MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, XII, 4, 1962

О ВНЕШНЕЙ МЕРЕ КАРАТЭОДОРИ

ЗДЕНА РИЕЧАНОВА (ZDENA RIEČANOVÁ), Братислава

Внешней мерой Каратэодори мы называем всякую внешнюю меру определенную на системе X всех подмножеств метрического пространства X, для которой справедливо:

$$\text{Если} \quad \varrho(A, B) > 0, \text{ то } \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).^* \tag{1}$$

Следующая теорема хорошо известна:

(*C*) *Если μ внешняя мера Каратэодори, то всякое борелевское множество μ-измеримо.*

Таким образом введеное понятие внешней меры Каратэодори имеет смысл только в метрических пространствах. В настоящей работе мы попробуем оформлить определение внешней меры Каратэодори и формуляцию и доказательство теоремы (C) так, чтобы теорема (C) осталась справедливой тоже в некоторых более общих топологических пространствах.

Если X метрическое пространство, то $\varrho(A,B) > 0$ тогда и только тогда, если существуют открытые множества U, V так, что $\bar{A} \subset U$, $\bar{B} \subset V$ и $U \cap V = \emptyset$. Значит, условию (1) мы можем дать равносильную форму:

Если множества A, B таковы, что существуют к ним открытые не пересекающиеся множества U, V содержащие A, B соответственно, то

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B). \tag{2}$$

В предположениях условия (2) находятся теперь только понятия, которые не теряют смысл в общих топологических пространствах. Теорема (*C*) не содержит после этого оформления никаких метрических понятий. Однако, нам кажется удобным дать ей более подходящий вид:

(*C'*) *Если μ – внешняя мера Каратэодори, то всякое бэровское множество μ-измеримо.*

Бэровским множеством мы здесь понимаем в согласии с [1] всякое множество принадлежащее к наименьшему σ-кольцу содержащему все компактные G_δ множества. В метрических пространствах система бэровских множеств совпадает с системой борелевских множеств.

* Здесь знаком ϱ мы обозначаем расстояние в X и $\varrho(A, B) = \inf\{\varrho(x, y) : x \in A, y \in B\}$.

В теореме 1 настоящей работы доказана теорема (*C'*) при предположении, что X локально компактное хаусдорфово пространство.

Это расширение понятия внешней меры Каратэодори и теоремы (*C*) позволяет нам до некоторой степени расширить и теорему 1 из работы [3] в которой строилась мера при помощи множественной функции на сферах.

1

Мы будем пользоваться терминами и понятиями из теории меры согласно книге [1]. Под внешней мерой в X мы будем понимать внешнюю меру определенную на всех подмножествах X.

Определение 1. Пусть X — топологическое пространство.* Всякую внешнюю меру в X удовлетворящую условию (2) мы будем называть внешней мерой Катарэодори.

Идея доказательства, следующей теоремы принадлежит Каратэодори (см. тоже Сакс, [2], II, § 7).

Теорема 1. *Пусть X — локально компактное топологическое хаусдорфово пространство. Пусть μ — внешняя мера Каратэодори.*

Тогда всякое бэровское множество μ-измеримо.

Доказательство. Потому, что система всех бэровских множеств представляет собой наименьшее σ-кольцо содержащее компактные G_δ множества и μ-измеримые множества представляют собой σ-кольцо, нам достаточно доказать, что каждое компактное G_δ множество μ-измеримо.

Пусть C какое-нибудь компактное G_δ множество. Согласно теореме 3, [1], 212 существует непрерывная функция f, удовлетворяющая для каждого $x \in X$ неравенству $0 \leqq f(x) \leqq 1$ и такая, что $C = \{x : f(x) = 0\}$.

Определим $C_n = \left\{x : f(x) \leqq \frac{1}{n}\right\}$, $n = 1, 2, \dots$ Тогда множества C_n замкнуты и $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

Пусть $D \subset X - C$. Положим $D_n = D \cap (X - C_n)$, $n = 1, 2, \dots$ Мы покажем, что

$$\lim_{n \to \infty} \mu(D_n) = \mu(D). \tag{3}$$

Неравенство $\lim_{n\to\infty} \mu(D_n) \leqq \mu(D)$ очевидно, потому, что $D_n \subset D$, $n = 1, 2, \dots$ Покажем еще, что справедливо и обратное неравенство.

* Это обозначает, что в X определена система $\mathbf{T}$ открытых множеств содержащая $\emptyset$, X и замкнутая относительно образования всяких соединений и конечных пересечений.

Положим $E_n = D_{n+1} - D_n$, $n = 1, 2, \ldots$ Покажем, что существуют открытые множества U, V так, что

$$\bar{E}_{n+1} \subset U,\ \bar{D}_n \subset V \text{ и } U \cap V = \emptyset. \tag{4}$$

Для этой цели возмем любые числа a, b, c удовлетворяющие неравенству

$$\frac{1}{n+1} < a < b < c < \frac{1}{n}.$$

Обозначим $U_a = \{x : f(x) < a\}$, $U_b = x : f(x) \leqq b\}$, $U_c = \{x : f(x) < c\}$. Очевидно $C_{n+1} \subset U_a \subset U_b \subset U_c \subset C_n$ и U_a, U_c открытые множества, U_b замкнутое. Далее

$$\bar{E}_{n+1} = \overline{D_{n+2} - D_{n+1}} \subset \bar{C}_{n+1} = C_{n+1} \subset U_a,$$
$$\bar{D}_n \subset \overline{X - C_n} \subset \overline{X - U_c} = X - U_c \subset X - U_b \subset X - U_a.$$

Положим $U = U_a$, $V = X - U_b$. Множества U, V обладают свойством (4).

Из условий $\bigcup_{k=1}^{n} E_{2k} \subset D_{2n+1}$, $\bigcup_{k=1}^{n} E_{2k-1} \subset D_{2n}$ и монотонности μ мы получаем

$$\mu(D_{2n+1}) \geqq \mu(\bigcup_{k=1}^{n} E_{2k}),\ \mu(D_{2n}) \geqq \mu(\bigcup_{k=1}^{n} E_{2k-1}). \tag{5}$$

Из условий (4) и (2) мы получаем по индукции

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{n} E_{2k}) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_{2k}),\ \mu(\bigcup_{k=1}^{n} E_{2k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_{2k-1}). \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует

$$\mu(D_{2n+1}) \geqq \mu(\bigcup_{k=1}^{n} E_{2k}) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_{2k}),$$
$$\mu(D_{2n}) \geqq \mu(\bigcup_{k=1}^{n} E_{2k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \mu(E_{2k-1}). \tag{7}$$

Если хотя один из рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{2k}),\qquad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_{2k-1}) \tag{8}$$

расходится, то $\lim_{n\to\infty} \mu(D_n) = \infty$. Но тогда тоже $\mu(D) = \infty$ и значит, (3) справедливо.

Пусть теперь оба ряды (8) сходятся. Не трудно доказать, что справедливо

$$D = \bigcup_{n=2}^{\infty} D_n = \bigcup_{k=1}^{2n-1} E_k \cup \bigcup_{k=n}^{\infty} E_{2k} \cup \bigcup_{k=n+1}^{\infty} E_{2k-1},\quad \bigcup_{k=1}^{2n-1} E_k \subset D_{2n}. \tag{9}$$

Из счетной полуаддитивности μ и из (9) следует

$$\mu(D) \leqq \mu(D_{2n}) + \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_{2k}) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(E_{2k-1}). \tag{10}$$

Из сходимости рядов (8) следует

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_{2k}) = 0,\qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(E_{2k-1}) = 0.$$

Отсюда и из (10) следует $\lim_{n\to\infty} \mu(D_n) \geqq \mu(D)$.

Пусть теперь $A \subset X$ прозвольное множество. Мы хотим доказать, что справедливо

$$\mu(A \cap C) + \mu(A - C) = \mu(A). \tag{11}$$

Положим $D = A - C$ и определим множества D_n как уже было высше упомянуто. Для множеств $\overline{A \cap C}$ и $\bar{D}_n$ мы получаем

$$\overline{A \cap C} \subset \bar{C} = C \subset C_{n+1} \subset U_a = U.$$
$$\bar{D}_n \subset \overline{X - C_n} \subset \overline{X - U_c} = X - U_c \subset X - U_b = V,\ U \cap V = \emptyset.$$

Значит, в силу (2) справедливо

$$\mu(A \cap C) + \mu(D_n) = \mu[(A \cap C) \cup D_n]. \tag{12}$$

Легко проверить, что

$$(A \cap C) \cup D_n = (A \cap C) \cup [(A - C) \cap (X - C_n)] \subset (A \cap C) \cup (A - C) = A,$$

для всякого n. Отсюда

$$\mu[(A \cap C) \cup D_n] \leqq \mu(A). \tag{13}$$

Из (12) и (13) мы получаем для всякого n

$$\mu(A \cap C) + \mu(D_n) \leqq \mu(A). \tag{14}$$

В силу (3) и (14)

$$\mu(A \cap C) + \mu(A - C) \leqq \mu(A).$$

Потому, что обратное неравенство вытекает из полуаддитивности μ, отношение (11) доказано.

Следствие. *Пусть X локально компактное хаусдорфово пространство. Пусть μ — внешняя мера в X. Пусть для всех множеств A, B с не пересекающимися замыканиями*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B). \tag{15}$$

Тогда всякое бэровское множество μ-измеримо.

Заметка. Если X топологическое пространство, не являющееся нормальным, то условие (2) слабее чем условие (15). Если X нормально, то эти условия равносильны между собой.

2

В настоящей разделе мы используем результат теоремы 1 к конструкции меры, которая будет расширением множественной функции с какими — то свойствами, определенной на произвольной системе множеств.

Определение 2. Пусть $\mathbf{E}$ не пуская система подмножеств топологического пространства X. Мы будем говорить, что $\mathbf{E}$ покрывает множество $A \subset X$ в смысле Витали, если к произвольной точке $x \in A$ и к произвольному открытому множеству U такому, что $x \in U$ существуем множество $E \in \mathbf{E}$ так, что $x \in E \subset U$.

Определение 3. Пусть $\mathbf{E}$ покрывает X в смысле Витали, $\emptyset \in \mathbf{E}$. Пусть μ — множественная функция на $\mathbf{E}$, $\mu(E) \geqq 0$ для $E \in \mathbf{E}$, $\mu(\emptyset) = 0$. Мы будем говорить, что μ удовлетворяет условию (v) на $\mathbf{E}$, если к произвольному $\varepsilon > 0$, к произвольному множеству $E \in \mathbf{E}$ и к произвольной системе множеств $\mathbf{D} \subset \mathbf{E}$ покрывающей E в смысле Витали, существует последовательность множеств $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$, $E_i \in \mathbf{D}$, $i = 1, 2, \ldots$ так, что $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \supset E$ и $\mu(E) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i))$.

Определение 4. Пусть $\mathbf{E}$ — непустая система подмножеств топологического пространства X. Пусть μ — множественная функция определенная на $\mathbf{E}$. Мы будем говорить, что μ удовлетворяет на $\mathbf{E}$ условию (S) если для любых множеств E, $E_i \in \mathbf{E}$, $i = 1, 2, \ldots$, $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ справедливо $\mu(E) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$.

Теорема 2. *Пусть X топологическое пространство, $\mathbf{E}$ непустая система подмножеств X, покрывающая X в смысле Витали $\emptyset \in \mathbf{E}$. Пусть μ — множественная функция определенная на $\mathbf{E}$, неотрицательная, в пустом множестве равна 0 и удовлетворяющая на $\mathbf{E}$ условиям (v) и (S). Пусть*

$$\mu^*(A) = \inf \{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_k) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_k,\ E_k \in \mathbf{E},\ i = 1, 2, \ldots\}. \tag{16}$$

Тогда μ^* — внешняя мера в X, $\mu^*(A) = \mu(A)$ для $A \in \mathbf{E}$ и $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ для любых A, B с не пересекающимися замыканиями; следовательно, μ^* — внешняя мера Каратэодори.

Доказательство. Не трудно показать, что μ^* — внешняя мера в X. Равенство $\mu^*(A) = \mu(A)$ для $A \in \mathbf{E}$ следует из (16) и условия (S). Значит, довольно доказать, что если $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$, то $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$. Потому, что $\mu^*(A \cup B) \leqq \mu^*(A) + \mu^*(B)$ всегда имеет место, довольно доказать обратное неравенство, т. е.

$$\mu^*(A \cup B) \geqq \mu^*(A) + \mu^*(B). \tag{17}$$

Если $\mu^*(A \cup B) = \infty$, то (17) выполняется очевидно. Пусть $\mu^*(A \cup B) < \infty$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Из определения μ^* следует существование такой последовательности множеств $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ что $E_i \in \mathbf{E}$, $i = 1, 2, \ldots$, и $A \cup B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ и

$$\mu^*(A \cup B) + \varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i). \tag{18}$$

Обозначим знаком $\mathbf{D}$ систему всех возможных множеств $E \in \mathbf{E}$ для которых или $E \subset X - \bar{A}$, или $E \subset X - \bar{B}$. Очевидно $(X - \bar{A}) \cup (X - \bar{B}) = X - \bar{A} \cap \bar{B} = X$ и $X - \bar{A}$, $X - \bar{B}$ открытые. Отсюда вытекает, что $\mathbf{D}$ покрывает X а следовательно и E_i $(i = 1, 2, \ldots)$ в смысле Витали.

В силу условия (v) к множеству E_i и системе $\mathbf{D}$ существует последовательность множеств $\{D_n^i\}_{n=1}^{\infty}$, $D_n^i \in \mathbf{D}$, $n = 1, 2, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots$ так, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^i \supset E_i$ и

$$\mu(E_i) + 2^{-i}\varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n^i). \tag{19}$$

Обозначим знаком N множество всех возможных пар (i, n), для которых $D_n^i \subset X - \bar{A}$ и знаком M множество всех возможных пар (i, n) для которых $D_n^i \subset X - \bar{B}$. Очевидно, $A \subset \bigcup_{(i,n) \in M} D_n^i$, $B \subset \bigcup_{(i,n) \in N} D_n^i$, $A \cup B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n^i$.

Из этих соотношений и из неравенств (18) и (19) мы получаем

$$\mu^*(A \cup B) + 2\varepsilon > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) + \varepsilon \geqq \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n^i) \geqq$$
$$\geqq \sum_{(i,n) \in M} \mu(D_n^i) + \sum_{(i,n) \in N} \mu(D_n^i) \geqq \mu^*(A) + \mu^*(B), \blacksquare$$

из чего непосредственно вытекает (17).

Из теорем 1 и 2 вытеакет следующее предложение (см. тоже [3] теорема 1, стр. 51):

Теорема 3. *Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство. Пусть $\mathbf{E}$, μ удовлетворяют предположениям теоремы 2. Пусть μ^* — множественная функция в X определенная равенством (16).*

Тогда функция $\bar{\mu}$ определенная на системе бэровских множеств равенством $\bar{\mu}(A) = \mu^*(A)$ является мерой на этой системе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Halmos P. R., *Measure Theory*, New York 1950 (по русски: Теория меры, Москва 1955).
[2] Saks S., *Theory of the Integral*, New York 1937.
[3] Riečan B., *Poznámky ku konštrukcii miery*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV 12 (1962), 47—59.

Поступило 17. 3. 1962 г.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Elektrotechnickej fakulty Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

ON THE CARACTHÉODORY OUTER MEASURE

Zdena Riečanová

Summary

In this paper a generalisation of certain Caracthéodory's theorem and some its corollaries are given.

Let X be a topological space. Denote by $\mathbf{B}$ the smallest σ-ring that includes all compact G_δ sets in X. Every set $M \in \mathbf{B}$ will be called Baire set.

Let now μ be an outer measure defined for all sets in the space X. μ will be called outer Caracthéodory measure if the following is true:

Let A, B are any sets in X such that there exits U, V open, disjoint and including $\bar{A}$, $\bar{B}$ respectively ($\bar{A}$ denotes the closure of A). Then $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

The following theorem is proved:

Theorem 1. Let X be a localy compact Hausdorff topological space. Let μ be an outer Caracthéodory measure.

Then every Baire set in X is μ-measurable.