MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK 12 1962 ČÍSLO 4

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛА

ИГОРЬ КЛУВАНЕК (Igor Kluvánek), Братислава

Пусть P — любое топологическое пространство, а X — банаховское пространство. Обозначим через $\mathbf{C}_{00} = \mathbf{C}_{00}(P)$ множество всех вещественных функций на P, равных нулю вне компактных множеств.*

В статье [1] доказывается утверждение:

Линейное отображение T пространства $\mathbf{C}_{00}$ в X, непрерывное в топологии равномерной сходимости пространства $\mathbf{C}_{00}$, представимо в виде

$$T(f) = \int f \, d\mu, \qquad f \in \mathbf{C}_{00}, \tag{1}$$

где μ некоторая (σ-адитивная) векторная мера с значениями из X, тогда и только тогда, если для каждой функции $g \in \mathbf{C}_{00}$, $g \geqq 0$, множество $\{T(f) = |f| \leqq g, f \in \mathbf{C}_{00}\}$ является слабо относительно компактным в X.

Цель настояжей статьи — доказать, что это утверждение справедливо и без предположения о непрерывности отображения T. Обобщение, полученное таким образом, может быть интересным, так как многие отображения не являющиеся непрерывными, представими в виде (1).

Пример 1. Пусть $P = (-\infty, \infty)$ с обычной топологией действительной прямой. Пусть X — множество всех вещественных чисел. Определим T при помощи формулы

$$T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \, dt, \qquad f \in \mathbf{C}_{00}(P),$$

причем на правой стороне стоит обычный интеграл Лебега. Отображение T — не непрерывно, но прямо определено в виде (1).

Пример 2. Пусть $P = (-\infty, \infty)$, $X = L^1(-\infty, \infty)$. Определим $T(f) = \varphi$ для всякого $f \in C_{00}$ таким образом, что для каждого $p \in P$ положим $\varphi(p) = f(p)$,

---

* Предположение, что P является топологическим пространством, значит, только, что задано семейство открытых множеств в P, которое содержит $\emptyset$, P, объединение любого подсемейства и пересечение любого конечного подсемейства. Другие свойства, напр. аксиомы отделимости, не предполагаем.

Множество A является компактным, если каждое семейство открытых множеств, покрывающее A, содержит конечное подсемейство, покрывающее A.

но φ понимаем как элемент пространства $L^1(-\infty, \infty)$ с нормой $\|\varphi\| = \int |\varphi(t)|\, dt$. Снова не трудно убедиться в том, что отображение T не является непрерывным, если $\mathbf{C}_{00}$ наделено топологией, определенной при помощи нормы $\|f\| = \sup |f(p)|$. Отображение T представимо в виде (1). В качестве μ возьмем векторную меру, значениям которой для всякого ограниченного борелевского множества E на прямой является его характеристическая функция, рассматриваемая как элемент пространства $L^1(-\infty, \infty)$.

Переходим теперь к формулированию и доказательству главного результата. В самом деле докажем несколько более общую теорему. Сначала введем некоторые обозначения.

X^* обозначает пространство всех непрерывных линейных функционалов на X.

Пусть $\mathbf{E}$ — векторная решетка, элементами которой служат вещественные функции, определенные на P (не обязательно непрерывные; в самом деле, в следующих определениях и в теореме не нужно предполагать, что задана топология на P). Отображение T переводящее $\mathbf{E}$ в X называется линейным, если $T(\alpha f + \beta g) = \alpha T(f) + \beta T(g)$ для всех $f, g \in \mathbf{E}$ и вещественных чисел α, β. Неотрицательный линейный функционал на $\mathbf{E}$ — это линейное отображение I решетки $\mathbf{E}$ в множество вещественных чисел обладающее таким свойством, что $I(f) \geqq 0$ для $f \geqq 0, f \in \mathbf{E}$.

Будем говорить, что E или T обладает соответственно свойством (*i*), (*ii*), (*iii*), (*iv*), (*v*), если имеет место соответствующее с приведенных здесь утверждений:

(*i*) $\min\{f, 1\} \in \mathbf{E}$ для всякого $f \in \mathbf{E}$.

(*ii*) Если $g \in \mathbf{E}$, $f_n \in \mathbf{E}$, $|f_n| \leqq g$, $n = 1, 2, \ldots$, и $f(p) = \lim f_n(p)$ для всех $p \in P$, то $f \in \mathbf{E}$.

(*iii*) Если $f_n \in \mathbf{E}, f_n \geqq f_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim f_n(p) = 0, p \in P$, то $\lim x^*(T(f_n)) = 0$ для всех $x^* \in X^*$.

(*iv*) Для каждого $g \in \mathbf{E}$, $g \geqq 0$, множество $\{T(f) : |f| \leqq g, f \in \mathbf{E}\}$ слабо относительно компактно в X.

(*v*) Если $f_n \in \mathbf{E}$, $f_n \geqq f_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ и $\lim f_n(p) = 0$, $p \in P$, то $\lim I(f_n) = 0$ для всякого неотрицательного линейного функционала I на $\mathbf{E}$.*

Утверждение „T представимо в виде интеграла" значит, что существует δ-кольцо подмножеств пространства P и такая векторная мера μ со значениями из X на нем, что $T(f) = \int f\, d\mu$ для каждой функции $f \in \mathbf{E}$.

Определение и основные свойства интеграла приведены в [1].

Теорема. *Линейное отображение T векторной решетки $\mathbf{E}$ функций на P со свойствами (i) и (v) в пространство X представимо в виде интеграла тогда и только тогда, если оно обладает свойством (iv).*

При доказательстве того, что приведенное условие является достаточным

* См. [2], где свойство (*v*) обозначается (*J*).

используем два утверждения из [1], которые для удобства цитируем (несколько приспособленные для наших целей):

Пусть $\mathbf{E}$ — векторная решетка функций, T — линейное отображение $\mathbf{E}$ в X, обладающее свойствами (*iii*) и (*iv*). Тогда существует линейная решетка $\mathbf{E}_1$ и линейное отображение T_1 со значениями из X на ней так, что $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}_1$; $T_1(f) = T(f)$ для $f \in \mathbf{E}$; $\mathbf{E}_1$ имеет свойство (*ii*); T_1 имеет свойство (*iii*).

Если $\mathbf{E}_2$ – линейная решетка функций со свойсрвами (*i*) и (*ii*) и T_2 – линейное отображение из $\mathbf{E}_2$ в X со свойством (*iii*), То T_2 представимо в виде интеграла.

Пусть выпольнены предположения теоремы и пусть T обладает свойством (*iv*). Докажем сначала, что для T имеет место (*iii*). Пусть $x^* \in X^*$. Для всякой функции $g \in \mathbf{E}$, $g \geqq 0$, положим

$$I(g) = 2 \sup \{\operatorname{Re} x^*(T(f)) : 0 \leqq f \leqq g, f \in \mathbf{E}\} +$$
$$+ 2 \sup \{\operatorname{Im} x^*(T(f)) : 0 \leqq f \leqq g, f \in \mathbf{E}\} - \operatorname{Re} x^*(T(g)) - \operatorname{Im} x^*(T(g)).$$

(I зависит тоже от x^*, но ради простоты в обозначении мы это не выразили.) По предположению, что для T имеет место (*iv*), $I(g) < \infty$ для каждого $g \in \mathbf{E}$, $g \geqq 0$.

Далее для каждой функции $f \in \mathbf{E}$ положим

$$I(f) = I(\max\{f, 0\}) - I(-\min\{f, 0\}).$$

Не трудно доказать, что I — неотрицательный линейный функционал на $\mathbf{E}$ (см. напр. [3], стр. 134—135). Имея в виду, что $|x^*(T(f))| \leqq I(|f|)$ для $f \in \mathbf{E}$ и что для $\mathbf{E}$ имеет место (*v*), мы получаем, что T обладает свойством (*iii*).

В силу приведенного утверждения существует векторная решетка $\mathbf{E}_1$ и линейно отображение T_1 решетки $\mathbf{E}_1$ в X, причем $\mathbf{E}_1 \supset \mathbf{E}$; $T_1(f) = T(f)$ для $f \in \mathbf{E}$; $\mathbf{E}_1$ обладает свойством (*ii*); T_1 обладает свойством (*iii*).

Докажем теперь, что существует такая векторная решетка $\mathbf{E}_2$ со свойствами (*i*) и (*ii*) и линейное отображение T_2 решетки $\mathbf{E}_2$ в X со свойством (*iii*), что $\mathbf{E} \subset \mathbf{E}_2$; $T_2(f) = T(f)$ для $f \in \mathbf{E}$.

Обозначим через Λ семейство всех векторных решеток $\mathbf{F}$ со свойством (*i*), для которых $\mathbf{E} \subset \mathbf{F} \subset \mathbf{E}_1$. Семейство Λ частично упорядочено по включению. Легко убедиться в том, что для него выполнены предположения леммы Цорна. По этой лемме Λ содержит максимальный элемент $\mathbf{E}_2$. Очевидно, $\mathbf{E}_2$ обладает свойством (*i*). Докажем, что $\mathbf{E}_2$ имеет также свойство (*ii*).

Обозначим через $\mathbf{E}_3$ множество всех функций f на P, к которым существует $g \in \mathbf{E}_2$ и функции $f_n \in \mathbf{E}_2$, $n = 1, 2, \ldots$, так что $|f_n| \leqq g$ и $f(p) = \lim f_n(p), p \in P$. Очевидно, $\mathbf{E}_3 \in \Lambda$, $\mathbf{E}_2 \subset \mathbf{E}_3$. Но $\mathbf{E}_2$ — максимальный элемент семейства Λ, следовательно, $\mathbf{E}_3 = \mathbf{E}_2$. Значит, $\mathbf{E}_2$ обладает свойством (*ii*).

Положим $T_2(f) = T_1(f)$ для всех $f \in \mathbf{E}_2$. Очевидно, $\mathbf{E}_2$ и T_2 обладают всем требуемыми свойствами. В силу второго из утверждений, приведенных в начале доказательства, T_2 представимо в виде интеграла. Потому, что $T_2(f) = T(f)$ для $f \in \mathbf{E}$, T тоже представимо в виде интеграла.

Пусть теперь T представимо в виде интеграла относительно некоторой векторной меры μ. По [1] множество всех μ-интегрируемых функций является векторной решеткой со свойством (*ii*) и интеграл — линейное отображение на ней, обладающее свойствами (*iii*) и (*iv*). Из этого следует, что T обладает свойством (*iv*).

Приведем несколько следствий доказанной теоремы, в которых будет играть некоторую роль тоже топология пространства P. В этих следствиях в $\mathbf{E}$ будут входить только непрерывные функции.

Обозначим через $\mathbf{C} = \mathbf{C}(P)$ множество всех непрерывных функций на P (тоже неограниченных, если существуют такие). Пусть далее $\mathbf{C}_0 = \mathbf{C}_0(P)$ обозначает множество всех непрерывных функций на P, „обращающихся в нуль на бесконечности". Выражение в кавычках означает то чно,что для $\varepsilon > 0$ и $f \in \mathbf{C}_0$ множество $\{p : |f(p)| \geqq \varepsilon\}$ содержится в некотором компактном подмножестве пространства P (завысящем от ε и f). Пусть значение $\mathbf{C}_{00}$ таково, как в начале статьи.

Следствие 1. *Пусть $\mathbf{E}$ — векторная решетка со свойством (i), $\mathbf{E} \subset \mathbf{C}_0$, и пусть для каждой функции $f \in \mathbf{E}$, $f \geqq 0$, существует функция $g \in \mathbf{E}$ такая, что $\sqrt{f} \leqq g$. Линейное отображение $\mathbf{E}$ в X представимо в виде интеграла тогда и только тогда, если оно обладает свойством (iv).*

В силу теоремы достаточно доказать, что для $\mathbf{E}$ имеет место (*v*). Это сделаем следующим способом (см. [4]). Пусть I — неотрицательный линейный функционал на $\mathbf{E}$. Обозначим $\|f\| = \sup_{p \in P} |f(p)|$ для $f \in \mathbf{C}_0$. Пусть $f_n \in \mathbf{E}$, $f_n \geqq f_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ и $\lim f_n(p) = 0$ для $p \in P$. По предположению существует $g \in \mathbf{E}$ такое, что $\sqrt{f_1} \leqq g$. Очевидно, $f_n \leqq \sqrt{\|f_n\|}\,\sqrt{f_1} \leqq \sqrt{\|f_n\|}\, g$ и, следовательно, $0 \leqq I(f_n) \leqq \sqrt{\|f_n\|}\, I(g)$. Так как $f_n \in \mathbf{C}_0$, $n = 1, 2, \ldots$, из монотонной сходимости вытекает равномерная, значит $\lim \|f_n\| = 0$ и, далее $\lim I(f_n) = 0$. Это и означает, что $\mathbf{E}$ обладает свойством (*v*).

Следствие 2. *Пусть $\mathbf{E}$ — векторное пространство $\mathbf{E} \subset \mathbf{C}$. Пусть имеет место: Если $f \in \mathbf{C}$, $g \in \mathbf{E}$, $\{p : f(p) \neq 0\} \subset \{p : g(p) \neq 0\}$ то $f \in \mathbf{E}$. Линейное отображение $\mathbf{E}$ в X представимо в виде интеграла тогда и только тогда, когда оно обладает свойством (iv).*

Из предположений следует, что $\mathbf{E}$ — векторная решетка. Снова достаточно доказать, что для $\mathbf{E}$ имеет место (*v*). Но это доказывается в [2], стр. 478.

Если $P = (-\infty, \infty)$ и в следствии 1 в качестве $\mathbf{E}$ возьмем множество всех функций из $\mathbf{C}_0$, постоянных в интервале $\langle 0, 1 \rangle$, то видим, что следствие 1 невозможно вывести из следствия 2. Если, наоборот, в следствии 2 приймем $\mathbf{E} = \mathbf{C}$, видим, что следствие 2 не вытекает из следствия 1. Но из обоих вытекает следующее следствие, представляющее утверждение, обещанное в начале статьи.

Следствие 3. *Линейное отображение $\mathbf{C}_{00}$ в X представимо в виде интеграла тогда и только тогда, если оно обладает свойством (iv).*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kluvánek I., *Некоторые обобщения теоремы Риса-Какутани,* Чехослов. мат. журнал. 13 (88) (1963). В печати.

[2] Mařík J., *Представление функционала в виде интеграла,* Чехослов. мат. журнал 5 (80) (1955), 467—487.

[3] Riesz F., Sz.-Nagy B., *Leçons d'Analyse fonctionelle,* Budapest 1952.

[4] Varadarajan V. S., *On a theorem of F. Riesz concerning the form of linear functionals,* Fund. Math. XLVI (1959), 209—220.

Поступило 10. 3. 1962 г.

Katedra matematiky a deskriptívnej geometrie
Elektrotechnickej fakulty Slovenskej vysokej školy technickej
v Bratislave

ON THE REPRESENTATION OF LINEAR TRANSFORMATIONS IN FORM OF INTEGRAL

Igor Kluvánek

Summary

Let X be a Banach space and let P be an arbitrary set. Suppose $\mathbf{E}$ be a linear lattice of real-valued functions on P with the following properties:

$\min\{f, 1\} \in \mathbf{E}$ for every $f \in \mathbf{E}$.

For any non-negative linear functional I on $\mathbf{E}$ (i. e. $I(f) \geqq 0$ for $f \in \mathbf{E}$, $f \geqq 0$, and $I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$ for $f, g \in \mathbf{E}$ and α, β real), and for any sequence $\{f_n\}$ such that $f_n \in \mathbf{E}$, $f_n \geqq f_{n+1}$ $n = 1, 2, \ldots$, and $\lim f_n = 0$, holds the relation $\lim I(f_n) = 0$.

It is proved, that a linear tranformation $T : \mathbf{E} \to X$ (no matter if continuous in any topology or not) may by writen in the form

$$T(f) = \int f \, d\mu, \quad f \in \mathbf{E},$$

where μ is some X-valued measure defined on a δ-ring of subsets of P, if and only if, for every $g \in \mathbf{E}$, $g \geqq 0$, the set

$$\{T(f) : |f| \leqq g, \ f \in \mathbf{E}\}$$

is relatively weakly compact in X. (The definition and basic properties of integral are to be found in [1].)

From this theorem some corrolaries are derived for the case P is a topological space and $\mathbf{E}$ consists of continuous functions. E. g. $\mathbf{E}$ may be the linear lattice of all continuous functions with compact support.