MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 12. 3. 1962

O NIEKTORÝCH VLASTNOSTIACH HRÁN AUTOKONJUGOVANÉHO K-POLYÉDRA

ERNEST JUCOVIČ, Prešov

V práci ponímame K-polyéder, autokonjugovaný K-polyéder tak, ako boli definované v [3], eulerovský polyéder podľa [1], [2]. Použijeme označenie $\sigma_{\alpha\beta}$, resp. $\sigma_{A\alpha}$, ktoré bude znamenať počet prvkov množinového súčtu hrán, ktoré incidujú so stenami α, β, resp. vrcholom A a stenou α polyédra.

Prvá časť priamo nadväzuje na [3] a používa úvahy z nej. V prvej vete je udaná horná hranica pre $\sigma_{\alpha\beta}$, kde α, β sú susedné steny autokonjugovaného K-polyédra; táto závisí od počtu jeho trojuholníkových stien. V druhej vete je udaná horná hranica pre $\sigma_{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_m}$, kde $\alpha_1 \dots \alpha_m$ $(m \geqq 3)$ sú všetky steny incidujúce s tým istým vrcholom autokonjugovaného K-polyédra; táto hranica závisí od čísel m, n, kde n je počet trojuholníkových stien uvažovaného polyédra. Vety 3 a 4 v druhej časti sa týkajú $\sigma_{A\alpha}$, kde A, α sú spolu incidujúca dvojica stena α – vrchol A autokonjugovaného K-polyédra. Použitý je t. zv. Θ-proces od Steinitza [1] a jedna veta A. Kotziga [2].

1

Veta 1. *Ak autokonjugovaný K-polyéder má $n > 4$ trojuholníkových stien, potom o každých dvoch jeho susedných stenách α, β platí $\sigma_{\alpha\beta} \leqq n + 3$. Dvojíc susedných stien α, β, pre ktoré $\sigma_{\alpha\beta} = n + 3$, je maximálne n.*

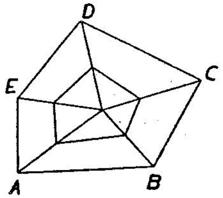
Dôkaz. Označme s počet stien, h počet hrán autokonjugovaného K-polyédra, $x_i > 3$ $(i = 1, 2 \dots s - n)$ počet hrán, s ktorými inciduje stena α_i. Potom podľa jednej vety z [3] platí

$$3n + x_1 + x_2 + \dots + x_{s-n} = 2h = 4(s - 1). \tag{1}$$

Steny α_1, α_2 budú incidovať s najväčším počtom hrán, ak $x_3 = x_4 = \dots = x_{s-n} = 4$. Po dosadení do (1) dostaneme

$$x_1 + x_2 = 4(s - 1) - 3n - 4(s - n - 2) = n + 4.$$

Ak α_1, α_2 sú susedné, potom $\sigma_{\alpha_1\alpha_2} = n + 3$. Maximálny počet dvojíc susedných stien α_i, α_j, pre ktoré $\sigma_{\alpha_i\alpha_j} = n + 3$ $(i \neq j = 1, 2 \dots, s - n)$, vyskytne sa vtedy, ak aj $x_2 = 4$. Vtedy totiž $x_1 = n$, ako sa ľahko presvedčíme úpravou (1); $\sigma_{\alpha_i \alpha_j} = n + 3$ len vtedy, ak $\alpha_1 \equiv \alpha_i(x_1 = n)$ a $\alpha_m = \alpha_j(m = 2, 3 \dots, s - n)$. Takýchto dvojíc stien α_i, α_j je najviac ak n. Ak $x_1 < n$, potom $x_1 + x_2 = n + 4$, ale $x_u + x_v < n + 4$ ($u = 1, 2$; $v = 3, 4, \dots, s - n$). Tým sú obe časti vety dokázané.



Obr. 1

n-boký ihlan je príklad autokonjugovaného K-polyédra s n trojuholníkovými stenami, pričom o každej dvojici jeho susedných stien α, β platí $\sigma_{\alpha\beta} < n + 3$. Obr. 1 ukazuje príklad autokonjugovaného K-polyedra s $n = 5$ trojuholníkovými stenami, ktorý má n dvojíc susedných stien α, β takých, že $\sigma_{\alpha\beta} = n + 3 = 8$. O tom, že K-polyéder na obr. 1 je autokonjugovaný, sa ľahko presvedčíme pomocou s ním ekvivalentnej polyedrickej matice.

Veta 2. *Ak autokonjugovaný K-polyéder má n trojuholníkových stien a steny $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ $(m \geqq 3)$ sú všetky steny, ktoré incidujú s tým vrcholom, potom $\sigma_{\alpha_1 - \alpha_m} \leqq n + 3m - 4$.*

Dôkaz. Označme opäť s počet stien, h počet hrán uvažovaného autokonjugovaného K-polyédra, x_j počet hrán, s ktorými inciduje stena α_j $(j = 1, \dots, s)$.

Nech a) $m < s - n$.

Platí: $x_1 + x_2 + \dots + x_m + x_{m+1} + \dots + x_{s-n} + 3n = 2h = 4(s - 1)$. Každá zo stien $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-n}$ inciduje najmenej so štyrmi hranami. Platí preto $x_1 + x_2 + \dots + x_m \leqq 4(s - 1) - 3n - 4(s - n - m) = n + 4m - 4$. Ak steny $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ incidujú s tým istým vrcholom, teda každé dve susedné v tejto postupnosti a tiež α_1, α_m majú spoločnú hranu, potom

$$\sigma_{\alpha_1 - \alpha_m} \leqq n + 4m - 4 - m = n + 3m - 4.$$

b) $s > m \geqq s - n$.

Označme $p = m - (s - n)$. Platí $x_1 + x_2 + \dots + x_{s-n} + x_{s-n+1} + \dots + x_{s-n+p} + x_{s-n+p+1} + \dots + x_s = 4(s - 1)$. Ak $x_i > 3$ $(i = 1, \dots, s - n)$, teda $x_{s-n+1} = \dots = x_s = 3$, potom $x_1 + x_2 + \dots + x_{s-n} + x_{s-n+1} + \dots + x_{s-n+p} = 4(s - 1) - 3(n - p) = s + 3m - 4 \leqq m + n + 3m - 4 = n + 4m - 4$ (po dosazení z $m \geqq s - n$). Ak steny $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ incidujú s tým istým vrcholom, tedy každé dve susedné majú spoločnú hranu, potom $\sigma_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \leqq n + 3m - 4$. Tým je naša veta dokázaná pre všetky prípustné n, m.

Opäť je K-polyéder na obr. 1 príkladom takého autokonjugovaného K-polyédra, u ktorého horná hranica z vety 2 je dosiahnutá (totiž pri piatich vrcholoch A, B, C, D, E).

Vzhľadom na vlastnosti autokonjugovaných K-polyédrov platia poučky duálne k vetám 1, 2; tie dostaneme, ak vo vetách 1, 2 zameníme navzájom steny a vrcholy.

2

Nech $M = V + S + H$ je K-polyéder, V množina jeho vrcholov, S množina jeho stien, H množina jeho hrán. Pridajme ku komplexu M množinu U jeho uhlov, ktorými sú dvojice hrán so spoločným vrcholom, incidujúce s tou istou stenou. Ku komplexu $M + U = H + U + V + S$ priraďme navzájom jednoznačne nový komplex $M' = V' + H' + S'$ s množinou vrcholov V', hrán H' a stien S' tak, aby prvky množiny V' boli vzájomne jednoznačne priradené prvkom množiny H, prvky z H' k prvkom z U a prvky z S' k prvkom z $(V + S)$. Za incidujúce označme také dva prvky komplexu M', ku ktorým prislúchajúce prvky komplexu $M + U$ sú incidentné.

Steinitz [1] toto vytvorenie komplexu M' z komplexu M nazýva Θ-proces, nový komplex M' označuje $M' = \Theta(M)$. Ak si K-polyéder M interpretujeme ako konvexný polyéder M_0, potom Θ-proces vyzerá takto: Vo vnútri každej hrany polyédra M_0 volíme bod ako vrchol nového komplexu; každé dva z týchto vrcholov, ležiace na susedných hranách polyédra M_0 spojíme hranou. – Napr. ku štvorstenu je Θ-procesom priradený osemsten typu pravidelného osemstena (pozri obr. 2).

K dôkazu 3. vety si musíme najprv dokázať nasledujúcu lemmu.

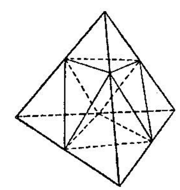
Lemma 1. *Ak je A autokonjugovaný K-polyéder, potom o $A' = \Theta(A)$ platí:*

a) *A' je K-polyéder;*

b) *steny A' je možné rozdeliť do dvoch tried T_1, T_2 tak, že žiadne dve susedné steny nepatria do tej istej triedy;*

c) *existuje aspoň jedno navzájom jednoznačné priradenie P stien triedy T_1 k stenám triedy T_2 také, že je zachovaná susednosť stien.*

Dôkaz. a) Označme S, V, H, resp. S', V', H' množiny stien, vrcholov, hrán autokonjugovaného K-polyédra A, resp. komplexu A', ďalej označme U množinu uhlov polyédra A. Pre každé dva prvky rôznych množín S, V, H, U je rozhodnuté či incidujú, – to isté potom platí o dvoch prvkoch z rôznych množín S', V', H'. Uhol BAC z množiny U inciduje s dvoma hranami AB, AC, ich spoločným vrholom A a stenou α. Potom hrana z množiny H', priradená k uhlu BAC, inciduje s dvoma vrcholmi z V', priradeným k hranám AB, AC. Ďalej inciduje táto hrana z množiny H' s dvoma stenami α_1', α_2', priradenými k stene α a vrcholu A. – Vrcholy A, B z množiny V' sú priradené k hranám a, b množiny H; a, b sú buď susedné, potom určujú jediný uhol z U, potom existuje jediná hrana AB, – alebo hrany a, b uhol neurčujú a potom neexistuje hrana AB. – Steny α, β z množiny S' sú priradené buď k stenám α_1, β_1 z množiny S alebo k stene α_1 z množiny S a vrcholu B z množiny V. V prvom prípade α_1, β_1 neurčujú uhol, a preto neexistuje hrana, ktorá by


Obr. 2.

incidovala aj s α aj s β. V druhom prípade môže stena α_1 a vrchol B neincidovať, neurčovať uhol, – potom steny α, β nemajú spoločnú hranu; alebo stena α_1 a vrchol B incidujú, potom určujú jediný uhol, ku ktorému je priradená jediná hrana, incidujúca aj s α aj s β.

Každá stena α z množiny S' inciduje s toľkými vrcholmi, s koľkými hranami inciduje k nej priradená stena α_1 z množiny S alebo k nej priradený vrchol A z množiny V, – tie sú najmenej tri.

Označme s, resp. v, resp. h počet prvkov množiny S, resp. V, resp. H, ďalej s', resp. v', resp. h' počet prvkov množiny S', resp. V', resp. H'. Jednoduchým výpočtom zistíme, že počet u uhlov polyédra A sa rovná $2h$. Potom platí $s' + v' - h' = (s + v) + h - 2h = s + v - h = 2$. Tým sme spolu dokázali, že $\Theta(A)$ je K-polyéder. (Porovnaj s definíciou v [3].)

b) Rozdeľme množinu stien z S' do dvoch tried T_1, T_2, – v T_1 nech sú tie steny, ktoré sú priradené k stenám z S, v T_2 tie steny, ktoré sú priradené k vrcholom z V. V prvej časti bolo dokázané, že susedné sú len také steny α, β z S', ku ktorým je priradená stena a s ňou incidujúci vrchol polyédra A. Preto nenáležia do tej istej triedy T_1 či T_2.

c) Keďže je A autokonjugovaný K-polyéder, existuje medzi množinou vrcholov V a množinou stien S polyédra A vzájomne jednoznačné priradenie π, ktoré zachováva incidenciu. K množine S stien polyédra A je Θ-procesom priradená trieda T_1 stien polyédra A', k množine vrcholov V je priradená trieda T_2 stien polyédra A'. Incidentná dvojica stena–vrchol prejde v susednú dvojicu stena – stena, incidentná stena–hrana prejde v incidentnú dvojicu stena z T_1 – vrchol, incidentná dvojica hrana–vrchol prejde v incidentnú dvojicu stena z T_2–vrchol. A vzťah π medzi stenami a vrcholmi polyédra A prejde vo vzájomne jednoznačné priradenie P tried T_1, T_2, ktoré zachováva susednosť stien. Tým je lemma 1 dokázaná v plnom rozsahu.

Veta 3. *Autokonjugovaný K-polyéder K buď:* a) *obsahuje aspoň dve dvojice $A\alpha$, $B\beta$ incidujúcich stien a vrcholov takých, že $\sigma_{A\alpha} = \sigma_{B\beta} \leqq 11$, buď* b) *obsahuje aspoň jednu dvojicu $C\gamma$ spolu incidujúcej steny γ a vrcholu C tak, že vrchol C i stena γ inciduje s tým istým počtom hrán $u \leqq 6$. Pritom prípady* a), b) *sa navzájom nevylučujú.*

Dôkaz. A. Kotzig [2] dokázal: V každom eulerovskom polyédri, existuje najmenej jedna dvojica susedných stien α_1, α_2 taká, že $x_1 + x_2 \leqq 13$, kde x_i je počet hrán, incidujúcich so stenou α_i $(i = 1, 2)$. – Potom má stena α_1 uvažovaného K-polyédra K x_1 vrcholov, stena α_2 x_2 vrcholov. Ale keďže sú α_1, α_2 susedné, majú 2 vrcholy spoločné a počet prvkov množinového súčtu vrcholov stien α_1, α_2 je $\leqq 11$.

$\Theta(K)$ je K-polyéder, teda eulerovský polyéder (pozri Steinitz [1]), a preto podľa vyššie citovanej vety Kotziga obsahuje dvojicu susedných stien α_1, α_2 takých, že počet prvkov množinového súčtu s nimi incidujúcich vrcholov sa rovná najviac

ak 11. Podľa bodu c) lemmy 1 nech je k α_1 priradená stena β_2, k β_1 stena α_2. Potom nastane jedna z týchto možností:

1. $\beta_2 \not\equiv \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \not\equiv \alpha_1$ alebo
2. $\beta_2 \equiv \alpha_2 \Rightarrow \beta_1 \equiv \alpha_1$.

Ak $\beta_2 \not\equiv \alpha_2$, obsahuje $\Theta(K)$ dve dvojice susedných stien α_1 a α_2, β_1 a β_2 takých, že počet prvkov množinového súčtu vrcholov stien α_1, α_2 sa rovná počtu prvkov množinového súčtu vrcholov β_1, β_2 a tento súčet najviac ak sa rovná 11. K dvojiciam stien α_1 a α_2, β_1 a β_2 polyédra $\Theta(K)$ sú v polyédri K priradené dvojice spolu incidujúcich vrcholov a stien $A\alpha$, $B\beta$, k vrcholom stien α_1, α_2, β_1, β_2 sú priradené hrany, incidujúce s vrcholmi a stenami $A\alpha$, $B\beta$. Platí potom $\sigma_{A\alpha} = \sigma_{B\beta} \leqq 11$.

Ak $\beta_2 \equiv \alpha_2$, inciduje každá zo stien α_1, α_2 s tým istým počtom vrcholov, najviac ak rovnajúcim sa 6. K stenám α_1, α_2 je v polyedri K priradená incidujúca dvojica vrchol C a stena γ, o ktorej hovorí bod b) našej vety.

Ďalším dôsledkom Kotzigovej vety je

Veta 4. *Ak autokonjugovaný K-polyéder M neobsahuje stenu, ktorá inciduje s $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ hranami, potom obsahuje aspoň jednu incidujúcu dvojicu stena α–vrchol A takú, že $\sigma_{A\alpha} = 4$ (že teda spolu inciduje trojuholníková stena α a trojhranný vrchol A).*

Dôkaz. Podľa [3] obsahuje polyéder M najmenej štyri trojuholníkové steny; neobsahuje ale vrchol, ktorý by incidoval s $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ hranami. Potom $\Theta(M)$ neobsahuje stenu, ktorá by incidovala s n hranami. Podmienky spomínanej Kotzigovej vety predsa však spĺňa; to je možné len tak, že sú susedné dve trojuholníkové steny α_1, α_2. V polyédri M sú k α_1, α_2 priradené stena α a vrchol A, o ktorých hovorí naša veta.

Poznámka pri korektúre: Vetu 3 a vetu 4 možno vysloviť oveľa silnejšie.

LITERATÚRA

[1] Steinitz E., Rademacher H., *Vorlesungen über die Theorie der Polyeder*, Berlin 1934.
[2] Kotzig A., *Príspevok k teórii eulerovských polyédrov*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV 5 (1955), 101–113.
[3] Jucovič E., *Самосопряженные К-полиэдры*, Matematicko-fyzikálny časopis SAV 12 (1962), 1–22.

Došlo 20. 11. 1961.

Katedra matematiky a fyziky
Pedagogického inštitútu v Prešove

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕБЕР САМОСОПРЯЖЕННОГО K-ПОЛИЭДРА

Эрнест Юцович

Резюме

Обозначим соответственно через $\sigma_{\alpha\beta}$ или $\sigma_{A\alpha}$ число элементов множественного соединения ребер инцидентных с гранями α, β или с гранею α и вершиной A самосопряженного K-полиэдра.

Доказываются следующие теоремы:

1. Для каждой пары соседных граней α, β самосопряженного K-полиэдра с $n > 4$ треугольными гранями $\sigma_{\alpha\beta} \leqq n + 3$. Существует не более n таких пар соседных граней α, β что $\sigma_{\alpha\beta} = n + 3$.

2. Если $\alpha_1, \dots \alpha_m (m \geqq 3)$ все грани инцидентные с той же вершиной самосопряженного K-полиэдра, имеющего n треугольных граней, то $\sigma_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \leqq n + 3m - 4$.

3. Самосопряженный K-полиэдер содержит:

а) либо по крайней мере две грани α, β и две вершины A, B такие, что α инцидирует с A, β с B и $\sigma_{A\alpha} = \sigma_{B\beta} \leqq 11$,

б) либо одну грань γ и с ней инцидентную вершину C такую, что γ и C инциденты с тем же числом ребер $u \leqq 6$.

В то же время случаи а), б) взаимно друг друга не исключаются.

4. Если никакая грань самосопряженного K-полиэдра не инцидентна с $n = 4, 5 \dots, 10$ ребрами, то по крайней мере одна его треугольная грань инцидентна с трехгранной вершиной.

EINIGE EIGENSCHAFTEN DER KANTEN AUTOKONJUGIERTER K-POLYEDER

Ernest Jucovič

Zusammenfassung

Wir bezeichnen durch $\sigma_{\alpha\beta}$ bezw. $\sigma_{A\alpha}$ die Anzahl der Elemente der Mengenvereinigung der Kanten, die mit den Flächen α, β, bezw. mit der Fläche α und der Ecke A eines autokonjugierten (autopolaren) K-Polyeders inzidieren.

Es werden folgende Sätze bewiesen:

1. Für ein jedes Paar benachbarter Flächen α, β eines autokonjugierten K-Polyeders mit $n > 4$ Dreieckflächen gilt $\sigma_{\alpha\beta} \leqq n + 3$. Dabei gibt es maximal n solcher Paare α, β, für die $\sigma_{\alpha\beta} = n + 3$.

2 Hat ein autokonjugiertes K-Polyeder n Dreieckflächen und sind $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ $(m \geqq 3)$ alle Flächen, die mit derselben Ecke inzidieren, dann gilt $\sigma_{\alpha_1 \dots \alpha_m} \leqq n + 3m - 4$.

3. Ein autokonjugiertes K-Polyeder besitzt a) entweder wenigstens zwei Paare $A\alpha$, $B\beta$ inzidierender Flächen und Ecken so, daß $\sigma_{A\alpha} = \sigma_{B\beta} \leqq 11$ gilt, oder b) besitzt es ein Paar $C\gamma$ inzidierender Fläche γ und Ecke C so, daß γ und C mit derselben Anzahl $u = 6$ Kanten inzidiert. Dabei können die Fälle a), b) auch zugleich vorkommen.

4. Wenn ein autokonjugiertes K-Polyeder keine Fläche besitzt, die mit $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ Kanten inzidiert, dann besitzt es wenigstens ein inzidierendes Paar Fläche α — Ecke A so, daß $\sigma_{A\alpha} = 4$ gilt.