MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, XII, 4, 1962

O RACIONÁLNYCH FUNKCIÁCH OPERÁTORA DIFERENCOVANIA

JOZEF ELIAŠ, Bratislava

V práci [1] bola uvedená operátorová metóda riešenia diferenčných rovníc. Pri praktických výpočtoch bolo potrebné zistiť, aké funkcie odpovedajú operátorom tvaru:

$$\frac{1}{(s-\alpha)^k}, \qquad \frac{1}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^k}, \qquad \frac{s}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^k},$$

kde $\alpha, \beta \neq 0$ sú čísla a k prirodzené číslo. V tejto práci zavedieme pojem algebraickej derivácie, pomocou ktorého sa táto úloha veľmi ľahko rieši. Všetky označenia a definície budú rovnaké ako v práci [1].

Nech $\{a(n)\}$ je funkcia z K. Položme

$$D\{a(n)\} = \{f(n)\},$$

kde $f(0) = 0$ a $f(n) = -na(n-1)$, pre $n = 1, 2, \ldots$

Lemma 1. *Nech a, b sú funkcie z K. Potom platí:*

a) $D[a+b] = DA + Db$; b) $D[ab] = [Da]\,b + a[Db]$.

Dôkaz. Počítajme pre $n = 1, 2, \ldots$

a) $D[a+b] = \{-n[a+b](n-1)\} = \{-na(n-1) + (-n)\,b(n-1)\} =$
$= \{-na(n-1)\} + \{-nb(n-1)\} = Da + Db.$

b)
$$\begin{aligned}
D[ab] &= \{-n[ab](n-1)\} = \{-n\sum_{i=1}^{n-1} a(n-i-1)\,b(i-1)\} = \\
&= \{\sum_{i=1}^{n-1} -(n-i)\,a(n-i-1)\,.\,b(i-1) + \sum_{i=1}^{n-1} a(n-i-1)\,(i)\,b(i-1)\} = \\
&= \{\sum_{i=1}^{n-1} [Da(n-i)]\,b(i-1) + \sum_{i=1}^{n-1} a(n-i-1)\,[Db(i)]\} = \\
&= \{\sum_{i=1}^{n-1} [Da(n-i)]\,b(i-1) - [Da(0)]\,b(n-1) + \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n-1} a(n-j)\,[Db(j-1)] - a(n-1)\,[Db(0)]\} = \\
&= \{\sum_{i=1}^{n-1} [Da(n-i)]\,b(i-1) + \sum_{i=1}^{n-1} a(n-1)\,[Db(j-1)]\} = \\
&= [Da]\,b + a[Db].
\end{aligned}$$

Pre $n = 0$ sú tvrdenia vety zrejmé.

Nasledujúca lemma dáva vzťah medzi operáciou D a súčtom radu funkcií (pozri [2], str. 288).

Lemma 2. *Nech α_i sú komplexné čísla a a_i sú funkcie z K, pre $i = 1, 2, \ldots$. Nech rad $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i$ konverguje. Potom platí:*

$$D\left[\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i [Da_i].$$

Dôkaz. Pre $n = 1, 2, \ldots$ platí

$$D\left[\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i\right](n) = \left\{-n\left[\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i\right](n-1)\right\} = \left\{-n\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i a_i(n-1)\right\} =$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i[-na_i(n-1)]\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i[Da_i(n)]\right\} = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i[Da_i].$$

Pre $n = 0$ je dokázaná rovnosť tiež zrejmá.

Rozšírme definíciu operácie D na ľubovoľné operátory tvaru $a = p/q$, kde p a $q \neq 0$ sú funkcie z K, takto:

$$\bar{D}\left[\frac{p}{q}\right] = \frac{[Dp]q - p[Dq]}{q^2}.$$

Táto definícia je nezávislá od vyjadrenia operátora ako podielu dvoch funkcií. Bez ujmy na všeobecnosti nech p, q, p_1, q_1 sú funkcie z K rôzne od nuly. Nech je $p/q = p_1/q_1$, potom $pq_1 = qp_1$. Ak na poslednú rovnosť použijeme operáciu D a urobíme úpravu, dostaneme:

$$\frac{Dp}{p} - \frac{Dq}{q} = \frac{Dp_1}{p_1} - \frac{Dq_1}{q_1}.$$

Keď vynásobíme ľavú stranu poslednej rovnosti s p/q a pravú stranu s p_1/q_1, dostaneme:

$$\frac{[Dp]q - p[Dq]}{q^2} = \frac{[Dp_1]q_1 - q_1[Dq_1]}{q_1^2}.$$

Veta 1. *Nech je $f \in K$. Potom $Df = \bar{D}f$.*

Dôkaz. Nech $f, p, q \neq 0$ sú funkcie z K a $f = p/q$; máme dokázať, že $Df = \bar{D}[p/q]$. Podľa predpokladu $p = fq$. Ak na túto rovnosť použijeme operáciu D, dostaneme:

$$Dp = [Df]q + f[Dq].$$

Odtiaľ vyplýva: $q[Dp] = [Df]q^2 + fq[Dq] = [Df]q^2 + p[Dq]$. Z poslednej rovnosti dostávame:

$$Df = \frac{q[Dp] - p[Dq]}{q^2} = \bar{D}\left[\frac{p}{q}\right] = \bar{D}f.$$

V ďalšom v dôsledku dokázanej vety bez obáv z nedorozumenia budeme namiesto $\bar{D}$ písať D.

Operácia D má podobné vlastnosti ako derivácia. Budeme ju preto nazývať algebraickou deriváciou.

Veta 2. *Nech α, β sú číselné operátory. Nech a, b sú operátory. Potom platí:*

a) $D\alpha = 0$;

b) $D[ab] = a[Db] + b[Da]$;

c) $D[\alpha a + \beta b] = \alpha[Da] + \beta[Db]$;

d) $D\left[\frac{a}{b}\right] = \frac{[Da]b - a[Db]}{b^2}$, ak $b \neq 0$.

Dôkaz. a) Číselný operátor α sa dá napísať v tvare $\alpha = \{\alpha\}/\{1\}$. Potom podľa definície

$$D\alpha = D\frac{\{\alpha\}}{\{1\}} = \frac{[D\{\alpha\}]\{1\} - \{\alpha\}[D\{1\}]}{\{1\}^2} = \frac{\{-n\alpha\}\{1\} - \{\alpha\}\{-n\}}{\{1\}^2} =$$

$$= \frac{\{-\alpha\sum_{i=1}^{n}(n-i) + \alpha\sum_{i=1}^{n}(i-1)}{\{1\}^2} = \frac{\{0\}}{\{1\}^2} = 0.$$

b) Položme $a = p/q$, $b = p_1/q_1$, kde $p, p_1, q \neq 0$, $q_1 \neq 0$ sú funkcie z K. Počítajme:

$$D[ab] = D\left[\frac{p}{q}\frac{p_1}{q_1}\right] = D\left[\frac{pp_1}{qq_1}\right] = \frac{[D(pp_1)]qq_1 - pp_1[D(qq_1)]}{q^2q_1^2} =$$

$$= \frac{[Dp]qq_1p_1 + pqq_1[Dp_1] - pp_1q_1[Dq] - pp_1q[Dq_1]}{q^2q_1^2} =$$

$$= \frac{[Dp]q - p[Dq]}{q^2}\frac{p_1}{q_1} + \frac{p}{q}\frac{[Dp_1]q_1 - p_1[Dq_1]}{q_1^2} =$$

$$= D\left[\frac{p}{q}\right]\frac{p_1}{q_1} + \frac{p}{q}D\left[\frac{p_1}{q_1}\right] = [Da]b + a[Db] = a[Db] + b[Da].$$

c) Najskôr si všimnime, že z a) a b) ihneď vyplýva, že pre ľubovoľný operátor a a každý číselný operátor α je $D[\alpha a] = \alpha Da$. Stačí teda dokázať, že $D[a+b] = Da + Db$ pre ľubovoľné dva operátory a, b. Nech $a = pq$, $b = p_1/q_1$, kde $p, p_1, q \neq 0$, $q_1 \neq 0$ sú funkcie z K. Počítajme:

$$D[a+b] = D\left[\frac{p}{q} + \frac{p_1}{q_1}\right] = D\left[\frac{pq_1 + p_1q}{qq_1}\right] =$$

$$= \frac{[D(pq_1 + p_1q)]qq_1 - [pq_1 + p_1q]D[qq_1]}{q^2q_1} =$$

$$= \frac{[Dp]qq_1^2 + [Dp_1]q^2q_1 - pq_1^2[Dq] - p_1q^2[Dq_1]}{q^2q_1^2} +$$

$$= \frac{[Dp]q - p[Dq]}{q^2} + \frac{[Dp_1]q_1 - p_1[Dq_1]}{q_1^2} = D\left[\frac{p}{q}\right] + D\left[\frac{p_1}{q_1}\right] = Da + Db.$$

b) Nech $r = a/b$, kde $a, b \neq 0$ sú operátory, t. j. $a = rb$. Potom podľa b) platí: $Da = [Dr]b + r[Db]$.

Odtiaľ vyplýva: $Da - r[Db] = [Dr]b$.

Z poslednej rovnosti dostávame:

$$Dr = \frac{Da - r[Db]}{b} = \frac{Da - \frac{a}{b}[Db]}{b} = \frac{[Da]b - a[Db]}{b^2}.$$

Všimnime si, že $Dl = \{-n\}$, kde $l = \{1\}$. Odtiaľ podľa predošlej vety dostávame:

$$Ds = D\left[\frac{1}{l}\right] = \frac{[D1]l - 1[Dl]}{l^2} = \frac{\{n\}}{\{n\}} = 1.$$

V práci [1] sme zaviedli polynóm operátora s. Prvou deriváciou polynómu operátora s $P(s) = a_0 + a_1 s + \ldots + a_k s^k$ nazývame polynóm $P'(s) = a_1 + 2a_2 s + \ldots + k a_k s^{k-1}$. Analogicky zavádzame druhú deriváciu polynómu s ako prvú deriváciu z prvej derivácie. Podobne definujeme vyššie derivácie. Na základe uvedených viet môžeme tvrdiť, že $DP(s) = P'(s)$, kde $P'(s)$ je derivácia podľa s.

Ak $F(s) = P(s)/Q(s)$, kde $Q(s)$ je nenulový polynóm operátora s, potom platí:

$$DF(s) = \frac{[DP(s)]\,Q(s) - P(s)[DQ(s)]}{Q^2(s)} = \frac{P'(s)\,Q(s) - P(s)\,Q'(s)}{Q^2(s)}.$$

V práci [2] na str. 292 je dokázané, že každý operátor $p \in T(k)$ sa dá napísať v tvare $p \sum_{i=v}^{\infty} \alpha_i l^i$, kde α_i sú komplexné čísla a v je celé číslo. Nasledujúca veta dáva vyjadrenie pre Dp, ak operátor p je napísaný v takomto tvare.

Veta 3. *Ak je $p = \sum_{i=v}^{\infty} \alpha_i l^i$, kde α_i sú komplexné čísla, v je celé číslo, potom*

$$Dp = -\sum_{i=v}^{\infty} i\alpha_i l^{i+1}.$$

Dôkaz. Položme $p = p_1 + p_2$, kde $p_1 = \sum_{i=v}^{0} \alpha_i l^i$ a $p_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i l^i$. Podľa predošlých poznámok

$$Dp_1 = D[\sum_{i=v}^{0} \alpha_i l^i] = D[\sum_{i=v}^{0} \alpha_i s^{-i}] = \sum_{i=v}^{0} - i\alpha_i s^{-i-1} = -\sum_{i=v}^{0} i\alpha_i l^{i+1}.$$

Podľa [2] rad $\sum_{i=v}^{\infty} \alpha_i l^i$ konverguje pre ľubovoľné čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, preto podľa lemmy 2

$$Dp_2 = D[\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i l^i] = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i [Dl^i] = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i [Ds^{-i}] = -\sum_{i=1}^{\infty} i\alpha_i s^{-i-1} = -\sum_{i=1}^{\infty} i\alpha_i l^{i+1}.$$

Podľa c) vety 2 dostávame dokázané tvrdenie.

Ukážeme príklady na použitie dokázaných tvrdení.

Príklad 1. Pre prirodzené číslo k a komplexné číslo $\alpha \neq -1$ platí:

$$\frac{1}{(s-\alpha)^k} = \left\{\binom{n}{k-1}(\alpha+1)^{n-k+1}\right\}.$$

Dokážeme to indukciou. Pre $k = 1$ tvrdenie platí podľa [1], str. 213. Predpokladajme, že tvrdenie je správne pre $k = l - 1$, kde $l > 1$, t. j. že platí:

$$\frac{1}{(s-\alpha)^{l-1}} = \left\{\binom{n}{l-2}(\alpha+1)^{n-l+2}\right\}.$$

Dokážeme, že tvrdenie platí i pre $k = l$. Počítajme:

$$\frac{1}{(s-\alpha)^l} = -\frac{1}{(l-1)} D \frac{1}{(s-\alpha)^{l-1}} = -\frac{1}{(l-1)} D \left\{\binom{n}{l-2}(\alpha+1)^{n-l+2}\right\} =$$
$$= \left\{-\frac{1}{(l-1)}(-n)\binom{n-1}{l-2}(\alpha+1)^{n-l+1}\right\} = \left\{\binom{n}{l-1}(\alpha+1)^{n-l+1}\right\}.$$

Výsledok sa zhoduje s tvrdením vety 5,3 v [1], str. 213.

Príklad 2. Pomocou algebraickej derivácie ľahko odvodíme vzorce pre mocniny operátora $1/(s^2+\beta^2)$. Totiž

$$D\frac{s}{s^2+\beta^2} = \frac{\beta^2 - s^2}{(s^2+\beta^2)^2} = \frac{2\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2} - \frac{1}{s^2+\beta^2}.$$

Odtiaľ

$$\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2} = \frac{1}{2\beta^2}\left[\frac{1}{s^2+\beta^2} + D\frac{s}{s^2+\beta^2}\right],$$

alebo

$$\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2} = \frac{1}{2\beta^2}\left\{\frac{1}{\beta}(\sqrt{1+\beta^2})^n \sin n\varphi + D[(\sqrt{1+\beta^2})^n \cos n\varphi]\right\} =$$
$$= \frac{1}{2\beta^3}(\sqrt{1+\beta^2})^n \sin n\varphi - \frac{1}{2\beta^2} n(\sqrt{1+\beta^2})^{n-1}\cos(n-1)\varphi,$$

pričom φ je argument komplexného čísla $1 + \beta i$. Výsledok sa zhoduje so vzorcom $K_2(\alpha, \beta, s)$ v [1], str. 216 pre $\alpha = 0$.

K tomu, aby sme odvodili vzorce pre vyššie mocniny operátora $1/(s^2+\beta^2)$, počítajme:

$$D^2\frac{1}{(s^2+\beta^2)^{k-1}} = D\left[D\frac{1}{(s^2+\beta^2)^{k-1}}\right] = D\left[\frac{-2(k-1)s}{(s^2+\beta^2)^k}\right] =$$
$$= \frac{2(2k-1)(k-1)}{(s^2+\beta^2)^k} - \frac{4\beta^2 k(k-1)}{(s^2+\beta^2)^{k+1}}.$$

Odtiaľ vyplýva, že

$$\frac{1}{(s^2+\beta^2)^{k+1}} = \frac{(2k-1)}{2\beta^2 k}\frac{1}{(s^2+\beta^2)^k} - \frac{1}{4\beta^2 k(k-1)}D^2\frac{1}{(s^2+\beta^2)^{k-1}},$$

pre $k = 2, 3, 4, \ldots$

Pre $k = 2$ dostaneme:

$$\frac{2}{(s^2+\beta^2)^3} = \frac{3}{4\beta^2}\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2} - \frac{1}{8\beta^2}D^2\frac{1}{s^2+\beta^2} = \left\{\frac{3}{8\beta^5}(\sqrt{1+\beta^2})^n \sin n\varphi - \right.$$
$$\left. - \frac{3}{8\beta^4} n(\sqrt{1+\beta^2})^{n-1}\cos(n-1)\varphi - \frac{1}{8\beta^3}n(n-1)(\sqrt{1+\beta^2})^{n-2}\sin(n-2)\varphi\right\}.$$

Pre $k = 3$ dostaneme:

$$\frac{1}{(s^2+\beta^2)^4} = \frac{5}{6\beta^2}\frac{1}{(s^2+\beta^2)^3} - \frac{1}{24\beta^2}D^2\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2} =$$
$$= \left\{\frac{5}{16\beta^7}(\sqrt{1+\beta^2})^n \sin n\varphi - \frac{5}{16\beta^6} m(\sqrt{1+\beta^2})^{n-1}\cos(n-1)\varphi - \right.$$
$$- \frac{1}{8\beta^5} n(n-1)(\sqrt{1+\beta^2})^{n-2}\sin(n-2)\varphi +$$
$$\left. + \frac{1}{48\beta^4} n(n-1)(n-2)(\sqrt{1+\beta^2})^{n-3}\cos(n-3)\varphi\right\}.$$

Vzorce sa zhodujú so vzorcami $K_3(\alpha, \beta, s)$ a $K_4(\alpha, \beta, s)$ v [1], str. 216 pre $\alpha = 0$.*

Poznámka. Pomocou predchádzajúcich vzorcov a algebraickej derivácie odvodíme vzorce pre operátor $s/(s^2+\beta^2)^k$, $k = 2, 3, \ldots$

Počítajme:

$$D\frac{1}{(s^2+\beta^2)^{k-1}} = \frac{-2(k-1)s}{(s^2+\beta^2)^k}.$$

Odtiaľ vyplýva:

$$\frac{s}{(s^2+\beta^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)}D\frac{1}{(s^2+\beta^2)^{k-1}}, \quad \text{pre } k = 2, 3, \ldots$$

Pre $k = 3$ z predchádzajúceho vzorca dostávame:

$$\frac{s}{(s^2+\beta^2)^3} = -\frac{1}{4}D\frac{1}{(s^2+\beta^2)^2} =$$
$$= \left\{-\frac{1}{4}D\left[\frac{1}{2\beta^3}(\sqrt{1+\beta^2})^n \sin n\varphi - \frac{1}{2\beta^2}n(\sqrt{1+\beta^2})^{n-1}\cos(n-1)\varphi\right]\right\} =$$
$$= \left\{\frac{1}{8\beta^3}n(\sqrt{1+\beta^2})^{n-1}\sin(n-1)\varphi - \frac{1}{8\beta^2}n(n-1)(\sqrt{1+\beta^2})^{n-2}\cos(n-2)\varphi\right\}.$$

* Vo vzorcoch pre $K_3(\alpha, \beta, s)$ a $K_4(\alpha, \beta, s)$ v [1] na str. 216 sú však chyby. Vo vzorci pre $K_3(\alpha, \beta, s)$ koeficient pre $\sin n\varphi$ má byť $3/8\beta^5 \mid a+1 \mid^n$. Vo vzorci pre $K_4(\alpha, \beta, s)$ koeficient pri $\sin(n-2)\varphi$ má byť $-1/8\beta^5 n(n-1) \mid a+1 \mid^{n-2}$ a koeficient pri $\cos(n-3)\varphi$ má byť $1/48\beta^4 n(n-1)(n-2) \mid a+1 \mid^{n-3}$.

Vzorce sa zhodujú so vzorcom $Q_3(0, \beta, s)$ v [1], str. 219.

Príklad 3. Pomocou algebraickej derivácie sa dajú odvodiť aj vzorce pre operátor $1/[(s-\alpha)^2+\beta^2])$, kde $\alpha, \beta \neq 0$ sú reálne čísla a k je prirodzené číslo. Podľa pomocnej vety 1 na str. 214 z [1] platí:

$$\frac{1}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^k} = \sum_{j=1}^{k}\left[\frac{A_j}{(x-a)^j} + \frac{\overline{A_j}}{(x-\overline{a})^j}\right], \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

pričom

$$A_j = \binom{2k-j-1}{k-1}\frac{1}{(2\beta)^{2k-j}\,i^k},$$

pre $1 \leqq j \leqq k$, $\overline{A}_j$ je konjugované číslo k A_j a $a = \alpha + \beta_i$; $\alpha, \beta \neq 0$ sú reálne čísla. Ak použijeme výsledky príkladu 1, dostaneme:

$$\frac{1}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^k} = \left\{\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}[A_j(a+1)^{n-j+1} + \overline{A_j}(\overline{a}+1)^{n-j+1}]\right\} =$$
$$= \left\{\sum_{j=1}^{k}\binom{n}{j-1}2\operatorname{Re}[A_j(a+1)^{n-j+1}]\right\}.$$

Pre $k = 2$ posledný vzorec má tvar:

$$\frac{1}{[(s-\alpha)^2+\beta^2]^2} = \left\{\sum_{j=1}^{2}\binom{n}{j-1}2\operatorname{Re}[A_j(a+1)^{n-j+1}]\right\} =$$
$$= \left\{2\operatorname{Re}A_1(a+1)^n + \binom{n}{1}2\operatorname{Re}A_2(a+1)^{n-1}\right\} =$$
$$= \left\{\frac{1}{2\beta^3}\mid a+1\mid^n \sin n\varphi - \frac{n}{2\beta^2}\mid a+1\mid^{n-1}\cos(n-1)\varphi\right\},$$

kde φ je argument komplexného čísla $a+1$ a $\mid a+1 \mid$ jeho absolútna hodnota. Vzorec sa zhoduje so vzorcom $K_2(\alpha, \beta, s)$ v [1], str. 216.

Poznámka. Podobným spôsobom sa dajú odvodiť vzorce aj pre operátor tvaru $s/[(s+\alpha)^2+\beta^2])$, kde $\alpha, \beta \neq 0$ sú reálne čísla a k je prirodzené číslo.

LITERATÚRA

[1] Eliaš J., *O operátorovej metóde riešenia diferenčných rovníc*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV 8 (1958), 203—227.

[2] Eliaš J., *Niektoré vlastnosti telesa operátorov*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV 11 (1961) 4, 288—294.

Došlo 10. 5. 1962.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Strojníckej fakulty Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

О РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ ОПЕРАТОРА ДИФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Йозеф Элиаш

Резюме

В работе [1] определено поле операторов $T(K)$ как поле отношений над кольцом K всех комплексных функций, определенных на множестве всех целых неотрицательных чисел. Сложение и умножение в K определяются по формулам $a + b = \{a(n) + b(n)\}$, $ab = \{\sum_{i=1}^{n} a(n-i)\, b(i-1)\}$, для всех $a, b \in K$.

В настоящей статье введена операция D следующим способом: Если $\{a(n)\} \in K$, то $\{Da(n)\} = \{f(n)\}$, где $f(0) = 0$ и $f(n) = -na(n-1)$ для $n = 1, 2, \ldots$

Далее, если оператор $a = p/q$, для $p \in K$, $0 \neq q \in K$, то полагаем $Da = D(p/2) = [(Dp)\, q - p(Dq)]/q^2$.

Доказываются следующие теоремы:

Если α, β числовые операторы и a, b произвольные операторы, то $D\alpha = 0$, $D[ab] = a[Db] + b[Da]$, $D[\alpha a + \beta b] = \alpha[Da] + \beta[Db]$, $D(a/b) = [(Da)\, b - a(Db)]/b^2$, $b \neq 0$.

По [2] всякий элемент $p \in T(K)$ может быть представлен в виде $p = \sum_{i=\nu}^{\infty} \alpha_i l^i$, где $l = \{1\}$, $\nu \gtreqless 0$ — целое число и α_i, $i = \nu, \nu + 1, \ldots$ — комплексные числа, $\alpha_\nu \neq 0$. Для оператора p в этом виде справедлива формула: $Dp = -\sum_{i=\nu}^{\infty} i\alpha_i l^{i+1}$.

С помощью операции $Д$ выведены формулы для степеней операторов: $1/(s-\alpha)$, $\alpha \neq -1$ комплексное число; $1/(s^2 + \beta^2)$, $s/(s^2 + \beta^2)$,^{k} $k = 1, 2, \ldots$, $1/[(s-\alpha)^2 + \beta^2]^k$, где $\alpha, \beta \neq 0$ вещественные числа, k натуральное число и оператор $s = 1/l$.

ON RATIONAL FUNCTIONS OF DIFFERENCE OPERATOR

Jozef Eliaš

Summary

In paper [1] the field $T(K)$ of operators is defined as the quotient-field over the ring K of all complex-valued functions defined on the set of all non-negative integers. The addition and multiplication in K are defined by formulae $a + b = \{a(n) + b(n)\}$ and $ab = \{\sum_{i=1}^{n} a(n-i)\, b(i-1)\}$ respectively (for every $a, b \in K$).

In this paper the operation ~~D is~~ defined in the following way: If $a \in K$ then $Da = f$, where $f(0) = 0$, and $f(n) = -na(n-1)$, $n = 1, 2, \ldots$ Further, if $a = p/q$, $p \in K$, $0 \neq q \in K$, we put $Da = D(p/q) = ((Dp)\, q - p(Dq))/q^2$.

The following theorems are proved.

If α, β are numerical operators (numbers), and a, b arbitrary operators, then $D\alpha = 0$, $D(ab) = (Da)\, b + a(Db)$, $D(\alpha a + \beta b) = \alpha(Da) + \beta(Db)$, $D(a/b) = ((Da)\, b - a(Db))/b2$, $b \neq 0$.

According [2] every element $p \in T(K)$ may be written in the form $p = \sum_{i=\nu}^{\infty} \alpha_i l^i$, where $l = \{1\}$, $\nu \gtreqless 0$ is an integer and α_i, $i = \nu, \nu + 1, \ldots$, are complex numbers, $\alpha_\nu \neq 0$. For aa operator p in this form the formula $Dp = -\sum_{i=\nu}^{\infty} i\alpha_i l^{i+1}$ is proved.

By aid of the operator D the formulae for the operators $1/(s-\alpha)^k$, $1/(s^2 + \beta^2)^k$, $s/(s^2 + \beta^2)^k$ $1/((s-\alpha)^2 + \beta^2)^k$, where $\alpha, \beta \neq 0$ are real numbers and k is a positive integer and $s = 1/l$ are proved