POZNÁMKA K JEDNOMU ČLÁNKU P. TURÁNA

JOSEF KAUCKÝ, Bratislava

1. P. Turán v článku [1] dokazuje kombinatorickou identitu

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{n+2k-j}{2k} = \binom{n+k}{k}^2, \tag{1}$$

kterou v roce 1867 bez důkazu uveřejnil čínsky matematik Le-Jen Shoo.

Jeho důkaz spočívá v tom, že dvojím způsobem počítá hodnotu výrazu

$$A = -\frac{1}{k!}\left\{\frac{d^k}{dz^k}\left(z^k(z+x)^{-k-1}\right)\right\}_{z=-1}.$$

Jedním způsobem získává vztah

$$A = \left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{2k+\nu}{2k}x^\nu\right\} \times \left\{\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\binom{k+\nu}{k}(x-1)^{k-\nu}\right\}, \tag{2}$$

druhým způsobem dostává rovnici

$$A = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k+n}{k}^2 x^n. \tag{3}$$

2. K úpravě výrazu (2) užívá vztahu

$$\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}^2 x^\nu = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\binom{k+\nu}{k}(x-1)^{k-\nu}, \tag{4}$$

který dokazuje na základě některých vlastností Legendreových polynomů.

Je-li

$$P_k(x) = \frac{1}{k!2^k}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k$$

k-tý Legendreův polynom, pak Hurwitzova formule dává

$$(1-x)^k P_k\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}^2 x^\nu. \tag{5}$$

Z diferenciální rovnice

$$(1-x^2)P_k''(x) - 2xP_k'(x) + k(k+1)P_k(x) = 0$$

a z podmínek

$$P_k(1) = 1, \quad P_k(-1) = (-1)^k$$

se dále dostane vztah

$$P_k(t) = \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^{k-\nu}\binom{k}{\nu}\binom{k+\nu}{k}\left(\frac{1+t}{2}\right)^\nu,$$

odkud pomocí substituce

$$t = \frac{1+x}{1-x}$$

vychází

$$(1-x)^k P_k\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\binom{k+\nu}{k}(x-1)^{k-\nu}. \tag{6}$$

Porovnáním výsledků (5) a (6) vychází vztah (4).

Pomocí (4) nabývá výraz (2) tvaru

$$A = \left\{\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{2k+\nu}{2k}x^\nu\right\}\cdot\left\{\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}^2 x^j\right\}$$

a porovnáním koeficientů u x^n v rozvoji tohoto výrazu a výrazu (3) vychází identita (1).

3. Nyní ukáži, jak lze vztah (4) odvodit elementárním způsobem přímo.

Položíme-li v součtu na levé straně této rovnice $(x-1)+1$ za x a užijeme-li binomické věty, máme předně

$$\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}^2 x^\nu = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}^2[(x-1)+1]^\nu = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}^2\sum_{l=0}^{\nu}\binom{\nu}{l}(x-1)^l.$$

Vyměníme-li pořadí sumací ve dvojnásobném součtu na pravé straně podle pravidla

$$\sum_{\nu=0}^{k}\sum_{l=0}^{\nu}\ldots = \sum_{l=0}^{k}\sum_{\nu=l}^{k}\ldots,$$

máme dále

$$\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}^2 x^\nu =$$

$$= \sum_{l=0}^{k}(x-1)^l \sum_{\nu=l}^{k}\binom{k}{\nu}\binom{\nu}{l}\binom{k}{\nu}. \tag{7}$$

Jde tedy jen o úpravu vnitřního součtu.
Avšak podle vzorce

$$\binom{m+p}{m}\binom{n}{m+p} =$$

$$= \frac{(m+p)!}{m!p!}\cdot\frac{n!}{(m+p)!(n-m-p)!} =$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!}\cdot\frac{(n-m)!}{p!(n-m-p)!} =$$

$$= \binom{n}{m}\binom{n-m}{p}$$

je

$$\binom{\nu}{l}\binom{k}{\nu} = \binom{k}{l}\binom{k-l}{\nu-l} =$$

$$= \binom{k}{l}\binom{k-l}{k-\nu},$$

takže pro vnitřní součet na pravé straně rovnice (7) vychází

$$\binom{k}{l}\sum_{\nu=l}^{k}\binom{k}{\nu}\binom{k-l}{k-\nu}.$$

Je tedy

$$\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}^2 x^\nu =$$

$$= \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(x-1)^l \sum_{\nu=l}^{k}\binom{k}{\nu}\binom{k-l}{k-\nu}$$

a položíme-li ještě $(k-l)$ za l na pravé straně, máme

$$\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}^2 x^\nu =$$

$$= \sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(x-1)^{k-l} \sum_{\nu=k-l}^{k}\binom{k}{\nu}\binom{l}{k-\nu}. \tag{8}$$

K dokončení důkazu vypočítáme hodnotu vnitřního součtu na pravé straně.
Předně je

$$\binom{l}{k-\nu} = 0$$

pro

$$\nu < k - l,$$

takže

$$\sum_{\nu=k-l}^{k}\binom{k}{\nu}\binom{l}{k-\nu} = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\binom{l}{k-\nu}.$$

Podle Cauchyova vzorce

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{x}{k}\binom{y}{n-k} = \binom{x+y}{n}$$

máme konečně

$$\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\binom{l}{k-\nu} = \binom{k+l}{k}$$

a po dosazení tohoto výsledku do rovnice (8) vychází žádaný vztah

$$\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}^2 x^\nu = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\binom{k+\nu}{k}(x-1)^{k-\nu}.$$

LITERATURA

[1] Turán P., *A kínai matematika történetének egy problémájáról*, Matematikai Lapok V (1954), 1—6.

Došlo 17 1. 1962.

Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie vied
v Bratislave

REMARQUES À UN TRAVAIL DE M. P. TURÁN

Josef Kaucký

Résumé

L'article précédent contient une démonstration élémentaire de la rélation

$$\sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu}^2 x^\nu = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu}\binom{k+\nu}{k}(x-1)^{k-\nu}.$$

En effet, en substituant $(x-1)+1$ au lieu de x dans la somme à gauche et en tenant compte du théorème des binômes, nous obtenons successivement

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu}^2 x^\nu &= \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu}^2 [(x-1)+1]^\nu = \\
&= \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu}^2 \sum_{l=0}^{\nu} \binom{\nu}{l}(x-1)^l = \\
&= \sum_{l=0}^{k} (x-1)^l \sum_{\nu=l}^{k} \binom{k}{\nu}\binom{\nu}{l}\binom{k}{\nu} = \\
&= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l}(x-1)^l \sum_{\nu=l}^{k} \binom{k}{\nu}\binom{k-l}{k-\nu} = \\
&= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l}(x-1)^{k-l} \sum_{\nu=k-l}^{k} \binom{k}{\nu}\binom{l}{k-\nu} = \\
&= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l}(x-1)^{k-l} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu}\binom{l}{k-\nu} = \\
&= \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l}\binom{k+l}{k}(x-1)^{k-l}.
\end{aligned}$$

P. Turán a démontré cette rélation a l'aide des quelques propriétés des polynômes de Legendre dans son travail [1].