О РАДИКАЛАХ ПОЛУГРУПП

ЮРАЙ БОСАК (JURAJ BOSÁK), Братислава

1

Для полугрупп с ядром до сих пор изучались четыре вида радикалов: $R(S)$, $M(S)$, $R^*(S)$, $C(S)$. (Их определения и названия приводятся ниже.) Йианг Луг (Jiang Luh) доказал в [1] справедливость в общем случае соотношения $R(S) \subseteq M(S) \subseteq R^*(S) \subseteq C(S)$, но оставил открытым вопрос о том, имеет ли в общем случае место более сильное утверждение $R(S) = M(S) = R^*(S) = C(S)$, которое верно, например, в коммутативном случае. В настоящей заметке мы приводим четыре примера, в которых $R(S) \neq M(S)$, $M(S) \neq R^*(S)$, $R^*(S) \neq C(S)$, $R(S) \neq R^*(S)$ соответственно.

2

Названиями и обозначениями, которые здесь не объяснены, мы пользуемся согласно [2].

Минимальный двусторонний идеал полугруппы S (если он существует) мы называем ядром полугруппы S. В дальнейшем предполагается, что задана полугруппа S с ядром $K(S)$. Элемент $x \in S$ мы называем нильпотентным, если существует такое натуральное число n, что $x^n \in K(S)$.

Идеал I полугруппы S назовем:

1. нильпотентным, если существует такое натуральное число n, что $I^n \subseteq K(S)$;
2. ниль-идеалом, если каждый его элемент является нильпотентным;
3. простым идеалом, если для произвольной пары таких двусторонних идеалов A, B полугруппы S, что $AB \subseteq I$, имеет место или $A \subseteq I$ или $B \subseteq I$;
4. вполне простым идеалом, если для любой пары таких элементов a, b полугруппы S, что $ab \in I$, имеет место или $a \in I$ или $b \in I$;
5. главным идеалом, порожденным элементом $x \in S$, если

$$I = x \cup Sx \cup xS \cup SxS.$$

Будем его обозначать через I_x.

Определения радикалов полугруппы с ядром мы вводим согласно [1]. (Формально другим является только определение радикала Мак Койа. Однако, из результатов статьи [1] вытекает также равносильность нашего определения с определением в [1].)

Радикалом Шварца (Š. Schwarz) полугруппы S называется объединение $R(S)$ всех двусторонних нильпотентних идеалов полугруппы S.

Радикалом Мак Койа (N. H. McCoy) полугруппы S называется пересечение $M(S)$ всех двусторонних простых идеалов полугруппы S.

Радикалом Клифорда (A. H. Clifford) полугруппы S называется объединение $R^*(S)$ всех двусторонних ниль-идеалов полугруппы S.

Вполне простым радикалом полугруппы S называется пересечение $C(S)$ всех двусторонних вполне простых идеалов полугруппы S.

3

Построим полугруппу S, для которой $R(S) \neq M(S)$.

Пусть S — свободная полугруппа над алфавитом $\{0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, заданная определяющей совокупностью соотношений

$$0a_i = a_i0 = (a_i)^2 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$a_1xa_i = 0 \qquad (i = 2, 3, 4, \ldots;\ x \in S)$$

Очевидно, любой элемент полугруппы S, заданный при помощи некоторого слова W в приведенном алфавите, равен 0 тогда и только тогда, когда наступает один из следующих случаев: 1. Слово W содержит букву 0; 2. слово W содержит непосредственно друг за другом (по крайней мере) дважды букву a_1; 3. слово W содержит (по крайней мере) дважды одну из букв $a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}, \ldots$. Далее очевидно, что элементы полугруппы S, отличные от элемента 0 (который является нулем полугруппы), можно представить при помощи слов в данном алфавите точно одним способом и что $K(S) = 0$.

Теперь покажем, что $R(S) = S - a_1$.* Ввиду того, что для всякого натурального числа n есть $0 \neq a_1a_2a_1a_3 \ldots a_1a_{n+1} \in (I_{a_1})^n$, I_{a_1} не является нильпотентным идеалом. Поэтому элемент a_1 не принадлежит никакому двустороннему нильпотентному идеалу полугруппы S, а значит, ни $R(S)$. Но все остальные элементы полугруппы S принадлежат $R(S)$, как это вытекает из отношений

$$S = a_1 \cup \sum_{i=2}^{\infty} I_{a_i} \tag{1}$$

$$(I_{a_i})^2 = 0 \qquad (i = 2, 3, 4, \ldots) \tag{2}$$

Тем самым доказано соотношение $R(S) = S - a_1$.

Далее докажем, что $M(S) = S$. Достаточно показать, что существует един-

* Так мы обозначаем разность множеств $S, \{a_1\}$. Аналогичными обозначениями мы пользуемся в целом тексте.

ственный двусторонний простой идеал полугруппы S, а именно S. Пусть P — двусторонний простой идеал полугруппы S. Очевидно, $0 \in P$. Далее, всякое a_i, где $i > 1$, принадлежит P. В противном случае не могло бы P быть простым идеалом, ибо тогда было бы $I_{a_i}I_{a_i} = 0 \subseteq P$, но в то же время не имело бы места $I_{a_i} \subseteq P$. Согласно соотношению (1) справедливо $S - a_1 \subseteq P$. Если бы $a_1 \notin P$, то P не было бы простым идеалом, так как было бы $I_{a_1}I_{a_1} \subseteq P$, хотя не имело бы места $I_{a_1} \subseteq P$. Поэтому также $a_1 \in P$. Из приведенного непосредственно вытекает, что $P = S$. S является, очевидно, двусторонним простым идеалом, так что $M(S) = S$.

Из соотношений $R(S) = S - a_1$, $M(S) = S$ вытекает $R(S) \neq M(S)$.

4

Построим полугруппу S, для которой $M(S) \neq R^*(S)$.

Пусть S — свободная полугруппа над алфавитом $\{0, a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ заданная определяющей совокупностью соотношений

$$0x = x0 = 0 \qquad (x \in S)$$
$$x^2 = 0 \qquad (x \in S)$$

Очевидно, $K(S) = 0$. Прежде всего докажем, что I_{a_i} является для произвольного натурального числа i простым идеалом. Пусть A, B — двусторонние идеалы такие, что $AB \subseteq I_{a_i}$. Если не имеет места ни $A \subseteq I_{a_i}$ ни $B \subseteq I_{a_i}$, то необходимо существуют элементы $x \in A$, $y \in B$ такие, что $x \notin I_{a_i}$, $y \notin I_{a_i}$. Тогда, очевидно, $x \neq 0$, $y \neq 0$, так что элементы x, y можно представить единственным способом как слово из данного алфавита. Выберем такую букву $a(a \neq 0$, $a \neq a_i)$ из нашего алфавита, которая не встречается ни в одном из этих двух слов. Очевидно, имеет место $xay \in AB \subseteq I_{a_i}$ и так как $xay \neq 0$, элемент xay имеет тоже однозначное выражение. Из условий $xay \neq 0$, $xay \in I_{a_i}$ вытекает, что слово, соответствующее элементу xay, необходимо содержит букву a_i. Но это невозможно, потому, что ни одно из слов, соответствующих элементам x, a, y, не содержит букву a_i.

Теперь мы уже можем определить $M(S)$. Каждый простой идеал содержит элемент 0. $I_{a_1}, I_{a_2}, I_{a_3}, \ldots$ являются простыми идеалами. Их пересечением является 0. (Дело в том, что если бы один из элементов полугруппы S, отличный от нуля, принадлежал этому пересечению, то соответствующее ему слово должно было бы содержать все буквы из нашего алфавита, что невозможно, так как этот алфавит состоит из бесконечного числа букв.) Значит, и подавно $M(S) = 0$.

С другой стороны, вся полугруппа S является ниль-идеалом, так что $R^*(S) = S$. Поэтому $M(S) \neq R^*(S)$.

5

Теперь мы построим полугруппу S, для которой $R^*(S) \neq C(S)$.

Пусть S — свободная полугруппа над алфавитом $\{0, a, b\}$ с определяющей совокупностью соотношений

$$0a = a0 = 0b = b0 = 0$$
$$ab^2 = 0$$

Даже в этом случае $K(S) = 0$. Очевидно, элемент ab не является нильпотентным, так что $ab \notin R^*(S)$. Докажем, что $ab \in C(S)$. Очевидно, ab принадлежит по крайней мере одному двустороннему вполне простому идеалу полугруппы S (например, S). Покажем, что ab принадлежит произвольному двустороннему вполне простому идеалу P полугруппы S. Допустим, что $ab \notin P$. Из условия $ab \,.\, b = 0 \in P$ тогда вытекает, что $b \in P$. Так как P является двусторонним идеалом, то и $ab \in P$, что противоречит выше сказанному.

Из приведенных результатов вытекает, что $R^*(S) \neq C(S)$. Более подробным анализом можно установить, что

$$R^*(S) = \{b^2a\} \cup \{b^2ab\} \cup \{b^2xa \mid x \in S\} \cup \{b^2xab \mid x \in S\}$$
$$C(S) = S - \{a, a^2, a^3, \ldots, b, b^2, b^3, \ldots\}$$

6

Автор [1] говорит, что ему не знаком ни один пример полугруппы S, для которой $R(S) \neq R^*(S)$. Из отношений $R(S) \subseteq M(S) \subseteq R^*(S)$ вытекает, что полугруппы, которые мы построили в разделах 3 и 4, обладают требуемым свойством. Это — свободные полугруппы с бесконечным числом образующих элементов. Теперь мы построим еще пример полугруппы S с конечным числом образующих элементов, для которой радикал Шварца $R(S)$ не равен радикалу Клифорда $R^*(S)$.

Пусть S — свободная полугруппа над алфавитом $\{0, a, b\}$, заданная определяющей совокупностью соотношений

$$0x = x0 = 0 \qquad (x \in S)$$
$$x^3 = 0 \qquad (x \in S)$$

Здесь снова $K(S) = 0$. Так как вся полугруппа S является ниль-идеалом, справедливо, что $R^*(S) = S$. Покажем, что $R(S) \neq R^*(S)$.

В [3] была рассмотрена последовательность

abbabaabbaababbabaababbaabbabaabb…,

содержающая бесконечное число букв a и букв b, причем ни одна группа букв не повторяется непосредственно друг за другом три раза. Отсюда вытекает для всякого натурального числа n существование элемента $x \in S$, $x \neq 0$, который, представленный в форме слова из данного алфавита, содержит n раз, например, букву a. Это значит, что для всякого натурального числа n имеет место $(I_a)^n \neq 0$, так что — согласно [1] — српаведливо $a \bar{\in} R(S)$, и так как $a \in S = R^*(S)$, то $R(S) \neq R^*(S)$.

Заметим, что $R(S)$ содержит кроме 0 тоже другие элементы, например, элемент $c = a^2ba^2ba^2$ (ибо $(I_c)^2 = 0$) и $d = a^2b^2a^2b^2a^2$ (ибо $(I_d)^3 = 0$).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Jiang Luh, *On the Concepts of Radical of Semigroup Having Kernel*, Portugaliae Mathematica, 19 (1960), 189—198.

[2] Ляпин Е. С., *Полугруппы*, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва 1960.

[3] Morse M., Hedlund G. A., *Symbolic Dynamics*, American Journal of Mathematics, 60 (1938), 815—866.

Поступило 4. 5. 1962 г.

Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie vied
v Bratislave

ON RADICALS OF SEMIGROUPS

Juraj Bosák

Summary

In [1] Jiang Luh has studied four concepts of the radical (denoted by $R(S)$, $M(S)$, $R^*(S)$, $C(S)$) of a semigroup S having a kernel and he proposed to construct examples of semigroups for which $R(S) \neq M(S)$, $M(S) \neq R^*(S)$, $R^*(S) \neq C(S)$ or $R(S) \neq R^*(S)$ respectively. Such examples are given in the present paper. All four examples here are constructed in the form of free semigroups with some generating relations.