

NEOSCILATORICKÉ RIEŠENIA ISTEJ NELINEÁRNEJ DIFFERENCIÁLNEJ ROVNICE DRUHÉHO RÁDU

ŠTEFAN BELOHOREC, Bratislava

V práci [1] našiel F. V. Atkinson postačujúcu podmienku na to, aby všetky riešenia rovnice

$$y'' + f(x) y^{2n+1} = 0 \quad (\alpha)$$

$Lf(x) > 0$, spojitá pre $x \geq 0$, $n \geq 1$ prirodzené číslo] boli neoscilatorické. J. Jones v [2] zovšeobecnil jeho výsledok pre rovnicu

$$y'' + \sum_{i=1}^n f_i(x) y^{2i+1} = 0 \quad (\beta)$$

$Lf_i(x) \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) spojité pre $x \geq 0$, $f_k(x) > 0$ pre nejaké k].

V prácach [3] a [4] boli odvodené nutné a postačujúce podmienky na to, aby existovalo aspoň jedno neohraničené neoscilatorické riešenie rovnice (α) a aspoň jedno ohraničené neoscilatorické riešenie. Tvrdenia týchto viet zostanú zachované aj pre diferenciálnu rovnicu (β), v ktorej exponenty $2i + 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) nahradíme číslami $N_i > 1$, pričom o N_i predpokladáme, že $N_i = p_i/q_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$), kde p_i a q_i sú nepárne prirodzené čísla.

Cieľom tejto práce je nájsť takéto podmienky pre rovnicu

$$y'' + \sum_{i=1}^n f_i(x) y^{N_i} = 0, \quad (1)$$

ak $f_i(x) \geq 0$ pre $x \geq c$ a $0 < N_i < 1$.

Riešenie $y(x)$ rovnice (1) budeme nazývať oscilatorickým, ak má aspoň jeden nulový bod v intervale (x, ∞) pre ľubovoľné x .

V ďalšom sa budeme zaoberať iba regulárnymi riešeniami rovnice (1), t. j. takými riešeniami $y(x)$, ktoré sú definované v celom intervale $(0, \infty)$ a majú tam spojité derivácie.

Každé takéto riešenie $y(x) \not\equiv 0$ rovnice (1) má nanejavš jednoduché nulové body, vyjímajúc prípad, v ktorom množina nulových bodov nejakého riešenia má hromadný bod v konečne. Keby riešenie $y(x) \not\equiv 0$ v nejakom bode x_0 splňovalo počiatočné

podmienky $y(x_0) = y'(x_0) = 0$, potom z rovnice (1) dostaneme pre isté okolie zľava (podobne sprava).

$$y(x) = - \int_x^{x_0} (t-x) \sum_{i=1}^n f_i(t) y^{N_i}(t) dt,$$

čo vedie k sporu. Ak na $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) dáme ďalšie podmienky, napr. $f_i'(x) \geq 0$ resp. $f_i'(x) \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), žiadne riešenie $y(x) \not\equiv 0$ nemá hromadný bod nulových bodov v konečnej, čo vidieť z dôkazu vety 1. a 2.

Veta 1. Nech $0 < N_i < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) a nech $N_i = p_i/q_i$, kde p_i, q_i sú nepárne a majú v tomto intervale spoločné derivácie $f_i'(x) \leq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), pričom existuje postupnosť nulových bodov riešenia $y(x)$ a $\{x_m'\}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) bodov $y'(x)$ v intervale (c, ∞) .

Potom pre každé oscilatorické riešenie $y(x) \not\equiv 0$ rovnice (1) platí, že postupnosť $\{y(x_m')\}$ je klesajúca a postupnosť $\{y(x_m'')\}$ je rastúca. Ak okrem toho

$$\int_{i=1}^n x f_i(x) dx < \infty,$$

potom každé riešenie $y(x) \not\equiv 0$ rovnice (1) je neoscilatorické.

Dôkaz. Nech je $y(x) \not\equiv 0$ ľubovoľné oscilatorické riešenie rovnice (1). Násobíme (1) $y'(x)$ a integrujeme v intervale $\langle a, b \rangle$ ($a \geq c$) dostaneme

$$y'^2(b) - y'^2(a) + 2 \int_a^b f_i(x) y^{N_i}(x) y'(x) dx = 0.$$

Ak vypočítame posledný integrál, máme

$$y'^2(b) - y'^2(a) + 2 \sum_{i=1}^n (N_i + 1)^{-1} f_i(b) y^{N_i+1}(b) - 2 \sum_{i=1}^n (N_i + 1)^{-1} f_i(a) y^{N_i+1}(a) = 2 \sum_{i=1}^n (N_i + 1)^{-1} \int_a^b f_i(x) y^{N_i+1}(x) dx. \quad (2)$$

Položme $a = x_m$, $b = x_{m+1}$, pričom x_m a x_{m+1} sú nasledujúce nulové body riešenia $y(x)$ také, že $y(x) > 0$ v intervale (x_m, x_{m+1}) . Potom z (2) dostaneme

$$y'^2(x_{m+1}) - y'^2(x_m) = 2 \sum_{i=1}^n (N_i + 1)^{-1} \int_{x_m}^{x_{m+1}} f_i(x) y^{N_i+1}(x) dx$$

Z posledného vyplýva, že $|y'(x_{m+1})| < |y'(x_m)|$.

Ak položíme $a = x_m'$, $b = x_{m+1}'$, pričom x_m' , x_{m+1}' sú nasledujúce nulové body $y'(x)$ také, že $x_m' \in (x_m, x_{m+1})$, z (2) dostaneme

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (N_i + 1)^{-1} f_i(x_{m+1}') y^{N_i+1}(x_{m+1}') - \sum_{i=1}^n (N_i + 1)^{-1} f_i(x_m') y^{N_i+1}(x_m') = \\ & = \sum_{i=1}^n (N_i + 1)^{-1} \int_{x_m'}^{x_{m+1}'} f_i(x) y^{N_i+1}(x) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Pridáme k oboj stranám (3) výraz

$$- \sum_{i=1}^n (N_i + 1)^{-1} f_i(x_{m+1}') y^{N_i+1}(x_{m+1}').$$

Po úprave dostaneme

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (N_i + 1)^{-1} f_i(x_{m+1}') [y^{N_i+1}(x_{m+1}') - y^{N_i+1}(x_m')] = \\ & = \sum_{i=1}^n (N_i + 1)^{-1} \int_{x_m'}^{x_{m+1}'} f_i(x) [y^{N_i+1}(x) - y^{N_i+1}(x_m')] dx. \end{aligned}$$

Pretože $f_i'(x) \leq 0$, potom je $|y(x_m')| < |y(x_{m+1}')|$. Keby $|y(x_m')| \geq |y(x_{m+1}')|$, potom by nutne existovalo $x_0 \in (x_m', x_{m+1}')$ také, že $|y(x_0)| > |y(x_m')|$, čo je spor. Tým sme dokázali, že postupnosť $\{y(x_m')\}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) je klesajúca a postupnosť $\{y(x_m'')\}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) je rastúca.

Integrujeme rovnicu (1) v intervale $\langle x, x_m' \rangle$, pričom $x \in (x_m, x_{m+1})$, dostaneme

$$y'(x) = \int_x^{x_m'} \sum_{i=1}^n f_i(t) y^{N_i}(t) dt.$$

Z poslednej rovnosti po integrácii v intervale $\langle x_m, x_m' \rangle$ dostaneme

$$y(x_m') = \int_{x_m}^{x_m'} (t - x_m) \sum_{i=1}^n f_i(t) y^{N_i}(t) dt \leq \int_{x_m}^{x_m'} (t - x_m) \sum_{i=1}^n y^{N_i}(x_m') f_i(t) dt. \quad (4)$$

Je zrejme, že existuje index p tak, že pre ľubovoľné $i = 1, 2, \dots, n$ platí $y^{N_i}(x_m') \leq y^{N_p}(x_m')$. Zo (4) dostaneme

$$\begin{aligned} 1 & \leq y^{N_p-1}(x_m') \int_{x_m}^{x_m'} (t - x_m) \sum_{i=1}^n f_i(t) dt < \\ & < y^{N_p-1}(x_m') \int_{x_m}^{x_m'} \sum_{i=1}^n x f_i(x) dx < C \int_{x_m}^{x_m'} \sum_{i=1}^n x f_i(x) dx, \end{aligned}$$

pretože postupnosť $\{y(x'_m) | N_{m-1}\}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) je klesajúca. Stačí teraz voliť m dostatočne veľké, potom nerovnosť (4) vedie k sporu. Teda riešenie $y(x)$ je neoscilatorické. Tým je tvrdenie veľy dokázané.

Veta 2. *Nech je N_i ($i = 1, 2, \dots, n$) také isté ako vo vete 1. Nech sú funkcie $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) nezáporné v intervale $(0, \infty)$ a majú tam spojité derivácie $f'_i(x) \geq 0$, pričom existuje číslo $c > 0$ a index j tak, že $f'_j(x) > 0$ pre $x \in (c, \infty)$. Potom sú všetky riešenia rovnice (1) ohraničené a pre každé oscilatorické riešenie $y(x) \neq 0$ platí, že postupnosť $\{y(x'_m)\}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) je rastúca a postupnosť $\{y(x'_m)\}$ je klesajúca. Dôkaz. Nech je $y(x) \neq 0$ oscilatorické riešenie rovnice (1). Potom je nerovnosť $|y'(x'_m)| < |y'(x_{m+1})|$ zrejímá. Prípočítajme k oboj stranám (3) výraz*

$$\sum_{i=1}^n (N_i + 1)^{-1} f_i(x'_m) y^{N_i+1}(x'_m).$$

Po úprave dostaneme

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n (N_i + 1)^{-1} f_i(x'_m) [y^{N_i+1}(x'_{m+1}) - y^{N_i+1}(x'_m)] = \\ & = \sum_{i=1}^n (N_i + 1)^{-1} \int_{x'_m}^{x'_{m+1}} f_i(x) [y^{N_i+1}(x) - y^{N_i+1}(x'_m)] dx. \end{aligned}$$

Pretože $f'_i(x) \geq 0$, potom je $|y(x'_m)| > |y(x'_{m+1})|$ z dôvodu ako vo vete (1). Tým sme dokázali, že postupnosť $\{y(x'_m)\}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) je klesajúca a postupnosť $\{y(x'_m)\}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) je rastúca. Pretože $f'_i(x) \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), potom $\int_{i=1}^n x^N f_i(x) dx = \infty$, teda podľa [5] všetky riešenia rovnice (1) sú oscilatorické a podľa predchádzajúceho sú ohraničené.

V ďalšom uvedieme rovnicu tvaru (1), ktorá má oscilatorické aj neoscilatorické riešenie. Je to rovnica

$$y'' + x^{-(3+N)/2} y^N = 0. \quad (5)$$

U tejto rovnice nie sú splnené postačujúce podmienky z vety 1. preto, aby všetky riešenia boli neoscilatorické. Ďalej vidíme, že $\int x^N x^{-(3+N)/2} dx < \infty$, čo je podľa [5] postačujúca podmienka pre existenciu aspoň jedného neoscilatorického riešenia rovnice (5). Z dôkazu veľy v [5] vyplýva, že každé riešenie $y(x)$ rovnice (5), ktoré je dostatočne veľké a spĺňa počiatkové podmienky $y(a) = 0$, $y'(a) \geq 1$, je neoscilatorické. Okrem neoscilatorického riešenia tohto druhu možno nájsť i také riešenie rovnice (5), ktoré nemá v intervale $(0, \infty)$ žiaden nulový bod. Hľadáme riešenie rovnice (5) v tvare

$$y(x) = x^a u(gx).$$

Po tejto transformácii rovnica (5) prejde do tvaru

$$\begin{aligned} & \ddot{u} + (2\beta - 1)\dot{u} + \beta(\beta - 1)u + e^{t(N-1)(\theta-1/2)} u^N = 0 \\ & \left(u = \frac{du}{dt}, \lg x = t \right). \end{aligned}$$

Položíme $\beta = 1/2$, dostaneme

$$\ddot{u} - 1/4u + u^N = 0. \quad (6)$$

Vidieť, že posledná rovnica má riešenie $u(t) = 4^{1/(1-N)}$, teda $y(x) = 4^{1/(1-N)} x^{1/2}$ je riešením rovnice (5). Toto riešenie je neoscilatorické a v intervale $(0, \infty)$ nemá nulový bod.

Nech je $u(t)$ riešenie rovnice (6) také, že

$$u(a) = 0, \quad \dot{u}^2(a) < [2/(N+1) - 1] 4^{(1+N)/(1-N)}.$$

Ukážeme o ňom, že je oscilatorické. Vynásobíme (6) $\dot{u}(t)$ a integrujeme v intervale $\langle a, t \rangle$; dostaneme

$$\dot{u}^2(t) = \frac{1}{4} \dot{u}^2(t) - \frac{2}{(N+1)} u^{N+1}(t) + \dot{u}^2(a). \quad (7)$$

Z poslednej rovnice vidieť, že pre toto riešenie platí

$$-4^{1/(1-N)} < u(t) < 4^{1/(1-N)}.$$

V opačnom prípade by existoval bod $t_0 > a$ tak, že $u(t_0) = 4^{1/(1-N)}$. Toto však vedie k sporu, pretože $\dot{u}^2(a) < [2/(N+1) - 1] 4^{(1+N)/(1-N)}$. Nech $b > a$ je ďalší nulový bod riešenia $u(t)$. V tomto bode $\dot{u}^2(b) = \dot{u}^2(a)$, čo je zrejme z rovnice (7). Predpokladáme, že t^* je posledný nulový bod riešenia $u(t)$ a nech je $u(t) > 0$ v intervale (t^*, ∞) . Potom zo (6) dostávame, že $u(t)$ je v intervale (t^*, ∞) konštantnou funkciou. Existuje teda $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_0$ $[-u(t)]$ je tiež riešenie rovnice (6). Z rovnice (6) je ďalej zrejme, že $u_0 = 4^{1/(1-N)}$, a z rovnice (7) zasa vyplýva

$$\dot{u}^2(a) + [1 - 2/(1+N)] 4^{(1+N)/(1-N)} = 0,$$

čo je spor s predpokladom, ktorý sme položili na počiatkové podmienky. Riešenie $u(t)$ je teda oscilatorické a pretože $y(x) = x^{1/2} u(t)$, aj $y(x)$ je oscilatorické riešenie rovnice (5). Tým je dokázané, že rovnica (5) má aspoň jedno oscilatorické riešenie.

V nasledujúcich dvoch vetách sú odvodené nutné a postačujúce podmienky na to, aby existovalo aspoň jedno ohraničené neoscilatorické riešenie rovnice (1) a aspoň jedno neohraničené neoscilatorické riešenie.

Veta 3. *Nech je N_i ($i = 1, 2, \dots, n$) také isté ako vo vete 1. Nech sú funkcie $f_i(x)$ nezáporné a spojité v intervale $\langle 0, \infty \rangle$. Potom existuje ohraničené neoscilatorické riešenie rovnice (1) vtedy a len vtedy, keď*

$$\int_{i=1}^n x f_i(x) dx < \infty.$$

Dôkaz 1. Nech je $a < b$. Integrujme rovnicu (1) najskôr v intervale $\langle x, b \rangle$, potom v intervale $\langle a, x \rangle$; dostaneme

$$y(x) = y(a) + y'(b)(x - a) + (x - a) \sum_{i=1}^n \int_a^b f(t) y^{(i)}(t) dt + \sum_{i=1}^n \int_a^x (t - a) f(t) y^{(i)}(t) dt. \quad (8)$$

Nech je $y(x)$ ohraničené neoscilatorické riešenie rovnice (1) také, že pre $x > a$ je $0 < y(x) \leq K$ [$1 - y(x)$ je tiež riešením rovnice (1)]. Potom z (8), pretože $y(a) \geq 0$, $y'(b) > 0$, máme

$$K \geq y(x) \geq \sum_{i=1}^n \int_a^x (t - a) f(t) y^{(i)}(t) dt \geq M \sum_{i=1}^n \int_a^x (t - a) f(t) dt,$$

kde $M = \min y^{(i)}(a)$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Posledná nerovnosť zrejme platí pre ľubovoľné $x > a$, a teda

$$\int_a^\infty \sum_{i=1}^n x f_i(x) dx < \infty.$$

2. Tvrdenie o postačujúcej podmienke bude dokázané, ak nájdeme ohraničené neoscilatorické riešenie rovnice (1), za predpokladu, že platí

$$\int_a^\infty \sum_{i=1}^n x f_i(x) dx < \infty.$$

Nech $\int_a^\infty \sum_{i=1}^n x f_i(x) dx < \infty$. Potom pre dostatočne veľké a platí nerovnosť

$$\int_a^\infty \sum_{i=1}^n (x - a) f_i(x) dx < \frac{1}{2}.$$

Zoberme integrálnu rovnicu

$$y(x) = k + \int_a^x (t - a) \sum_{i=1}^n f_i(t) y^{(i)}(t) dt + (x - a) \int_a^\infty \sum_{i=1}^n f_i(t) y^{(i)}(t) dt, \quad (9)$$

pričom k je ľubovoľné kladné číslo. Dokážeme, že táto rovnica má v intervale (a, ∞) ohraničené riešenie $y(x) > 0$, ktoré je zrejme riešením aj rovnice (1).

Existencia ohraničeného riešenia $y(x)$ rovnice (9) sa ukáže metódou postupných aproximácií. Definujme

$$y_1(x) = k$$

$$y_{m+1}(x) = k + \int_a^x (t - a) \sum_{i=1}^n f_i(t) y_m^{(i)}(t) dt + (x - a) \int_a^\infty \sum_{i=1}^n f_i(t) y_m^{(i)}(t) dt, \\ (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Nech je $K = \max(1, 2k)$. Pretože pre $x \geq a$ a pre $k \leq y_m(x) \leq K$ je

$$k \leq y_{m+1}(x) \leq k + K \left\{ \int_a^x (t - a) \sum_{i=1}^n f_i(t) dt + \int_a^\infty (t - a) \sum_{i=1}^n f_i(t) dt \right\} = \\ = k + K \int_a^\infty (t - a) \sum_{i=1}^n f_i(t) dt \leq k + \frac{K}{2} \leq K.$$

To znamená, že postupné aproximácie sú ohraničené funkcie a pre $m = 1, 2, 3, \dots$ platí

$$k \leq y_m(x) \leq K.$$

Ďalej ľahko možno dokázať, že $\{y_m(x)\}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) tvoria postupnosť rovnomerne spojitých funkcií v ľubovoľnom konečnom intervale. Pre pevné $x > a$ je $\{y_m(x)\}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) rastúca postupnosť, čo sa tiež dokáže indukciou, pretože $y_2(x) > y_1(x)$ a pre $m = 1, 2, 3, \dots$ platí

$$y_{m+1}(x) - y_m(x) = \int_a^x (t - a) \sum_{i=1}^n f_i(t) [y_m^{(i)}(t) - y_{m-1}^{(i)}(t)] dt + \\ + (x - a) \int_a^\infty \sum_{i=1}^n f_i(t) [y_m^{(i)}(t) - y_{m-1}^{(i)}(t)] dt.$$

Podľa Ascoliho vety postupnosť $\{y_m(x)\}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) rovnomerne konverguje k funkcii $y(x)$ v ľubovoľnom konečnom intervale $\langle a, b \rangle$.

Nech je $\varepsilon > 0$ ľubovoľne malé číslo, potom pre dostatočne veľké b platí

$$\left| y_{m+1}(x) - k - \int_a^x (t - a) \sum_{i=1}^n f_i(t) y_m^{(i)}(t) dt - (x - a) \int_a^\infty \sum_{i=1}^n f_i(t) y_m^{(i)}(t) dt \right| = \\ = (x - a) \int_a^\infty \sum_{i=1}^n f_i(t) y_m^{(i)}(t) dt \leq K \int_b^\infty (t - a) \sum_{i=1}^n f_i(t) dt < \varepsilon.$$

Ak $m \rightarrow \infty$, $b \rightarrow \infty$, z posledného vyplýva, že

$$y(x) = k + \int_a^x (t - a) \sum_{i=1}^n f_i(t) y^{(i)}(t) dt + (x - a) \int_a^\infty \sum_{i=1}^n f_i(t) y^{(i)}(t) dt.$$

$y(x)$ je teda riešením integrálnej rovnice (9). Tým je veta dokázaná.

Poznámka 1. Z druhej časti dôkazu vidieť, že rovnica (9) a teda aj rovnica (1) má ohraničené neoscilatorické riešenie vychádzajúce z bodu (a, k) , pričom $k > 0$ je ľubovoľné a a dostatočne veľké číslo.

Poznámka 2. Tvrdenie vety 3 platí aj pre $N_i = 1$. Keby bolo N_i tvaru ako vo vete 1, pričom $N_i > 1$, potom existenciu takýchto riešení možno dokázať iba pre $0 < k < 1$. Ak žiadame existenciu kladného neoscilatorického riešenia, potom veta 3 platí pre ľubovoľné $N_i > 0$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$).

Veta 4. Nech je $N_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ľubovoľné reálne číslo. Nech funkcie $f_i(x)$ majú tie isté vlastnosti ako vo vete 3. Potom existuje neohraničené neoscilatorické riešenie rovnice (1), pre ktoré platí $y(x) \sim c_0 x (c_0 > 0)$ vtedy a len vtedy, keď

$$\int_{i=1}^{\infty} x^{N_i} f_i(x) dx < \infty.$$

Dôkaz. 1. Nech je $y(x)$ riešenie rovnice (1), pre ktoré platí $y(x) \sim c_0 x$ ($c_0 > 0$). Potom existujú čísla $A > 0$ a b tak, že $y(x) > Ax$ pre $x \geq b$. Pre takéto x máme

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) y^{N_i}(x) > B \sum_{i=1}^n f_i(x) x^{N_i},$$

príčom $B = \min A^{N_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Z rovnice (1) dostaneme

$$y'(b) = y'(x) + \int_b^x \sum_{i=1}^n f_i(t) y^{N_i}(t) dt \geq y'(x) + B \int_b^x \sum_{i=1}^n f_i(t) t^{N_i} dt.$$

Je zrejmé, že $y'(x)$ je klesajúca funkcia, pretože $y(x) > 0$. Existuje teda $\lim_{x \rightarrow \infty} y'(x) = c_0$. Z poslednej nerovnosti vyplýva, že

$$y'(b) \geq c_0 + B \int_b^x \sum_{i=1}^n f_i(t) t^{N_i} dt$$

platí pre ľubovoľné x . Tým je dokázaná existencia integrálu

$$\int_{i=1}^{\infty} x^{N_i} f_i(x) dx.$$

2. Nech $\int_{i=1}^{\infty} x^{N_i} f_i(x) dx < \infty$. Nech je $\varepsilon > 0$ ľubovoľne malé. Potom existuje číslo a tak, že

$$\int_a^{\infty} x^{N_i} f_i(x) dx < \varepsilon.$$

Zoberme riešenie $y(x)$ rovnice (1), ktoré v bode a má $y(a) = 0$, $y'(a) \geq 1$, ak je $0 < N_i < 1$. V prípade $N_i \geq 1$ berme $y(a) = 0$, $y'(a) \leq 1$. Toto riešenie v intervale

(a, ∞) nemá nulový bod. Pripustíme, že to nie je pravda a označme znakom b najmenší nulový bod riešenia $y(x)$ v intervale (a, ∞) . Riešenie $y(x)$ v intervale (a, b) spĺňa nerovnosť

$$y(x) \leq y'(a)(x - a),$$

pretože je tam konkvávnou funkciou. Z rovnice (1) dostaneme

$$y'(a) \leq y'(x) + \int_a^x \sum_{i=1}^n f_i(t) [y'(a)]^{N_i} (t - a)^{N_i} dt \leq$$

$$\leq y'(x) + y'(a) \int_a^x \sum_{i=1}^n f_i(t) (x - a)^{N_i} dx \leq y'(x) + y'(a) \varepsilon,$$

t. j.

$$y'(a)(1 - \varepsilon) \leq y'(x). \quad (10)$$

Pretože $\varepsilon > 0$ bolo ľubovoľne malé, posledná nerovnosť vedie k sporu. Teda riešenie $y(x)$ nenadobúda v intervale (a, ∞) nulový bod, t. j. je neoscilatorické. Pretože $y'(x)$ je klesajúca funkcia a podľa (10) je zdola ohraničená, musí platiť $\lim_{x \rightarrow \infty} y'(x) = c_0 > 0$, t. j. $y(x) \sim c_0 x$. Tým je veta dokázaná.

Poznámka 3. Z viet 3 a 4 vidieť, že ak je $0 < N_i < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), potom existencia ohraničeného neoscilatorického riešenia implikuje existenciu riešenia $y(x) \sim c_0 x$ ($c_0 > 0$). V prípade $N_i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) platí aj opak. Pre $N_i > 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) existencia riešenia $y(x) \sim c_0 x$ implikuje existenciu ohraničeného neoscilatorického riešenia.

LITERATÚRA

- [1] Atkinson F. V., On second-order non-linear oscillations, Pacific J. Math. 5 (1955), 643—647.
- [2] Jones J., On non-linear second-order differential equations, Proc. of the Am. Math. Soc. 9 (1958), 584—589.
- [3] Moore R. A. and Nehari Z., Nonoscillation theorems for a class of nonlinear differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959), 30—52.
- [4] Nehari Z., On a class of nonlinear second-order differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 101—123.
- [5] Belohorec Š., Oscilatorické riešenia istej nelineárnej diferenciálnej rovnice druhého rádu, Matematicko-fyzikálny časopis SAV 11 (1961), 250—255.

Došlo 5. 4. 1962.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Stavebnej fakulty Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

NONOSCILLATORY SOLUTIONS OF A CERTAIN NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER

Stefan Belohorec

Summary

In this paper are studied some properties of the nonlinear differential equation

$$y'' + \sum_{i=1}^n f_i(x) y^{N_i} = 0,$$

where $0 < N_i < 1$ and N_i ($i = 1, 2, \dots, n$) is supposed to be equal to $N_i = p_i/q_i$, p_i and q_i are odd integers. There are four theorems proved.

Theorem 1. Let the functions $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) be nonnegative in the interval $(0, \infty)$ and let them have there continuous derivatives $f_i'(x) \leq 0$, where an index j and a number $c > 0$ exist in such a way, that $f_j'(x) < 0$ in the interval (c, ∞) . Let us denote $\{x_m\}$, $\{x'_m\}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) the sequences of points such, that $y(x_m) = 0$, $y'(x'_m) = 0$ for some solution.

Then for every oscillatory solution $y(x) \equiv 0$ of the equation (1) the sequence $\{y'(x'_m)\}$ is decreasing and the sequence $\{y(x_m)\}$ is increasing. If we add

$$\int_{i=1}^n x f_i(x) dx < \infty,$$

then every solution $y(x) \equiv 0$ of the equation (1) is nonoscillatory.

Theorem 2. Let the functions $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) be nonnegative in the interval $(0, \infty)$ and let them have there continuous derivatives $f_i'(x) \leq 0$, where a number $c > 0$ and an index j exist in such a way, that $f_j'(x) > 0$ in the interval (c, ∞) . Then all solutions of the equation (1) are bounded and for every oscillatory solution $y(x) \equiv 0$ of the equation (1) the sequence $\{y'(x'_m)\}$ ($m = 1, 2, 3, \dots$) is increasing and the sequence $\{y(x_m)\}$ is decreasing.

Theorem 3. Let the functions $f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) be nonnegative and continuous in the interval $(0, \infty)$. Then a bounded nonoscillatory solution of the equation (1) exists if and only if

$$\int_{i=1}^n x f_i(x) dx < \infty.$$

Theorem 4. Let $N_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) be arbitrary real numbers. Let the functions $f_i(x)$ be nonnegative and continuous in the interval $(0, \infty)$. Then there exists an unbounded nonoscillatory solution of the equation (1), for which $y(x) \sim c_0 x$ ($c_0 > 0$) if and only if

$$\int_{i=1}^n x^{N_i} f_i(x) dx < \infty.$$