z}_\omega,$$
$$\hat{z}_{\omega\omega} = k\hat{z} - c_{21}\hat{y}_\omega - (c_{22} + 1)\,\hat{z}_\omega. \tag{34}$$

Poněvadž koeficienty v diferenciální rovnici (34) jsou konstanty, lze postupným derivováním a úpravou vypočíst $\hat{y}_{\omega\omega\omega}$ jako lineární kombinaci $\hat{y}, \hat{y}_\omega, \hat{y}_{\omega\omega}, \hat{y}_{\omega\omega\omega}$ s konstantními koeficienty, čára y je tedy čarou W. Podobně čára z. Uvažujme libovolnou čáru soustavy R plochy Φ: $y + v_0 z$, $v_0 = konst.$ a proveďme transformaci řídicích čar plochy $y^* = y + v_0 z$, $z^* = z$. Pak dif. rovnice řídicích čar y^*, z^* plochy Φ mají podle (25) tento tvar:

$$y^{*\prime\prime} = \frac{k}{(u+c)^2}\, y^* + \frac{v_0 c_{21} + c_{11}}{(u+c)}\, y^* + \frac{-v_0^2 c_{21} + v_0(c_{22} - c_{11}) + c_{12}}{(u+c)}\, z^{*\prime},$$
$$z^{*\prime\prime} = \frac{k}{(u+c)^2}\, z^* + \frac{c_{21}}{(u+c)}\, y^{*\prime} + \frac{-v_0 c_{21} + c_{22}}{(u+c)}\, z^{*\prime}. \tag{35}$$

Odtud je zřejmé, že čára $y + v_0 z$ je také čarou W, ať v_0 má jakoukoliv konstantní hodnotu.

Rovnice asymptotik plochy Φ je podle (4) a (25)

$$v' + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(u+c)} \left[c_{12} + (c_{22} - c_{11})\, v - c_{21} v^2\right] = 0.$$

Z této rovnice a z důkazu věty 1 je zřejmé, že plocha Φ náleží lineární kongruenci a její osy jsou čarami soustavy R.

Zbývá ještě vyšetřit případ, že v rovnicích (30) platí $A = 0$, soustava R náleží tedy jedinému lineárnímu komplexu. Rovnice (30) mají pak tento tvar:

$$\beta'_{12} = \beta'_{11} = \beta'_{22} = \beta'_{21} = 0. \tag{36}$$

Jestliže platí relace (36), pak plocha Φ je kvadrikou, (y, z), $d(y, z)$, $d^2(y, z)$, $d^3(y, z)$ jsou lineárně závislé, jak vychází snadným výpočtem. Rovněž $(\bar{y}, \bar{z})$, $d(\bar{y}, \bar{z})$, $d^2(\bar{y}, \bar{z})$, $d^3(\bar{y}, \bar{z})$ jsou lineárně závislé, tedy i plocha $\bar{\Phi}$ je kvadrikou.

Pracováno v semináři dif. geometrie prof. dr. J. Klapky.

LITERATURA

[1] Barner M., *Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen* Math. Zeitschrift, Bd. 62 (1955), 50—93.
[2] Fubini G.—Čech E., *Geometria proiettiva differenziale*, Bologna 1926.
[3] Mayer O., *Étude sur les surfaces réglées*, Buletinul façultatii de ştiinţe din Cernăuti, vol. II (1928), 1—33.

Došlo 10. 5. 1962.

Katedra matematiky a deskr. geometrie
Vysokého učení technického v Brně

О КОНГРУЭНЦИИ W С ЛИНЕЙЧАТЫМИ ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Иосеф Вала

Резюме

Системы Рикати (Riccati) линий на линейчатой неразвертывающейся поверхности Φ являются системами с тем свойством, что четыре любые линии этой системы пересекают образующие поверхности Φ в точках которые имеют постоянное сложное отношение.

Система Рикати является аксиальной, если касательные к линиям этой системы образуют конгруэнцию W с прямолинейчатыми фокалчными повереностями Φ и $\bar{\Phi}$. Касcательные к линиям системы Рикати вдоль образующей p поверхности Φ образуют линейчатую поверхность 2-ого порядка Ψ. Соответствие $\boldsymbol{P}$ является таким соответствием образующих поверхностей Φ и $\bar{\Phi}$, в котором соответствующие прямые лежат на единственной поверхности Ψ. Соотвествие $\boldsymbol{P}$ является проективным изгибанием 2-ого порядка. Найдены поверхности Φ с тем свойством что соответствие $\boldsymbol{P}$ является проективным изгибанием 3-ьего порядка.

ÜBER DIE KONGRUENZ W MIT GERADLINIGEN BRENNFLÄCHEN

Josef Vala

Zusammenfassung

Riccatische Systeme der Kurven auf der Regelfläche Φ, die nicht eine Torse ist, sind solche Systeme, deren vier beliebige Kurven die Erzeugenden der Fläche Φ in vier Punkten mit konstantem Doppelverhältnis durchschneiden.

Riccatisches System nennt man schichtbildend, wen die Tangenten der Kurven dieses Systemes eine Kongruenz W mit geradlinigen Brennflächen Φ und $\bar{\Phi}$ bilden. Die Tangenten der Kurven des Riccatischen Systemes längs einer Erzeugenden p der Fläche Φ bilden eine Regelfläche zweiter Ordnung Ψ. Die Korrespondenz $\boldsymbol{P}$ ist eine Korrespondenz der Erzeugenden der Flächen Φ und $\bar{\Phi}$ mit solcher Eigenschaft, daß die entsprechenden Geraden auf einer Fläche Ψ liegen. Die Korrespondenz $\boldsymbol{P}$ ist eine projektive Abwicklung zweiter Ordnung. Es gibt Flächen Φ, die eine solche Eigenschaft haben, daß die Korrespondenz $\boldsymbol{P}$ eine projektive Abwicklung dritter Ordnung ist.