MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 12. 3. 1962

УСЛОВИЯ РАЗЛОЖИМОСТИ В ПРЯМУЮ СУММУ НЕКОТОРЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ РАНГА ДВА*

ЛАДИСЛАВ ПРОХАЗКА (LADISLAV PROCHÁZKA), Прага

В этой статье изучаются абелевы группы без кручения ранга 2, обладающие тем свойством, что по крайней мере для одного простого числа p p-ранг такой группы ровен числу 1. Здесь найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы группа, принадлежащая только что определенному классу групп, обладала нетривиальным разложением в прямую сумму. Притом всегда предполагаем, что нам известна некоторая полная система канонических p-матриц Мальцева (смотри [1], § 9) такой группы и ищем необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять эта система p-матриц.

Прежде всего отметим, что эта работа навязывает непосредственно на работу автора [2], и поэтому многие понятия, как например p-число, p-матрица, каноническая p-матрица, p-примитивная подгруппа, p-ранг группы без кручения и т. д., определенные в [2] (смотри также [1]), будут просто перенесены вместе с обозначениями в настоящую статью. Кроме того под словом группа условимся всюду в дальнейшем понимать аддитивно записанную абелеву группу с нулевым элементом O.

§ 1.

Если G — группа без кручения и если g — произвольный ненулевой элемент из G, то символом $\mathscr{S}(g)$ будем обозначать наименьшую сервантную подгруппу группы G, содержащую элемент g. Если G — группа без кручения ранга 1, то символа typ G будем употреблять для обозначения типа группы G.

Определение 1. Пусть G — группа без кручения и пусть g — произвольный ее ненулевой элемент. То под типом $\hat{\chi}(g: G)$ элемента g в группе G будем понимать тип сервантной подгруппы $\mathscr{S}(g)$; значит, $\hat{\chi}(g; G) = \text{typ}\ \mathscr{S}(g)$.

Теперь выскажем две леммы, доказательства которых можно, очевидно, выпустить.

* В течение подготовки этой статьи к печати появилась другая работа, занимающаяся подобными проблемами: R. Beaumont and R. S. Pierce: Torsion free groups of rank two, Memoirs of the Amer. Math. Soc., № 38, 1961.

Лемма 1. *Пусть G — прямо разложимая группа без кручения ранга 2 вида*

$$G = G_1 \dotplus G_2, \tag{1}$$

где подгруппы G_i $(i = 1,2)$ являются группами ранга 1 несравнимых типов: typ G_1 || typ G_2. *Тогда для произвольного ненулевого элемента $g \in G$ имеет место в точности одно из следующих трех соотношений:**

$$\hat{\chi}(g; G) = \text{typ}\ G_1,\ \ \hat{\chi}(g; G) = \text{typ}\ G_2,$$
$$\hat{\chi}(g; G) = \text{typ}\ G_1 \wedge \text{typ}\ G_2.$$

Притом равенство $\hat{\chi}(g; G) = \text{typ}\ G_i$ имеет место тогда и только тогда, если $g \in G_i$ $(1 \leqq i \leqq 2)$.

Лемма 2. *Пусть G — прямо разложимая группа бев кручения ранга 2 вида* (1), *где имеем* typ $G_1 \geqq$ typ G_2. *То для произвольного ненулевого элемента $g \in G$ имеет место или равенство $\hat{\chi}(g; G) = \text{typ}\ G_1$, или же равенство $\hat{\chi}(g; G) = \text{typ}\ G_2$. Притом если* typ $G_1 >$ typ G_2, *то равенство $\hat{\chi}(g; G) = \text{typ}\ G_1$ имеет место тогда и только тогда, если $g \in G_1$.*

Следующие леммы служат непосредственным следствием предшествующих двух лемм.

Лемма 3. *Если группа без кручения ранга два содержит по крайней мере три ненулевых элемента несравнимых типов, то она должна быть неразложимой в прямую сумму.*

Лемма 4. *Пусть группа без кручения G ранга 2 содержит два ненулевых элемента g_i $(i = 1,2)$ несравнимых типов. Если группа G разложима в прямую сумму, то необходимо будет*

$$G = \mathscr{S}(g_1) + \mathscr{S}(g_2);$$

притом последнее разложение является единственным прямым разложением группы G.

Лемма 5. *Пусть группа без кручения G ранга 2 содержит два таких ненулевых элемента g_i $(i = 1,2)$, что $\hat{\chi}(g_1; G) > \hat{\chi}(g_2; G)$. Если группа G разложима в прямую сумму, то необходимо будет*

$$G = \mathscr{S}(g_1) \dotplus H, \tag{2}$$

где H — удобная подгруппа ранга 1 группы G. Притом каждое прямое группы G имеет вид (2), *т. е. подгруппа $\mathscr{S}(g_1)$ служит одним из прямых слагаемых.*

* Как известно, множество всех типов групп без кручения ранга 1 является структурой; символом „∧“ обозначаем операцию пересечения в этой структуре.

Пусть G — произвольная группа без кручения ранга 2 и пусть $B = (x_1, x_2)$ — некоторый ее базис (т. е. упорядоченная пара линейно независимых элементов из G). Как было доказано в статье [1] (смотри также [2]), для каждого (положительного) простого числа p можно найти каноническую p-матрицу $\mathfrak{K}^{(p)}$ вида*

$$\mathfrak{K}^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_{\alpha_1}(p), & \mathfrak{p}_{\alpha_1}(p)\,\mathfrak{a}(p) \\ 0, & \mathfrak{p}_{\alpha_2}(p) \end{pmatrix} \tag{3}$$

и такую перестановку π_p двух элементов,** что каноническая p-матрица $\mathfrak{K}^{(p)}$ является p-матрицей p-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(\pi_p(B))$ группы G относительно к базису $\pi_p(B) = (x_{\pi_p(1)}, x_{\pi_p(2)})$.

Определение 2. Пусть G — группа без кручения ранга 2 и пусть $B = (x_1, x_2)$ — некоторый ее базис. Тогда пару $(\mathfrak{K}^{(p)}, \pi_p)$, где $\mathfrak{K}^{(p)}$ — некоторая каноническая p-матрица вида (3), определенная только что описанным образом, и π_p — соответствующая перестановка чисел 1, 2, будем называть каноническим p-инвариантом Мальцева группы G относительно к базису B. Если для каждого (положительного) простого числа p определен некоторый канонический p-инвариант Мальцева группы G относительно к базису B, то будем говорить, что дана полная каноническая система инвариантов Мальцева $\mathfrak{M}_B(G)$ группы G относительно к базису B:

$$\mathfrak{M}_B(G) = [(\mathfrak{K}^{(p)}, \pi_p);\ p \in \Pi]. \tag{4}$$

Если G — произвольная группа без кручения ранга 2, то множество всех (положительных) простых чисел Π разделим в три непересекающиеся подмножества $\Pi_k(G)$ ($k = 0, 1, 2$), и это будет по правилу

$$\Pi_k(G) = E(p; p \in \Pi, r_p(G) = k)\ (k = 0, 1, 2);$$

притом символом $r_p(G)$ обозначаем p-ранг группы G (см. [2], § 4). В дальнейшем мы будем заниматься только такими группами без кручения ранга 2, для которых $\Pi_1(G) \neq \emptyset$.

Теорема 1. *Пусть G — такая группа без кручения ранга 2, что $\Pi_1(G) \neq \emptyset$ и пусть (4) — некоторая ее полная каноническая система инвариантов Мальцева относительно базису B. Если для некоторого простого числа $p \in \Pi_1(G)$ целое p-адическое число $\mathfrak{a}(p)$ выступающее в записи (3) канонической p-матрицы $\mathfrak{K}^{(p)}$ является иррациональным (т. е. не является рациональным), то группа G неразложима в прямую сумму.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся результатами из [2]. Если p — простое число из множества $\Pi_1(G)$, о котором говорит теорема,

---

* Если $\alpha_1 < \infty$, то $\mathfrak{a}(p)$ уже целое рациональное, и можно даже предполагать, что $0 \leqq \mathfrak{a}(p) < p^{\alpha_1 - \alpha_2}$. Это предположение всюду сохраним.

** π_p является перестановкой множества двух чисел $\{1, 2\}$.

то будет $r_p(G) = 1$, следовательно, соответствующая каноническая p-матрица $\mathfrak{K}^{(p)}$ имеет вид (см. [2], §§ 3, 4)

$$\mathfrak{K}^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_{\infty}(p), & \mathfrak{a}(p) \\ 0, & \mathfrak{p}_{\alpha_2}(p) \end{pmatrix},$$

где $\mathfrak{p}_\infty(p) = 1$. Это значит, что p-адической клеткой p-матрицы $\mathfrak{K}^{(p)}$ служит матрица $\mathfrak{A} = (\mathfrak{a}(p))$. Так как, по предположению, целое p-адическое число $\mathfrak{a}(p)$ является иррациональным, то p-ранг матрицы $\mathfrak{A}$ будет в точности 1, и, следовательно, $l_p(G) = 1$ (см. [2], § 6). Тогда имеем

$$l_p(G) = 1 = r(G) - 1,$$

или, по теореме 10 из [2], группа G является неразложимой в прямую сумму и теорема доказана.

Так как в этой статье занимаемся исключительно разложимостью групп в прямую сумму, то из предшествующей теоремы следует, что в дальнейшем можно ограничиться только теми группами без кручения G ранга 2, для которых каждое p-адическое число $\mathfrak{a}(p)$ ($p \in \Pi_1(G)$) выступающее в соответствующей канонической p-матрице $\mathfrak{K}^{(p)}$ некоторой полной канонической системы Мальцева (4), является уже рациональным числом. Это свойство не зависит от выбора канонической системы $\mathfrak{M}_B(G)$, а является свойством самой группы G, так как для простого числа $p \in \Pi_1(G)$ будет целое p-адическое число $\mathfrak{a}(p)$ тогда и только тогда рациональным, если $l_p(G) = 0$; но как было доказано в [2], § 6, число $l_p(G)$ является инвариантом группы G.

Из предшествующего следует, что станет полезным следующее определение.

Определение 3. Будем говорить, что группа без кручения G ранга 2 обладает свойством (R), если выполнены следующие условия:

а) $\Pi_1(G) \neq \emptyset$,

б) для каждого $p \in \Pi_1(G)$ будет $l_p(G) = 0$.

Если G — группа без кручения и если g — произвольный ненулевой элемент из G, то для каждого простого числа p символом $\chi(g; p, G)$ будем обозначать p-высоту элемента g в группе G, т. е. верхнюю грань множества всех целых неотрицатеьлных чисел k, для которых разрешимо в группе G уравнение $p^k x = g$. Далее, для каждого простого числа p положим

$$G[p^\infty] = E(g; g \in G, g \neq O, \chi(g; p, G) = \infty) \cup (O);$$

как было доказано в [2], § 6, множество $G[p^\infty]$ является сервантной подгруппой группы G.

Пусть теперь G — группа без кручения ранга 2 обладающая свойством (R). Тогда, по определению, для каждого $p \in \Pi_1(G)$ будет $r_p(G) = 1$ и одновременно $l_p(G) = 0$, или, по теореме 9 из [2] будет

$$r(G[p^\infty]) = r_p(G) - l_p(G) = r_p(G) = 1.$$

Это значит, что для всякого $p \in \Pi_1(G)$ будет сервантная подгруппа $G[p^\infty]$ группой ранга 1. Систему всех сервантных подгрупп $G[p^\infty]$ для всех простых чисел $p \in \Pi_1(G)$ обозначим символом $\mathfrak{S}(G)$; так как G обладает свойством (R), то система $\mathfrak{S}(G)$ будет непустой.

Пользуясь только что введенными обозначениями докажем следующую лемму.

Лемма 6. *Пусть G — группа без кручения ранга 2 обладающая свойством (R). Если система подгрупп $\mathfrak{S}(G)$ содержит по крайней мере три различные подгурупы, то группа G неразложима в прямую сумму.*

Доказательство. Пусть $G[p_i^\infty]$ $(i = 1, 2, 3)$ — некоторые три различные группы выбраные из системы $\mathfrak{S}(G)$. Так как $G[p_i^\infty]$ $(i = 1, 2, 3)$ — различные сервантные подгруппы группы G, все ранга 1, то необходимо должно быть

$$G[p_i^\infty] \cap G[p_k^\infty] = (O) \quad (i \neq k;\, i, k = 1, 2, 3).$$

Следовательно, если g_i — произвольно выбраный ненулевой элемент группы $G[p_i^\infty]$ $(i = 1, 2, 3)$, то будет

$$g_i \notin G[p_k^\infty] \quad (i \neq k;\, i, k = 1, 2, 3).$$

Но это значит, что

$$\chi(g_i; p_i, G) = \infty,\ \chi(g_i; p_k, G) < \infty \quad (i \neq k;\, i, k = 1, 2, 3),$$

или, типы $\hat{\chi}(g_i; G)$ элементов $g_i (i = 1, 2, 3)$ являются несравнимыми. Отсюда, в силу леммы 3, уже следует неразложимость группы G в прямую сумму, и лемма доказана.

Теперь покажем, каким методом можно непосредственно определить, сколько подгрупп содержит множество $\mathfrak{S}(G)$, если дана некоторая полная система $\mathfrak{M}_B(G)$ инвариантов Мальцева группы G. Для этой цели введем еще следующее вспомогательное обозначение.

Пусть G — группа без кручения ранга 2 обладающая свойством (R) и пусть (4) — полная каноническая система инвариантов Мальцева группы G относительно к некоторому ее базису B. Пусть $p \in \Pi_1(G)$ и пусть $\alpha(p)$ — целое p-адическое число (являющееся теперь рациональным), выступающее в канонической p-матрице $\mathfrak{R}^{(p)}$ p-инварианта $(\mathfrak{R}^{(p)}, \pi_p)$. Тогда полагаем $\alpha^*(p) = 0_+$, если $\alpha(p) = 0$ и в то же время π_p — идентическая перестановка; если $\alpha(p) = 0$, но $\pi_p = (1, 2)$, то полагаем $\alpha^*(p) = 0_-$. На конец, если $\alpha(p)$ — ненулевое рациональное число, то будем писать $\alpha^*(p) = \alpha(p)$, если π_p — идентическая перестановка, и если $\pi_p = (1, 2)$, то полагаем $\alpha^*(p) = \alpha(p)^{-1}$. Притом символы 0_+ и 0_- будем в дальнейшем считать различными экземплярами нуля. Множество всех таким образом определенных рациональных чисел $\alpha^*(p)$ $(p \in \Pi_1(G))$ обозначим символом $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B)$; значит, имеем

$$\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B) = E(\alpha^*(p);\, p \in \Pi_1(G)). \tag{5}$$

Замечание. Из только что введенного определения множества рациональных чисел $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B)$ следует, что ее элементы зависят от выбора базиса B группы G и от выбора полной канонической системы инвариантов $\mathfrak{M}_B(G)$. Но можно было бы доказать, что если под базисом B группы G понимаем упорядоченную пару линейно независимых элементов из G, то множество $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B)$ однозначно определено группой G и базисом B.

Лемма 7. *Пусть G — группа без кручения ранга 2 обладающая свойством (R) и пусть (4) — некоторая ее полная каноническая система инвариантов Мальцева группы G относительно к базису $B = (x_1, x_2)$. Пусть далее p — произвольное простое число из $\Pi_1(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) $\alpha^*(p) = 0_+ \Rightarrow G[p^\infty] = \mathscr{S}(x_1)$;

b) $\alpha^*(p) = 0_- \Rightarrow G[p^\infty] = \mathscr{S}(x_2)$;

c) *если $\alpha^*(p) = s_2/s_1 \neq 0$, где s_1, s_2 — целые рациональные взаимно простые числа, то $G[p^\infty] = \mathscr{S}(s_1 x_1 + s_2 x_2)$.*

Доказательство. a) Если $\alpha^*(p) = 0_+$, то $\alpha(p) = 0$ и одновременно $\pi_p = \varepsilon$ (символ ε представляет идентическую перестановку), или, соответствующая каноническая p-матрица $\mathfrak{R}^{(p)'}$ имеет вид

$$\mathfrak{R}^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_\infty(p), & 0 \\ 0, & \mathfrak{p}_{\alpha_2}(p) \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Каноническая p-матрица $\mathfrak{R}^{(p)}$ является p-матрицей p-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$ группы G (см. [2], § 1) и отсюда непосредственно следует, что для каждого натурального числа k в группе G разрешимо уравнение $p^k x = x_1$, или, имеем $\chi(x_1; p, G) = \infty$, или же $x_1 \in G[p^\infty]$. Так как подгруппа $G[p^\infty]$ является сервантной подгруппой ранга 1 в группе G, то необходимо должно быть $G[p^\infty] = \mathscr{S}(x_1)$.

b) Утверждение b) можно доказать аналогично тому, как мы доказали утверждение a); единственная разница в том, что p-матрица (6) является p-матрицей p-примитивной подгруппы группы G относительно к базису $\pi_p(B) = (x_2, x_1)$.

Пусть теперь $\alpha^*(p) = s_2/s_1$, $(s_1, s_2) = 1$. В таком случае полезно различать две возможности.

1) Пусть $\alpha^*(p) = \alpha(p)$, или, пусть $\pi_p = \varepsilon$. Это значит, что каноническая p-матрица

$$\mathfrak{R}^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_\infty(p), & \dfrac{s_2}{s_1} \\ 0, & \mathfrak{p}_{\alpha_2}(p) \end{pmatrix}$$

является p-матрицей p-примитивной подгруппы группы G относительно к базису $B = (x_1, x_2)$. Так как рациональное число s_2/s_1 является одновременно целым p-адическим числом и так как $(s_1, s_2) = 1$, то необходимо будет $(s_1, p) = 1$. Но тогда p-матрица (см. [1], § 6)

$$\mathfrak{N}^{(p)} = \begin{pmatrix} s_1, & s_2 \\ 0, & \mathfrak{p}_{\alpha_2}(p) \end{pmatrix}$$

также должна быть p-матрицей p-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$ группы G относительно к базису $B = (x_1, x_2)$. Отсюда непосредственно следует, что для каждого натурального числа k разрешимо в группе G уравнение $p^k x = s_1 x_1 + s_2 x_2$, или, $\chi(s_1 x_1 + s_2 x_2;\ p, G) = \infty$. Это значит, что $s_1 x_1 + s_2 x_2 \in G[p^\infty]$, или, как легко видеть, имеет место равенство

$$G[p^\infty] = \mathscr{S}(s_1 x_1 + s_2 x_2). \tag{7}$$

2) Если $\mathfrak{a}^*(p) = \mathfrak{a}(p)^{-1}$, т. е. если $\pi_p = (1, 2)$, то равенство (7) можно доказать аналогичным образом.

Этим лемма полностью доказана.

Для формулировки дальнейшей леммы напомним, что если M — некоторое множество, то символом moh M обозначим мощность множества M.

Лемма 8. *Пусть G — группа без кручения ранга 2 обладающая свойством (R) и пусть $\mathfrak{M}_B(G)$ — некоторая полная каноническая система инвариантов Мальцева вида (4) относительно к некоторому базису B. Если $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B)$ — множество рациональных чисел определенное формулой (5), то для мощностей имеет место равенство*

$$\text{moh}\ \mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B) = \text{moh}\ \mathfrak{S}(G). \tag{8}$$

Доказательство. Если p, q — два простых числа из множества $\Pi_1(G)$ и если $\mathfrak{a}^*(p) = \mathfrak{a}^*(q)$, то по лемме 7 будет $G[p^\infty] = G[q^\infty]$ Но наоборот можно доказать, что если $\mathfrak{a}^*(p) \neq \mathfrak{a}^*(q)$, то также $G[p^\infty] \neq G[q^\infty]$. Это непосредствено следует из леммы 7, если по крайней мере одно из чисел $\mathfrak{a}^*(p)$, $\mathfrak{a}^*(q)$ равно некоторому экземпляру нуля. Итак, пусть $0_\pm \neq \mathfrak{a}^*(p) = s_2/s_1 \neq t_2/t_1 = \mathfrak{a}^*(q) \neq 0_+$. Тогда матрица

$$\begin{pmatrix} s_1, & s_2 \\ t_1, & t_2 \end{pmatrix}$$

является матрицей ранга 2, или, элементы $s_1 x_1 + s_2 x_2$ и $t_1 x_1 + t_2 x_2$ являются линейно независимыми. Но это значит, что

$$\mathscr{S}(s_1 x_1 + s_2 x_2) \neq \mathscr{S}(t_1 x_1 + t_2 x_2),$$

или, по лемме 7, $G[p^\infty] \neq G[q^\infty]$.

Таким образом мы доказали, что отображение $\mathfrak{a}^*(p) \to G[p^\infty]$ является простым отображением множества $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B)$ на множество $\mathfrak{G}(G)$. Следовательно, справедливо равенство (8), как утверждает лемма.

Теорема 2. *Пусть G — группа без кручения ранга 2 обладающая свойством (R) и пусть $\mathfrak{M}_B$ — полная каноническая система инвариантов Мальцева вида (4) группы G относительно к некоторому базису B. Если множество рациональных чисел $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B)$, определенное формулой (5), содержит по крайней мере три различных рациональных числа, то группа G неразложима в прямую сумму.*

Доказательство. Теорема является непосредственным следствием леммы 8 и леммы 6.

В силу предшествующей теоремы 2 можно при изучении разложимости групп без кручения ранга 2 ограничиться только группами обладающими свойством (R), для которых множество рациональных чисел $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B)$ содержит не более чем два различных числа.

§ 2.

Этот отдел посвящен изучению групп без кручения ранга 2 обладающих свойством (R), у которых множество $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B)$ содержит в точности два различных числа.

Лемма 9. *Пусть G — группа без кручения ранга 2 обладающая свойством (R) и пусть $\mathfrak{M}_B(G)$ — полная каноническая система инвариантов Мальцева вида (4) группы G относительно некоторого ее базиса B. Если множество рациональных чисел $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B)$ содержит в точности два различных числа,*

$$\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B) = (\mathfrak{a}^*(p), \mathfrak{a}^*(q))$$

то группа G разложима в прямую сумму тогда и только тогда, если

$$G = \{G[p^\infty],\ G[q^\infty]\}. \tag{9}$$

Доказательство. Как следует из леммы 7 (смотри также доказательство леммы 8), если $\mathfrak{a}^*(p) \neq \mathfrak{a}^*(q)$, то также $G[p^\infty] \neq G[q^\infty]$, или, $G[p^\infty] \cap G[q^\infty] = (O)$. Отсюда следует, что

$$\{G[p^\infty], G[q^\infty]\} = G[p^\infty] \dotplus G[q^\infty].$$

Значит, если выполнены условия леммы и если имеет место соотношение (9), то группа G разложима в прямую сумму. В то же время из соотношения $G[p^\infty] \cap G[q^\infty] = (O)$ и из определения подгрупп $G[p^\infty]$ и $G[q^\infty]$ следует (смотри доказательство леммы 6), что

$$\text{typ}\ G[p^\infty] \parallel \text{typ}\ G[q^\infty].$$

Итак, если группа G разложима в прямую сумму, то по лемме 4 будет $G = G[p^\infty] \dotplus G[q^\infty]$, или, справедливо соотношение (9).

Этим лемма доказана.

Пусть G — группа без кручения и пусть g — произвольный ненулевой элемент из G. Если в группе G разрешимо уравнение $nx = mg$, где m, n $(n \neq 0)$ — некоторые целые рациональные числа, и если $ng_1 = mg$ (элемент g_1 определен однозначно), то элемент g_1 будем записывать в виде $g_1 = (m/n)g$. Множество всех рациональных чисел m/n (где m, n — уже целые рациональные числа), для которых в G разрешимо уравнение $nx = mg$, будем обозначать символом $\mathscr{R}(g; G)$. Как легко видеть, сервантная подгруппа $\mathscr{S}(g)$ группы G является множеством в точности всех элементов из G вида ϱg, где $\varrho \in \mathscr{R}(g; G)$; значит,

$$\mathscr{S}(g) = E(g_1; g_1 \in G, g_1 = \varrho g, \varrho \in \mathscr{R}(g; G)), \tag{10}$$

или, просто $\mathscr{S}(g) = \mathscr{R}(g; G)\, g$. О множестве рациональных чисел $\mathscr{R}(g; G)$ можно легко доказать, что это подгруппа аддитивной группы рациональных чисел $\mathscr{R}$ порожденная в точности всеми рациональными числами вида $1/p^k$, где p — простое (положительное) число и k — целое неотрицательное число удовлетворяющее неравенству $k \leqq \chi(g; p, G)$. Это значит, что если $m/n \in \mathscr{R}(g; G)$, где m, n ($n > 0$) — взаимно простые целые рациональные числа и если пишем

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}, \text{ где } p_i \neq p_j (i, j = 1, 2, \ldots, r; i \neq j),$$

то уже необходимо будет

$$0 \leqq k_i \leqq \chi(g; p_i, G)\ (i = 1, 2, \ldots, r). \tag{11}$$

Для дальнейших изучений окажется полезным пользоваться следующей записью: Рациональное число 0_+ будем представлять в виде дроби $0/1$, значит, $0_+ = 0/1$, и рациональное число 0_- будем представлять в виде формальной дроби $1/0$, или, $0_- = 1/0$; притом оба этих предшествующих представления будем считать несократимыми.

Лемма 10. *Пусть G — группа без кручения ранга 2 обладающая свойством (R) и пусть (4) — полная каноническая система инвариантов Мальцева группы G относительно к некоторому ее базису $B = (x_1, x_2)$. Пусть далее множество рациональных чисел $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B)$ состоит в точности из двух различных чисел,*

$$\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B) = \left(\frac{s_2^{(i)}}{s_1^{(i)}}\ (i = 1, 2)\right),$$

где $s_j^{(i)}(i, j = 1, 2)$ — такие целые рациональные числа, что $(s_1^{(i)}, s_2^{(i)}) = 1 (i = 1, 2)$. Если определим элементы

$$s_1^{(i)} x_1 + s_2^{(i)} x_2 = g_i \in G\ (i = 1, 2)$$

и если положим $\Delta = \det(s_j^{(i)})_{i,j=1}^2$, то группа G разложима в прямую сумму тогда и только тогда, если выполнены следующие условия:

a) $$\frac{s_i^{(2)}}{\Delta} \in \mathscr{R}(g_1; G), \qquad \frac{s_i^{(1)}}{\Delta} \in \mathscr{R}(g_2; G) \qquad (i = 1, 2);$$

b) *для каждого простого числа $p \in \Pi_1(G)$ должно быть*

$$\frac{s_{\pi(1)}^{(2)}}{p^{\alpha_2(p)}\Delta} \in \mathscr{R}(g_1; G), \qquad \frac{s_{\pi(1)}^{(1)}}{p^{\alpha_2(p)}\Delta} \in \mathscr{R}(g_2; G),$$

где $\pi = \pi_p$;

c) *для каждого простого числа $p \in \Pi_0(G)$ должно быть*

$$\frac{s_{\pi(2)}^{(2)} - a(p)\, s_{\pi(1)}^{(2)}}{p^{\alpha_1(p)}\Delta} \in \mathscr{R}(g_1; G), \qquad \frac{s_{\pi(1)}^{(2)}}{p^{\alpha_2(p)}\Delta} \in \mathscr{R}(g_1; G),$$

$$\frac{s_{\pi(2)}^{(1)} - a(p)\, s_{\pi(1)}^{(1)}}{p^{\alpha_1(p)}\Delta} \in \mathscr{R}(g_2; G), \qquad \frac{s_{\pi(1)}^{(1)}}{p^{\alpha_2(p)}\Delta} \in \mathscr{R}(g_2; G),$$

где вместо $\mathfrak{a}(p)$ пишем $a(p)$ и где полагаем $\pi = \pi_p$.*

Доказательство. Если $s_2^{(i)}/s_1^{(i)} = \mathfrak{a}^*(p_i)\ (i = 1, 2)$, то по лемме 9 группа G разложима в прямую сумму тогда и только тогда, если имеет место соотношение (9), значит, если $G = \{G[p_1^\infty], G[p_2^\infty]\}$. Из определения элементов $g_i \in G$ $(i = 1, 2)$ в силу леммы 7 имеем

$$G[p_1^\infty] = \mathscr{S}(g_1), G[p_2^\infty] = \mathscr{S}(g_2).$$

Итак, если положим (см. (10))

$$S = \{\mathscr{S}(g_1), \mathscr{S}(g_2)\} = \mathscr{R}(g_1; G)\, g_1 \dotplus \mathscr{R}(g_2; G)\, g_2, \tag{12}$$

то группа G разложима в прямую сумму тогда и только тогда, если $G = S$, или, если произвольная система образующих группы G вся содержится уже в группе S. Так как все p-примитивные подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$ группы G вместе порождают группу G (см. [2], § 3), то группа G разложима в прямую сумму в точности тогда, если для каждого простого числа p произвольная система образующих p-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$ вся содержится в подгруппе S. Этой последней формулировкой воспользуемся для доказательства леммы; притом в качестве системы образующих подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$ выберем систему, соответствующую канонической p-матрице $\mathfrak{K}^{(p)}$ (см. [2], § 1).

a) Если $p \in \Pi_2(G)$, то каноническая p-матрица $\mathfrak{K}^{(p)}$ имеет вид (см. [2], теорема 3)

$$\mathfrak{K}^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_\infty(p), & 0 \\ 0, & \mathfrak{p}_\infty(p) \end{pmatrix},$$

итак, p-примитивную подгруппу $\Gamma^{(p)}(B)$ порождают элементы $(1/p^\alpha)\, x_i\ (i = 1, 2; \alpha = 1, 2, \ldots)$. В этом случае наше условие имеет вид

$$\frac{1}{p^\alpha} x_i \in S \quad (i = 1, 2;\ \alpha = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

* Если $p \in \Pi_0(G)$, то целое p-адическое число $\mathfrak{a}(p)$ выступающее в p-матрице $\mathfrak{K}^{(p)}$ вида (3) является уже целым рациональным числом, удовлетворяющим неравенству $0 \leqq \mathfrak{a}(p) < p^{\alpha_1(p) - \alpha_2(p)}$ (см. [1]).

В силу определения элементов g_i $(i = 1, 2)$ можно писать

$$x_1 = \frac{1}{\Delta}(s_2^{(2)}g_1 - s_2^{(1)}g_2), \qquad x_2 = \frac{-1}{\Delta}(s_1^{(2)}g_1 - s_1^{(1)}g_2),$$

следовательно, условия (13) можно выразить в виде

$$\frac{1}{p^\alpha \Delta}(s_2^{(2)}g_1 - s_2^{(1)}g_2) \in \mathscr{R}(g_1; G)\, g_1 \dotplus \mathscr{R}(g_2; G)\, g_2 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots),$$

$$\frac{-1}{p^\alpha \Delta}(s_1^{(2)}g_1 - s_1^{(1)}g_2) \in \mathscr{R}(g_1; G)\, g_1 \dotplus \mathscr{R}(g_2; G)\, g_2 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

Но последние соотношения можно еще переписать и получим

$$\frac{s_i^{(2)}}{p^\alpha \Delta} \in \mathscr{R}(g_1; G), \qquad \frac{s_i^{(1)}}{p^\alpha \Delta} \in \mathscr{R}(g_2; G) \qquad (i = 1, 2;\ \alpha = 1, 2, \ldots).$$

Так как $p \in \Pi_2(G)$, то $r_p(G) = 2 = r(G)$, или, $G[p^\infty] = G$ (см. [2], лемма 7. 1). Следовательно, $\chi(g_i; p, G) = \infty$ $(i = 1, 2)$, или, получаем условия

$$\frac{s_i^{(2)}}{\Delta} \in \mathscr{R}(g_1; G), \qquad \frac{s_i^{(1)}}{\Delta} \in \mathscr{R}(g_2; G) \qquad (i = 1, 2);$$

это в точности условия a).

b) Пусть теперь $p \in \Pi_1(G)$. В этом случае каноническая p-матрица $\mathfrak{K}^{(p)}$ имеет вид

$$\mathfrak{K}^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_\infty(p), & \dfrac{s_{\pi(2)}^{(i)}}{s_{\pi(1)}^{(i)}} \\ 0, & \mathfrak{p}_{\alpha_2}(p) \end{pmatrix},$$

где просто пишем π вместо π_p и i — некоторый из индексов 1, 2. Притом p-матрица $\mathfrak{K}^{(p)}$ является p-матрицей p-примитивной подгруппы группы G относительно к базису $\pi_p(B) = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)})$. Так как $(s_1^{(i)}, s_2^{(i)}) = 1$ и так как $s_{\pi(2)}^{(i)}/s_{\pi(1)}^{(i)}$ — целое p-адическое число, то должно быть также $(p, s_{\pi(1)}^{(i)}) = 1$, значит, p-матрица (см. [1], § 6)

$$\mathfrak{N}^{(p)} = \begin{pmatrix} s_{\pi(1)}^{(i)}, & s_{\pi(2)}^{(i)} \\ 0, & \mathfrak{p}_{\alpha_2}(p) \end{pmatrix}.$$

служит p-матрицей для p-примитивной подгруппы групы G относительно к базису $\pi_p(B)$. Это значит, что элементы

$$\frac{1}{p^\alpha}(s_{\pi(1)}^{(i)}x_{\pi(1)} + s_{\pi(2)}^{(i)}x_{\pi(2)}) = \frac{1}{p^\alpha}\, g_i \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots)$$

вместе с элементом $(1/p^{\alpha_2(p)})\, x_{\pi(2)}$ порождают соответствующую p-примитивную подгруппу группы G, или, в этом случае получаем условия

$$\frac{1}{p^{\alpha_2(p)}}\, x_{\pi(2)} \in S, \qquad \frac{1}{p^\alpha}\, g_i \in S \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

Но так как для этого простого числа p имеем $\mathfrak{a}^*(p) = s_{\pi(2)}^{(i)}/s_{\pi(1)}^{(i)} (1 \leqq i \leqq 2)$, то по лемме 7 будет $G[p^\infty] = \mathscr{S}(g_i)$. Кроме того в силу (12) $\mathscr{S}(g_i) \subseteq S$, следовательно, в этом случае условия $(1/p^\alpha)\, g_i \in S$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ выполнены автоматически. Итак, остается единственное условие $(1/p^{\alpha_2(p)})\, x_{\pi(2)} \in S$. Так как

$$x_{\pi(2)} = \frac{\pm 1}{\Delta}(s_{\pi(1)}^{(2)}g_1 - s_{\pi(1)}^{(1)}g_2), \tag{14}$$

где знак $\pm$ зависит от перестановки $\pi = \pi_p$, то можем писать

$$\frac{1}{p^{\alpha_2(p)}}\, x_{\pi(2)} = \frac{\pm 1}{p^{\alpha_2(p)}\Delta}(s_{\pi(1)}^{(2)}g_1 - s_{\pi(1)}^{(1)}g_2) \in S.$$

Отсюда, в силу прямого разложения (12) группы S уже непосредственно следуют условия b).

c) Пусть на конец $p \in \Pi_0(G)$. В таком случае каноническая p-матрица $\mathfrak{K}^{(p)}$ имеет вид (см. [2], § 1 и теорему 3)

$$\mathfrak{K}^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_{\alpha_1}(p), & \mathfrak{p}_{\alpha_1}(p)\, a(p) \\ 0, & \mathfrak{p}_{\alpha_2}(p) \end{pmatrix},$$

где* $0 \leqq \alpha_2(p) \leqq \alpha_1(p) < \infty$ и $a(p)$ — целое рациональное число удовлетворяющее неравенству $0 \leqq a(p) < p^{\alpha_1(p) - \alpha_2(p)}$. Следовательно, системой образующих для p-примитивной подгруппы группы G относительно к базису $\pi_p(B) = (x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)})$ служит пара элементов

$$g_1^{(\alpha_1)}(p) = \frac{1}{p^{\alpha_1(p)}}(x_{\pi(1)} + a(p)\, x_{\pi(2)}), \qquad g_2^{(\alpha_2)}(p) = \frac{1}{p^{\alpha_2(p)}}\, x_{\pi(2)}.$$

Это значит, что в этом случае имеем условия $g_i^{(\alpha_i)}(p) \in S$ $(i = 1, 2)$. Так как с формулой (14) имеет место также формула

$$x_{\pi(1)} = \frac{\pm 1}{\Delta}(s_{\pi(2)}^{(2)}g_1 - s_{\pi(2)}^{(1)}g_2),$$

отсюда следуют соотношения

$$g_1^{(\alpha_1)}(p) = \frac{\pm 1}{p^{\alpha_1(p)}\Delta}[(s_{\pi(2)}^{(2)} - a(p)\, s_{\pi(1)}^{(2)})\, g_1 - (s_{\pi(2)}^{(1)} - a(p)\, s_{\pi(1)}^{(1)})\, g_2] \in S,$$

$$g_2^{(\alpha_2)}(p) = \frac{\pm 1}{p^{\alpha_2(p)}\Delta}(s_{\pi(1)}^{(2)}g_1 - s_{\pi(1)}^{(1)}g_2) \in S.$$

* Целые неотрицательные числа α_1, α_2 зависят от простого числа p, следовательно, нужно писать $\alpha_i = \alpha_i(p)$ $(i = 1, 2)$.

Их этих последних формул в силу прямого разложения (12) уже непосредственно получаем условия c).

Условия высказанные в отделах a), b) и c) вместе представляют необходимые и достаточные условия для того, чтобы имело место включение $G \subseteq S$, или, чтобы группа G являлась разложимой в прямую сумму.

Этим лемма полностью доказана.

Для удобнейшей формулировки некоторых утверждений введем еще следующее обозначение: Если $\mathfrak{a}$ — произвольное целое p-адическое число, то символом $\exp_p \mathfrak{a}$ обозначим верхнюю грань множества всех целых неотрицательных чисел α, для которых $p^\alpha | \mathfrak{a}$, т. е. для которых существует целое p-адическое число $\mathfrak{b}^{(\alpha)}$ такое, что $p^\alpha \mathfrak{b}^{(\alpha)} = \mathfrak{a}$. В частности, для каждого простого числа p имеем $\exp_p 0 = \infty$; но если $\mathfrak{a} \neq 0$, то всегда $\exp_p \mathfrak{a} < \infty$.

Лемма 11. *Пусть G — группа без кручения ранга 2 обладающая свойством (R), пусть (4) — полная каноническая система инвариантов Мальцева группы G относительно к некоторому ее базису $B = (x_1, x_2)$ и пусть множество $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B)$ состоит в точности из двух различных рациональных чисел. Если сохраним все обозначения из леммы 10, то группа G разложима в прямую сумму тогда и только тогда, если выполнены следующие условия:*

1. *Для каждого $p \in \Pi_1(G)$ справедливы неравенства*

$$\max[\alpha_2(p) + \exp_p \Delta - \exp_p s^{(2)}_{\pi(1)}, \exp_p \Delta - \exp_p s^{(2)}_{\pi(2)}] \leqq \chi(g_1; p, G),$$
$$\max[\alpha_2(p) + \exp_p \Delta - \exp_p s^{(1)}_{\pi(1)}, \exp_p \Delta - \exp_p s^{(1)}_{\pi(2)}] \leqq \chi(g_2; p, G).$$

2. *Для каждого $p \in \Pi_0(G)$ справедливы неравенства*

$$\max[\alpha_1(p) + \exp_p \Delta - \exp_p (s^{(2)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(2)}_{\pi(1)}), \alpha_2(p) + \exp_p \Delta - \exp_p s^{(2)}_{\pi(1)}, \exp_p \Delta - \exp_p s^{(2)}_{\pi(2)}] \leqq \chi(g_1; p, G),$$
$$\max[\alpha_1(p) + \exp_p \Delta - \exp_p (s^{(1)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(1)}_{\pi(1)}), \alpha_2(p) + \exp_p \Delta - \exp_p s^{(1)}_{\pi(1)}, \exp_p \Delta - \exp_p s^{(1)}_{\pi(2)}] \leqq \chi(g_2; p, G).$$

Доказательство. Если воспользуемся обозначением $\exp_p \mathfrak{a}$ и если напомним определение группы $\mathscr{R}(g; G)$ (см. неравенства (11)), то в силу леммы 10 можно утверждать: Группа G разложима в прямую сумму тогда и только тогда, если выполнены следующие условия:

a) Для каждого простого числа p должно быть

$$\exp_p \Delta - \exp_p s_i^{(2)} \leqq \chi(g_1; p, G) \quad (i = 1, 2),$$
$$\exp_p \Delta - \exp_p s_i^{(1)} \leqq \chi(g_2; p, G) \quad (i = 1, 2).$$

b) Для каждого $p \in \Pi_1(G)$ должно быть

$$\alpha_2(p) + \exp_p \Delta - \exp_p s^{(2)}_{\pi(1)} \leqq \chi(g_1; p, G),$$
$$\alpha_2(p) + \exp_p \Delta - \exp_p s^{(1)}_{\pi(1)} \leqq \chi(g_2; p, G).$$

c) Для каждого $p \in \Pi_0(G)$ должно быть

$$\max[\alpha_1(p) + \exp_p \Delta - \exp_p (s^{(2)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(2)}_{\pi(1)}), \alpha_2(p) + \exp_p \Delta - \exp_p s^{(2)}_{\pi(1)}] \leqq \leqq \chi(g_1; p, G),$$
$$\max[\alpha_1(p) + \exp_p \Delta - \exp_p (s^{(1)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(1)}_{\pi(1)}), \alpha_2(p) + \exp_p \Delta - \exp_p s^{(1)}_{\pi(1)}] \leqq \leqq \chi(g_2; p, G).$$

Как мы уже заметили, если $p \in \Pi_2(G)$, то $\chi(g_i; p, G) = \infty$ $(i = 1, 2)$, или, в таком случае условия a) выполнены автоматически. Кроме того, если $p \in \Pi_1(G)$ и если выполнены условия b) то для $i = \pi_p(1)$ будут условия a) выполнены автоматически, и ровнако для $p \in \Pi_0(G)$, если выполнены условия c). Следовательно, можем утверждать: Группа G разложима в прямую сумму в точности тогда, если

a_1) для каждого $p \in \Pi_1(G)$ и для каждого $p \in \Pi_0(G)$ выполнены неравенства

$$\exp_p \Delta - \exp_p s^{(2)}_{\pi(2)} \leqq \chi(g_1; p, G),$$
$$\exp_p \Delta - \exp_p s^{(1)}_{\pi(2)} \leqq \chi(g_2; p, G);$$

b_1) выполнены условия b);

c_1) выполнены условия c).

Отсюда уже непосредственно следует утверждение леммы.

Теперь напомним одно обозначение, которым также пользуемся в [2].

Пусть G — группа без кручения ранга 2 и пусть (4) — полная каноническая система инвариантов Мальцева группы G относительно к некоторому ее базису B. В частности, для каждого простого числа p определены значения $\alpha_i(p)$ $(i = 1, 2)$, выступающие в канонической p-матрице $\mathfrak{K}^{(p)}$ (см. (3)). Притом $\alpha_i(p)$ $(1 \leqq i \leqq 2)$ — или целые рациональные числа, или же символ ∞. Теперь для каждого простого числа p и для каждого натурального числа α положим

$$\lambda_i(\alpha, p) = \max(0, \alpha - \alpha_i(p)) \quad (i = 1, 2).$$

Лемма 12. *Пусть G — группа без кручения ранга 2 и пусть (4) — полная каноническая система инвариантов Мальцева группы G относительно к некоторому ее базису $B = (x_1, x_2)$. Пусть, далее, каждое целое p-адическое число $\mathfrak{a}(p)$ выступающее в p-матрице $\mathfrak{K}^{(p)}$ представлено в виде p-адически сходящейся последовательности $(a^{(\alpha)}(p))_{\alpha=1}^{\infty}$ целых рациональных чисел. Если g — ненулевой элемент группы G вида*

$$g = s_1 x_1 + s_2 x_2,$$

где $s_i (i = 1, 2)$ — некоторые целые рациональные числа и если для каждого простого числа p положим

$$(15) \qquad \begin{cases} \omega_1(p) = \sup[(0) \cup E(\alpha; \alpha \geqq 1, p^{\lambda_1(\alpha, p)} | s_{\pi(1)})], \\ \omega_2(p) = \sup[(0) \cup E(\alpha; \alpha \geqq 1, p^{\lambda_2(\alpha, p)} | (s_{\pi(2)} - a^{(\alpha)} s_{\pi(1)}))], \end{cases}$$

где пишем просто π вместо π_p, то имеет место формула

$$\chi(g; p, G) = \min\,[\omega_1(p), \omega_2(p)]. \tag{16}$$

Доказательство. Если α — натуральное число, то уравнение $p^\alpha x = s_1x_1 + s_2x_2 = g$ обладает в группе G решением в точности тогда, если имеет место соотношение

$$\frac{1}{p^\alpha}(s_1x_1 + s_2x_2) \in \Gamma_\alpha^{(p)}, \tag{17}$$

где $\Gamma_\alpha^{(p)} = \Gamma_\alpha^{(p)}(B)$ является α-тым слоем p-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$ группы G (см. [2], § 1). Если положим

$$\begin{cases} g_1^{(\alpha)}(p) = \dfrac{p^{\lambda_1(\alpha,p)}}{p^\alpha}\left(x_{\pi(1)} + a^{(\alpha)}(p)\,x_{\pi(2)}\right), \\ g_2^{(\alpha)}(p) = \dfrac{p^{\lambda_2(\alpha,p)}}{p^\alpha}\,x_{\pi(2)}, \quad \text{где} \quad \pi = \pi_p, \end{cases} \tag{18}$$

то элементы $g_i^{(\alpha)}(p)$ $(i = 1, 2)$ служат образующими для подгруппы $\Gamma_\alpha^{(p)}$ (см. [2], § 1). Следовательно, соотношение (17) справедливо в точности тогда, если существуют такие целые рациональные числа h, k, что

$$\frac{1}{p^\alpha}(s_1x_1 + s_2x_2) = hg_1^{(\alpha)}(p) + kg_2^{(\alpha)}(p),$$

или, в силу (18), если будет

$$s_1x_1 + s_2x_2 = hp^{\lambda_1(\alpha,p)}\left(x_{\pi(1)} + a^{(\alpha)}(p)\,x_{\pi(2)}\right) + kp^{\lambda_2(\alpha,p)}x_{\pi(2)}.$$

Если сравним коэффициенты у элементов x_1, x_2 в последнем равенстве, то получим соотношения

$$s_{\pi(1)} = hp^{\lambda_1(\alpha,p)}, \qquad s_{\pi(2)} = hp^{\lambda_1(\alpha,p)}a^{(\alpha)}(p) + kp^{\lambda_2(\alpha,p)},$$

которые можно также записать в виде

$$\begin{cases} hp^{\lambda_1(\alpha,p)} = s_{\pi(1)}, \\ kp^{\lambda_2(\alpha,p)} = s_{\pi(2)} - a^{(\alpha)}(p)\,s_{\pi(1)}. \end{cases} \tag{19}$$

Таким образом мы доказали следующее утверждение: Если α — натуральное число, то уравнение $p^\alpha x = s_1x_1 + s_2x_2 = g$ обладает в группе G решением в точности тогда, если существуют целые рациональные числа h, k удовлетворяющие соотношениям (19), или, если выполнены условия

$$p^{\lambda_1(\alpha,p)} \mid s_{\pi(1)}, \qquad p^{\lambda_2(\alpha,p)} \mid \left(s_{\pi(2)} - a^{(\alpha)}(p)\,s_{\pi(1)}\right).$$

Итак, если символи $\omega_i(p)$ $(i = 1, 2)$ определены формулами (15), то для p-высоты $\chi(g; p, G)$ элемента g в G справедливо соотношение (16).

Этим лемма полностью доказана.

Лемма 13. *Пусть G — группа без кручения ранга 2 и пусть (4) — полная каноническая система инвариантов Мальцева группы G относительно к некоторому ее базису $B = (x_1, x_2)$. Если g — ненулевой элемент группы G вида $g = s_1x_1 + s_2x_2$, где $s_i (i = 1, 2)$ — целые рациональные числа, то для каждого простого числа p имеет место формула*

$$\chi(g; p, G) = \min\,[\alpha_1(p) + \exp_p s_{\pi(1)},\ \alpha_2(p) + \exp_p(s_{\pi(2)} - a(p)\,s_{\pi(1)})], \tag{20}$$

где просто пишем π вместо π_p.

Доказательство. Если значения $\omega_i(p)$ $(i = 1, 2)$ определены формулами (15), то из определения чисел $\lambda_i(\alpha, p)$ $(i = 1, 2; \alpha = 1, 2, \ldots)$ непосредственно следует, что

$$\omega_1(p) = \alpha_1(p) + \exp_p s_{\pi(1)}. \tag{21}$$

Теперь еще докажем, что имеет место соотношение

$$\omega_2(p) = \alpha_2(p) + \exp_p(s_{\pi(2)} - a(p)\,s_{\pi(1)}). \tag{22}$$

Для этой цели достаточно напомнить, что справедливо следующее предложение: Пусть $\boldsymbol{b} = (b^{(\alpha)})_{\alpha=1}^{\infty}$ — целое p-адическое число (т. е. $b^{(\alpha)} \equiv b^{(\alpha+1)} \pmod{p^\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$, где $b^{(\alpha)}$ — целые рациональные числа); то $\exp_p \boldsymbol{b} = k > 0$ в точности тогда, если $p^k \mid b^{(k)}$, но $p^{k+1} \nmid b^{(k+1)}$. Это последнее условие можно также высказать следующим образом:

$$p^\alpha \mid b^{(\alpha)} \text{ для } \alpha \leqq k, \quad p^\alpha \nmid b^{(\alpha)} \text{ для } \alpha > k.$$

Из этого предложения непосредственно следует, что если $\exp_p \boldsymbol{b} > 0$, то имеет место формула

$$\exp_p \boldsymbol{b} = \sup E(\alpha; \alpha > 0, p^\alpha | b^{(\alpha)}).$$

Итак, в каждом случае можем писать

$$\exp_p \boldsymbol{b} = \sup\,[(0) \cup E(\alpha; \alpha > 0, p^\alpha | b^{(\alpha)})].$$

Но отсюда и из определения чисел $\lambda_2(\alpha, p)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$ вытекает для $\omega_2(p)$ (см. формулы (15)) равенство (22). Из соотношений (21), (22) и (16) уже получаем формулу (20) и этим лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть G — группа без кручения ранга 2 обладающая свойством (R) и пусть $\mathfrak{M}_B(G)$ — полная каноническая система инвариантов Мальцева вида (4) группы G относительно к некоторому ее базису B. Если множество рациональных чисел $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B)$ состоит в точности из двух элементов,**

$$\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B) = \left(\frac{s_2^{(i)}}{s_1^{(i)}}\ (i = 1, 2)\right),$$

* Здесь опять пишем $0_+ = \dfrac{0}{1}$ и формально полагаем $0_- = \dfrac{1}{0}$.

где $s_j^{(i)}(i, j = 1, 2)$ — такие целые рациональные числа, что $(s_1^{(i)}, s_2^{(i)}) = 1$ $(i = 1, 2)$, и если положим $\Delta = \det(s_j^{(i)})^2_{i,j=1}$, то группа G разложима в прямую сумму в точности тогда, если для каждого простого числа $p \in \Pi_0(G)$ выполнены следующие две неравенства:

1.

$$\exp_p \Delta + \max [\alpha_1(p) - \exp_p (s^{(2)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(2)}_{\pi(1)}), \alpha_2(p) - \exp_p s^{(2)}_{\pi(1)}, - \exp_p s^{(2)}_{\pi(2)}] \leqq$$
$$\leqq \min [\alpha_1(p), \alpha_2(p) + \exp_p (s^{(1)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(1)}_{\pi(1)})],$$

2.

$$\exp_p \Delta + \max [\alpha_1(p) - \exp_p (s^{(1)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(1)}_{\pi(1)}), \alpha_2(p) - \exp_p s^{(1)}_{\pi(1)}, -\exp_p s^{(1)}_{\pi(2)}] \leqq$$
$$\leqq \min [\alpha_1(p), \alpha_2(p) + \exp_p (s^{(2)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(2)}_{\pi(1)})];$$

притом здесь всюду пишем π вместо π_p.

Доказательство. Для доказательства этой теоремы воспользуемся прежде всего леммой 11. Притом сначала докажем, что условия 1) из леммы 11 выполнены автоматически. Для простоты докажем только правильность первого из этих условий, так как доказательство второго условия вполне аналогично.

Итак, положим $g_1 = s_2^{(1)}x_1 + s_1^{(1)}x_2$. Так как для простого числа $p \in \Pi_1(G)$ имеем $\alpha_1(p) = \infty$, то по формуле (20) из леммы 13 будет

$$\chi(g_1; p, G) = \alpha_2(p) + \exp_p (s^{(1)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(1)}_{\pi(1)}). \tag{23}$$

Для целого p-адического числа $a(p)$ существуют две возможности: или $a(p) = s^{(1)}_{\pi(2)}/s^{(1)}_{\pi(1)}$, или же $a(p) = s^{(2)}_{\pi(2)}/s^{(2)}_{\pi(1)}$. В первом случае имеем $s^{(1)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(1)}_{\pi(1)} = 0$, следовательно, по формуле (23) будет $\chi(g_1; p, G) = \infty$. Это значит, что в этом случае первое из неравенств 1) леммы 11 выполнено. Во втором случае имеем $s^{(1)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(1)}_{\pi(1)} = \pm \Delta / s^{(2)}_{\pi(1)}$, или, можем писать

$$\exp_p(s^{(1)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(1)}_{\pi(1)}) = \exp_p \frac{\Delta}{s^{(2)}_{\pi(1)}}.$$

Имея ввиду, что $a(p) = s^{(2)}_{\pi(2)}/s^{(2)}_{\pi(1)}$ является целым p-адическим числом и что $(s^{(2)}_{\pi(1)}, s^{(2)}_{\pi(2)}) = 1$, то необходимо $(s^{(2)}_{\pi(1)}, p) = 1$, или,

$$\exp_p \frac{\Delta}{s^{(2)}_{\pi(1)}} = \exp_p \Delta.$$

Таким образом в силу формулы (23) в этом случае получаем соотношение

$$\chi(g_1; p, G) = \alpha_2(p) + \exp_p \Delta.$$

Так как $\exp_p s^{(2)}_{\pi(1)} = 0$, то в то же время имеем

$$\max [\alpha_2(p) + \exp_p \Delta - \exp_p s^{(2)}_{\pi(1)}, \exp_p \Delta - \exp_p s^{(2)}_{\pi(2)}] =$$
$$= \max [\alpha_2(p) + \exp_p \Delta, \exp_p \Delta - \exp_p s^{(2)}_{\pi(2)}] = \alpha_2(p) + \exp_p \Delta.$$

Следовательно, первое неравенство из 1) леммы 11, имеющее в этом случае вид

$$\alpha_2(p) + \exp_p \Delta \leqq \chi(g_1; p, G) = \alpha_2(p) + \exp_p \Delta,$$

опять выполнено автоматически.

Этим мы доказали, что неравенства 1) леммы 11 при наших условиях выполнены всегда. Это значит, что группа G разложима в прямую сумму в точности тогда, если выполнены условия 2) из леммы 11. В силу леммы 13 (см. формулу (20)) можно эти условия записать в следующем виде: Для каждого простого числа $p \in \Pi_0(G)$ должно одновременно быть

1.

$$\exp_p \Delta + \max [\alpha_1(p) - \exp_p (s^{(2)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(2)}_{\pi(1)}), \alpha_2(p) - \exp_p s^{(2)}_{\pi(1)}, - \exp_p s^{(2)}_{\pi(2)}] \leqq$$
$$\leqq \min [\alpha_1(p) + \exp_p s^{(1)}_{\pi(1)}, \alpha_2(p) + \exp_p (s^{(1)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(1)}_{\pi(1)})],$$

2.

$$\exp_p \Delta + \max [\alpha_1(p) - \exp_p (s^{(1)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(1)}_{\pi(1)}), \alpha_2(p) - \exp_p s^{(1)}_{\pi(1)}, -\exp_p s^{(1)}_{\pi(2)}] \leqq$$
$$\leqq \min [\alpha_1(p) + \exp_p s^{(2)}_{\pi(1)}, \alpha_2(p) + \exp_p (s^{(2)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(2)}_{\pi(1)})],$$

где пишем π вместо π_p.

Теперь еще немножко упростим правые части последних неравенств и получим неравенства, высказанные в теореме.

Если $\exp_p s^{(i)}_{\pi(1)} > 0$ $(1 \leqq i \leqq 2)$, то необходимо

$$\exp_p (s^{(i)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(i)}_{\pi(1)}) = 0,$$

и, следовательно, будет

$$\min [\alpha_1(p) + \exp_p s^{(i)}_{\pi(1)}, \alpha_2(p) + \exp_p (s^{(i)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(i)}_{\pi(1)})] = \alpha_2(p) =$$
$$= \min [\alpha_1(p), \alpha_2(p) + \exp_p (s^{(i)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(i)}_{\pi(1)})].$$

Если $\exp_p s^{(i)}_{\pi(1)} = 0$, то $\alpha_1(p) + \exp_p s^{(i)}_{\pi(1)} = \alpha_1(p)$, следовательно, опять имеем

$$\min [\alpha_1(p) + \exp_p s^{(i)}_{\pi(1)}, \alpha_2(p) + \exp_p (s^{(i)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(i)}_{\pi(1)})] =$$
$$= \min [\alpha_1(p), \alpha_2(p) + \exp_p (s^{(i)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(i)}_{\pi(1)})].$$

Таким образом мы доказали, что последнее равенство имеет место всегда (при условиях теоремы), значит, теорема полностью доказана.

Замечание. Если для группы G выполнены условия 1) и 2) формулированные в предшествующей теореме 3, то для каждого простого числа $p \in \Pi_0(G)$ имеет место соотношение

$$(s^{(1)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(1)}_{\pi(1)}) \cdot (s^{(2)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(2)}_{\pi(1)}) \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ p^{\alpha_1(p) - \alpha_2(p)}). \tag{24}$$

Даже можно сказать, что для почти всех (т. е. с исключением, может быть, конечного числа) простых чисел $p \in \Pi_0(G)$ соотношение (24) равносильно неравенствам 1) и 2).

В самом деле, если для некоторого $p \in \Pi_0(G)$ соотношение (24) несправедливо, то имело бы место неравенство

$$\exp_p(s^{(1)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(1)}_{\pi(1)}) + \exp_p(s^{(2)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(2)}_{\pi(1)}) < \alpha_1(p) - \alpha_2(p),$$

или, также

$$\alpha_2(p) + \exp_p(s^{(1)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(1)}_{\pi(1)}) < \alpha_1(p) - \exp_p(s^{(2)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(2)}_{\pi(1)}),$$

и одновременно также

$$\alpha_2(p) + \exp_p(s^{(2)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(2)}_{\pi(1)}) < \alpha_1(p) - \exp_p(s^{(1)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(1)}_{\pi(1)}).$$

Но отсюда уже непосредственно следует, что в таком случае не выполнено никакое из условий 1) и 2) теоремы 3. Следовательно, из справедливости неравенств 1) и 2) следует справедливость соотношения (24).

Если теперь напомним, что для почти всех простых чисел $p \in \Pi_0(G)$ имеем

$$\exp_p \Delta = \exp_p s_j^{(i)} = 0 \quad (i, j = 1, 2),$$

то неравенства 1) и 2) из теоремы 3 можно для этих простых чисел записать в виде

$$\begin{aligned} &\max[\alpha_1(p) - \exp_p(s^{(2)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(2)}_{\pi(1)}),\ \alpha_2(p)] \leqq \\ &\leqq \min[\alpha_1(p),\ \alpha_2(p) + \exp_p(s^{(1)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(1)}_{\pi(1)})], \\ &\max[\alpha_1(p) - \exp_p(s^{(1)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(1)}_{\pi(1)}),\ \alpha_2(p)] \leqq \\ &\leqq \min[\alpha_1(p),\ \alpha_2(p) + \exp_p(s^{(2)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(2)}_{\pi(1)})]. \end{aligned}$$

Так как $\alpha_1(p) \geqq \alpha_2(p)$, то легко видеть, что последние неравенства равносильны между собой и одновременно равносильны со следующим единственным неравенством

$$\exp_p(s^{(1)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(1)}_{\pi(1)}) + \exp_p(s^{(2)}_{\pi(2)} - a(p)\, s^{(2)}_{\pi(1)}) \geqq \alpha_1(p) - \alpha_2(p).$$

Но последнее неравенство является другим представлением соотношения (24).

Этим доказательство замечания завершено.

§ 3.

При изучении разложимости групп без кручения ранга 2 нам остается уже единственный случай, когда множество $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B)$ содержит в точности одно рациональное число. И этим изучениям посвящен настоящий отдел.

Пусть G — группа без кручения ранга 2 обладающая свойством (R), пусть $\mathfrak{M}_B(G)$ — полная каноническая система инвариантов Мальцева группы G относительно к некоторому ее базису $B = (x_1, x_2)$ и пусть множество рациональных чисел $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B)$ состоит в точности из единственного рационального числа ϱ:

$$\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B) = (\varrho).$$

Число ϱ представим в виде несократимой дроби $\varrho = s_2/s_1$ (если $\varrho = 0_-$, то опять формально пишем $\varrho = 1/0$) и положим $g_1 = s_1 x_1 + s_2 x_2$. По лемме 7 должно тогда для каждого простого числа $p \in \Pi_1(G)$ быть $G[p^\infty] = \mathscr{S}(g_1)$, или, $\chi(g_1; p, G) = \infty$. Пусть B^* — произвольный базис группы G содержащий элемент g_1; значит, $B^* = (g_1, g_2)$. Но если дана полная каноническая система инвариантов Мальцева группы G относительно к базису B, то методом описанным в [1], § 8 можно для каждого простого числа p построить p-матрицу, являющуюся p-матрицей p-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(B^*)$ группы G. В таком случае, как следует из [1], можно уже для каждого простого числа p построить каноническую p-матрицу p-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(B^*)$ (точнее, примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(\sigma_p(B^*))$, где σ_p — некоторая перестановка множества (1, 2)). Следовательно, можно просто предполагать, что нам известна полная каноническая система $\mathfrak{M}_{B^*}(G)$ инвариантов Мальцева группы G относительно к базису B^*.

Так как moh $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_{B^*})$ является инвариантом группы G (см. лемму 8), то будет moh $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_{B^*}) =$ moh $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B)$, значит, множество $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_{B^*})$ содержит в точности единственное рациональное число ϱ^*. Если число ϱ^* представим в виде несократимой дроби $\varrho^* = s_2^*/s_1^*$, то элемент $g_1^* = s_1^* g_1 + s_2^* g_2$ обладает по лемме 7 тем свойством, что для каждого простого числа $p \in \Pi_1(G)$ будет $G[p^\infty] = \mathscr{S}(g_1^*)$, или, $\mathscr{S}(g_1^*) = \mathscr{S}(g_1)$. Но это значит, что $s_2^* = 0$, следовательно $\varrho^* = 0_+$.

Это предшествующее соображение мы осуществили только для того, чтобы показать, что при дальнейших изучениях можно ограничиться только следующим случаем: G является группой без кручения ранга 2 обладающей свойством (R), $\mathfrak{M}_B(G)$ является полной канонической системой инвариантов Мальцева группы G относительно к некоторому ее базису B и притом в точности

$$\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B) = (0_+). \tag{25}$$

Изучение этого частного случая, которым можно вполне заменить общий случай, окажется формально существенно проще.

Лемма 14. *Пусть G — группа без кручения ранга 2 обладающая свойством (R) и пусть $\mathfrak{M}_B(G)$ — полная каноническая система инвариантов Мальцева вида (4) группы G относительно к некоторому ее базису $B = (x_1, x_2)$, для которой имеет место соотношение (25). То прямое разложение*

$$G = \mathscr{S}(x_1) \dotplus \mathscr{S}(x_2) \tag{26}$$

имеет место в точности тогда, если для каждого простого числа $p \in \Pi_0(G)$ будет $a(p) = 0$.

Доказательство. Если для каждого простого числа $p \in \Pi_0(G)$ имеем $a(p) = 0$, то, как легко видеть (см. лемму 13), образующими для группы G служат элементы вида $(1/p^k)\, x_1$ и $(1/p^h)\, x_2$, где $k \leqq \chi(x_1; p, G)$, $h \leqq \chi(x_2; p, G)$, и p — произвольное простое (положительное) число. Очевидно, тогда имеет место прямое разложение (26).

Теперь предположим, что существует простое число $p \in \Pi_0(G)$, для которого $a(p) \neq 0$. Докажем, что в этом случае прямое разложение (26) не имеет места.

Для простоты положим $S = \mathcal{S}(x_1) \dotplus \mathcal{S}(x_2)$. Итак, чтобы имело место соотношение (26), то необходимо должно быть $G \subseteq S$, или, в частности

$$g_1^{(\alpha_1)}(p) = \frac{1}{p^{\alpha_1(p)}}(x_{\pi(1)} + a(p)\, x_{\pi(2)}) \in S;$$

здесь p обозначает простое число, для которого $a(p) \neq 0$ и $\pi = \pi_p$. Но это последнее соотношение справедливо только тогда, если

$$\frac{1}{p^{\alpha_1(p)}} \in \mathcal{R}(x_{\pi(1)};\, G), \qquad \frac{a(p)}{p^{\alpha_1(p)}} \in \mathcal{R}(x_{\pi(2)};\, G),$$

или, также, если

(27) $$\alpha_1(p) \leqq \chi(x_{\pi(1)};\, p, G), \quad \alpha_1(p) - \exp_p a(p) \leqq \chi(x_{\pi(2)};\, p, G).$$

Так как $a(p) \neq 0$, то должно быть $\alpha_2(p) < \alpha_1(p)$ и одновременно $\exp_p a(p) < \alpha_1(p) - \alpha_2(p)$, следовательно, по лемме 13 имеем

$$\chi(x_{\pi(1)};\, p, G) = \alpha_2(p) + \exp_p a(p) < \alpha_1(p),$$
$$\chi(x_{\pi(2)};\, p, G) = \alpha_2(p) < \alpha_1(p) - \exp_p a(p).$$

Этим мы доказали, что для этого простого числа p ни одно из неравенств (27) невыполнено, значит, соотношение (26) не имеет места и лемма полностью доказана.

Теорема 4. *Пусть G — группа без кручения ранга 2 обладающая свойством (R) и пусть $\mathfrak{M}_B(G)$ — полная каноническая система инвариантов Мальцева вида (4) группы G относительно к некоторому ее базису $B = (x_1, x_2)$, удовлетворяющая соотношению (25). Если для бесконечного числа простых чисел $p \in \Pi_0(G)$ будет $\pi_p = (1, 2)$, $\alpha_1(p) > \alpha_2(p)$ и одновременно $\exp_p a(p) > 0$, то группа G разложима в прямую сумму в точности тогда, если $a(p) = 0$ для каждого $p \in \Pi_0(G)$.*

Доказательство. Если $p \in \Pi_0(G)$ — такое простое число, что $\pi_p = (1, 2)$, $\alpha_1(p) > \alpha_2(p)$ и одновременно $\exp_p a(p) > 0$, то по лемме 13 будет

(28) $$\chi(x_1;\, p, G) = \alpha_2(p),$$
$$\chi(x_2;\, p, G) = \min\,[\alpha_1(p), \alpha_2(p) + \exp_p a(p)];$$

следовательно, в силу предположения имеем

(29) $$\chi(x_1;\, p, G) < \chi(x_2;\, p, G).$$

Для каждого простого числа $p \in \Pi_1(G)$ по той же лемме 13 имеем

$$\chi(x_2;\, p, G) = \alpha_2(p) < \infty = \chi(x_1;\, p, G).$$

Так как множество

(30) $$\Pi_0^*(G) = E(p;\, p \in \Pi_0(G), \pi_p = (1, 2), \alpha_1(p) > \alpha_2(p), \exp_p a(p) > 0)$$

по предположению бесконечно, то неравенство (29) имеет место для бесконечного числа простых чисел и поэтому тур $\mathcal{S}(x_1) \parallel$ тур $\mathcal{S}(x_2)$. В силу леммы 4 группа G разложима в прямую сумму в точности тогда, если $G = \mathcal{S}(x_1) \dotplus \mathcal{S}(x_2)$. Но как гласит лемма 14, этого рода разложением обладает группа G тогда и только тогда, если $a(p) = 0$ для каждого $p \in \Pi_0(G)$.

Этим теорема доказана.

Замечание. При формулировке предшествующей теоремы сыграло важную роль множество $\Pi_0^*(G)$ определенное формулой (30). Легко убедимся в том, что это множество является множеством в точности тех простых чисел $p \in \Pi_0(G)$, для которых справедливо неравенство (29); значит,

(30_1) $$\Pi_0^*(G) = E(p;\, p \in \Pi_0(G), \chi(x_1;\, p, G) < \chi(x_2;\, p, G)).$$

В самом деле, если $p \in \Pi_0^*(G)$, то в течение доказательства теоремы 4 мы уже доказали, что в таком случае справедливо неравенство (29).

Пусть, наоборот, для некоторого $p \in \Pi_0(G)$ имеет место неравенство (29). Если бы для этого числа p было $\pi_p = \varepsilon$, то по формуле (20) леммы 13 мы имели бы

$$\chi(x_1;\, p, G) = \min\,[\alpha_1(p), \alpha_2(p) + \exp_p a(p)],$$
$$\chi(x_2;\, p, G) = \alpha_2(p).$$

Отсюда следовало бы неравенство $\chi(x_1;\, p, G) \geqq \chi(x_2;\, p, G)$ и это противоречит предположению. Итак, $\pi_p = (1, 2)$. В таком случае имеют место соотношения (28), следовательно, для того, чтобы наступило неравенство (29), необходимы неравенства $\alpha_1(p) > \alpha_2(p)$ и $\exp_p a(p) > 0$. Таким образом мы доказали, что $p \in \Pi_0^*(G)$.

Теоремой 4 вполне разрешен тот случай, когда соответствующее множество $\Pi_0^*(G)$ бесконечно. Теперь ограничимся только такими группами, для которых множество $\Pi_0^*(G)$ будет конечным. В таком случае имеет место строгое неравенство тур $\mathcal{S}(x_2) <$ тур $\mathcal{S}(x_1)$. Тогда существует такое натуральное число n, что для каждого простого числа $p \in \Pi_0(G)$ уже будет

$$\chi(x_2;\, p, G) \leqq \chi(nx_1;\, p, G);$$

притом число n можно легко определить. Как мы уже заметили (смотри начало этого отдела), если нам известна некоторая полная каноническая система инвариантов Мальцева группы G относительно к базису (x_1, x_2), то нам также известна некоторая полная каноническая система инвариантов Мальцева группы G относительно к базису (nx_1, x_2). Это значит, что при дальнейших изучениях можно предполагать, что для самого базиса $B = (x_1, x_2)$ группы G справедливы неравенства

$$\chi(x_2; p, G) \leqq \chi(x_1; p, G) \text{ для } p \in \Pi_0(G). \tag{31}$$

Теперь докажем лемму, которая формально упрости наши дальнейшие изучения.

Лемма 15. *Пусть p — простое число и пусть $(\mathfrak{R}^{(p)}, (1, 2))$ — канонический p-инвариант Мальцева группы без кручения G ранга 2 относительно к некоторому ее базису $B = (x_1, x_2)$, где $\mathfrak{R}^{(p)}$ — каноническая p-матрица вида (3), для которой $0 \leqq \alpha_2(p) < \alpha_1(p) < \infty$ и $\mathfrak{a}(p) = a(p)$ — целое рациональное число взаимно простое с p. Если $a^*(p)$ — целое рациональное число удовлетворяющее условиям*

$$0 \leqq a^*(p) < p^{\alpha_1(p)-\alpha_2(p)}, \quad a(p)\, a^*(p) \equiv 1 \pmod{p^{\alpha_1(p)-\alpha_2(p)}},$$

и если положим

$$\mathfrak{R}_*^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_{\alpha_1}(p), & \mathfrak{p}_{\alpha_1}(p)\, a^*(p) \\ 0, & \mathfrak{p}_{\alpha_2}(p) \end{pmatrix},$$

то $(\mathfrak{R}_*^{(p)}, \varepsilon)$ также служит каноническим p-инвариантом для группы G относительно к базису $B = (x_1, x_2)$.

Доказательство. По предположению $(\mathfrak{R}^{(p)}, (1, 2))$ является каноническим p-инвариантом группы G относительно к базису (x_1, x_2), следовательно, элементы

$$g_1 = \frac{1}{p^{\alpha_1(p)}}(x_2 + a(p)\, x_1), \qquad g_2 = \frac{1}{p^{\alpha_2(p)}} x_1$$

служат образующими для p-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$ группы G. Далее положим

$$g_1^* = \frac{1}{p^{\alpha_1(p)}}(x_1 + a^*(p)\, x_2), \qquad g_2^* = \frac{1}{p^{\alpha_2(p)}} x_2;$$

пока нам еще неизвестно, существуют ли в группе G такие элементы.

Если $h = a^*(p)$ и если k — целое рациональное число такое, что $a(p) \,.\, a^*(p) = 1 - k \,.\, p^{\alpha_1(p)-\alpha_2(p)}$, то будет

$$hg_1 + kg_2 = \frac{1}{p^{\alpha_1(p)}}[a^*(p)\, x_2 + a(p)\, a^*(p)\, x_1] +$$
$$+ k\frac{p^{\alpha_1(p)-\alpha_2(p)}}{p^{\alpha_1(p)}} x_1 = \frac{1}{p^{\alpha_1(p)}}(x_1 + a^*(p)\, x_2) = g_1^*.$$

Если положим $h' = p^{\alpha_1(p)-\alpha_2(p)}$ и $k' = -a(p)$, то имеем

$$h'g_1 + k'g_2 = \frac{1}{p^{\alpha_2(p)}}(x_2 + a(p)\, x_1) + \frac{-a(p)}{p^{\alpha_2(p)}} x_1 =$$
$$= \frac{1}{p^{\alpha_2(p)}} x_2 = g_2^*.$$

Это значит, что элементы $g_i^* (i = 1, 2)$ существуеют в G и что $g_i^* \in \Gamma^{(p)}(B)\, (i = 1,2)$. Теперь, наоборот, докажем, что элементы $g_i (i = 1, 2)$ можно представить в виде линейных комбинаций (коэффициентами которых будут целые рациональные числа) элементов g_1^*, g_2^*. В самом деле, если положим $h_1 = a(p)$ и если целое рациональное число k_1 удовлетворяет соотношению

$$a(p)\, a^*(p) = 1 - k_1 p^{\alpha_1(p)-\alpha_2(p)},$$

то будет $g_1 = h_1 g_1^* + k_1 g_2^*$. И также, если $h_2 = p^{\alpha_1(p)-\alpha_2(p)}$ и $k_2 = -a^*(p)$, то $g_2 = h_2 g_1^* + k_2 g_2^*$.

Этим мы доказали, что для элементов $g_i^* (i = 1, 2)$ определенных формулами (32) имеет место соотношение

$$\{g_1^*, g_2^*\} = \{g_1, g_2\} = \Gamma^{(p)}(B),$$

следовательно, пара $(\mathfrak{R}_*^{(p)}, \varepsilon)$ служит каноническим p-инвариантом Мальцева группы G относительно к базису B. Лемма полностью доказана.

Пусть теперь для каждоно $p \in \Pi_0(G)$ имеет место неравенство (31) и пусть для некоторого $p \in \Pi_0(G)$ будет $(\mathfrak{R}^{(p)}, (1, 2))$ каноническим p-инвариантом Мальцева группы G относительно к базису B. Если $\alpha_1(p) = \alpha_2(p)$, то $a(p) = 0$, и, очевидно, в этом случае $(\mathfrak{R}^{(p)}, \varepsilon)$ также будет каноническим p-инвариантом группы G относительно к B. Если $\alpha_1(p) > \alpha_2(p)$, то для справедливости неравенства (31) необходимо (см. соотношения (28)) равенство $\exp_p a(p) = 0$. В таком случае можно по лемме 15 легко определить канонический p-инвариант группы G относительно к базису B вида $(\mathfrak{R}_*^{(p)}, \varepsilon)$. Это значит, что если для каждого простого числа p из $\Pi_0(G)$ справедливо неравенство (31) (и это единственный нас интересующий случай), то всегда можно предполагать, что канонические p-инварианты группы G имеют для $p \in \Pi_0(G)$ вид $(\mathfrak{R}^{(p)}, \varepsilon)$.

Теорема 5. *Пусть G — группа без кручения ранга 2 обладающая свойством (R) и пусть $\mathfrak{M}_B(G)$ — полная каноническая система инвариантов Мальцева вида (4) группы G относительно к базису $B = (x_1, x_2)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

a) $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B) = (0_+)$,

b) для каждого $p \in \Pi_0(G)$ имеем $\pi_p = \varepsilon$.

То группа G разложима в прямую сумму в точности тогда, если существуют такие взаимно простые целые рациональные числа s_1, s_2, что для каждого $p \in \Pi_0(G)$, для которого $a(p) \neq 0$, имеет место соотношение

$$s_2 - a(p)\, s_1 \equiv 0 \quad (\operatorname{mod} p^{\alpha_1(p)-\alpha_2(p)}) \tag{33}$$

и одновременно для остальных $p \in \Pi_0(G)$ должно быть

$$s_2 \not\equiv 0 \quad (\operatorname{mod} p^{\alpha_1(p)-\alpha_2(p)+1}) \tag{34}$$

Доказательство. В силу леммы 7 из условия *a*) для каждого простого числа $p \in \Pi_1(G)$ следует равенство $G[p^\infty] = \mathscr{S}(x_1)$, или, $\chi(x_1; p, G) = \infty$, но для каждого $g \in G \dot{-} G[p^\infty]$ имеем $\chi(g; p, G) < \infty$. Это значит, что если $g \in G \dot{-} G[p^\infty]$ то или $\operatorname{typ} \mathscr{S}(x_1) \parallel \operatorname{typ} \mathscr{S}(g)$, или же $\operatorname{typ} \mathscr{S}(x_1) > \operatorname{typ} \mathscr{S}(g)$. В этом случае, как следует из леммы 4 и леммы 5, группа G разложима в прямую сумму в точности тогда, если существует такая подгруппа H ранга 1 группы G, что имеет место прямое разложение $G = \mathscr{S}(x_1) \dotplus H$. Подгруппу H группы G, являющуюся необходимо сервантной подгруппой группы G, можно представить в виде $H = \mathscr{S}(s_1 x_1 + s_2 x_2)$, где s_1, s_2 — взаимно простые целые рациональные числа. Следовательно, группа G разложима в прямую сумму в точности тогда, если существуют такие взаимно простые целые рациональные числа s_1, s_2, что имеет место соотношение

$$G = \mathscr{S}(x_1) \dotplus \mathscr{S}(s_1 x_1 + s_2 x_2). \tag{35}$$

Пусть теперь s_1, s_2 — некоторые взаимно простые целые рациональные числа и пусть $g_* = s_1 x_1 + s_2 x_2$. Будем искать необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа s_1, s_2, чтобы имело место прямое разложение (35). Для этой цели положим $S = \mathscr{S}(x_1) \dotplus \mathscr{S}(s_1 x_1 + s_2 x_2)$, значит, мы уже предполагаем, что $s_2 \neq 0$.

Равенство (35) справедливо в точности тогда, если $G \subseteq S$, или, если произвольная система образующих группы G содержится в S. Притом здесь воспользуемся опять системой образующих, являющейся соединением систем образующих всех p-примитивных подгрупп $\Gamma^{(p)}(B)$; система образующих каждой подгруппы $\Gamma^{(p)}(B)$ соответствует канонической p-матрице $\mathfrak{R}^{(p)}$ p-инварианта $(\mathfrak{R}^{(p)}, \pi_p) \in \mathfrak{M}_B(G)$ (см. доказательство леммы 10).

a) Если $p \in \Pi_2(G)$, то получаем условия (см. доказательство леммы 10, часть a)): $(1/p^\alpha)\, x_i \in S (i = 1, 2; \alpha = 1, 2, \ldots)$. Но так как уже

$$(1/p^\alpha) x_1 \in \mathscr{S}(x_1) \subseteq S (\alpha = 1, 2, \ldots),$$

то останут только условия

$$\frac{1}{p^\alpha} x_2 \in S = \mathscr{S}(x_1) \dotplus \mathscr{S}(g_*) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots). \tag{36}$$

Так как $x_2 = [1/s_2](-s_1 x_1 + g_*)$, то из формулы (36) следуют соотношения

$$\frac{s_1}{s_2 p^\alpha} \in \mathscr{R}(x_1; G), \qquad \frac{1}{s_2 p^\alpha} \in \mathscr{R}(g_*; G) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

Но для $p \in \Pi_2(G)$ имеем $G[p^\infty] = G$ (см. [2], лемма 7.1), следовательно,

$$\chi(x_1; p, G) = \chi(g_*; p, G) = \infty;$$

по предлопожению имеем $(s_1, s_2) = 1$, итак, мы получаем условия

$$\frac{1}{s_2} \in \mathscr{R}(x_1; G), \qquad \frac{1}{s_2} \in \mathscr{R}(g_*; G).$$

b) Если $p \in \Pi_1(G)$, то в силу условия a) нашей теоремы каноническая p-матрица $\mathfrak{R}^{(p)}$ имеет вид

$$\mathfrak{R}^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_\infty(p), & 0 \\ 0, & \mathfrak{p}_{\alpha_2}(p) \end{pmatrix};$$

значит, в этом случае получаем условия

$$\frac{1}{p^\alpha} x_1 \in S \quad (\alpha = 1, 2, \ldots), \qquad \frac{1}{p^{\alpha_2(p)}} x_2 \in S.$$

По леммe 7 имеем $G[p^\infty] = \mathscr{S}(x_1)$, или, $\chi(x_1; p, G) = \infty$ и поэтому

$$(1/p^\alpha)\, x_1 \in \mathscr{S}(x_1) \subseteq S \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots).$$

В этом случае остается единственное условие

$$\frac{1}{p^{\alpha_2(p)}} x_2 \in S = \mathscr{S}(x_1) \dotplus \mathscr{S}(g_*).$$

Отсюда следует

$$\frac{s_1}{p^{\alpha_2(p)} s_2} \in \mathscr{R}(x_1; G), \qquad \frac{1}{p^{\alpha_2(p)} s_2} \in \mathscr{R}(g_*; G),$$

или, имея ввиду уже соотношения (37),

$$\frac{1}{p^{\alpha_2(p)} s_2} \in \mathscr{R}(g_*; G), \qquad (p \in \Pi_1(G)). \tag{38}$$

c) Пусть на конец $p \in \Pi_0(G)$; в таком случае получаем условия

$$\frac{1}{p^{\alpha_1(p)}} (x_1 + a(p)\, x_2) \in S, \qquad \frac{1}{p^{\alpha_2(p)}} x_2 \in S,$$

или, также условия

$$\frac{1}{p^{\alpha_1(p)}}[(s_2 - a(p)\, s_1)\, x_1 + a(p)\, g_*] \in \mathscr{S}(x_1) \dotplus \mathscr{S}(g_*),$$

$$\frac{1}{p^{\alpha_2(p)} s_2}(-s_1 x_1 + g_*) \in \mathscr{S}(x_1) \dotplus \mathscr{S}(g_*).$$

Отсюда уже следуют формулы

$$(39) \qquad \frac{s_2 - a(p)\, s_1}{p^{\alpha_1(p)} s_2} \in \mathscr{R}(x_1; G), \qquad \frac{s_1}{p^{\alpha_2(p)} s_2} \in \mathscr{R}(x_1; G),$$

$$(40) \qquad \frac{a(p)}{p^{\alpha_1(p)} s_2} \in \mathscr{R}(g_*; G), \qquad \frac{1}{p^{\alpha_2(p)} s_2} \in \mathscr{R}(g_*; G)$$

для каждого $p \in \Pi_0(G)$.

Так как для каждого $p \in \Pi_2(G)$ имеем $(1/p^\alpha) \in \mathscr{R}(x_1; G) \cap \mathscr{R}(g_*; G)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots)$, и так как $(s_1, s_2) = 1$, то условия (37) будут выполнены, если выполнены условия (38), (39) и (40). Это значит, что условия (37) можно выпустить.

По лемме 13 (см. формулу (20)) для $p \in \Pi_1(G)$ будет

$$\chi(g_*; p, G) = \alpha_2(p) + \exp_p s_2 .$$

Отсюда следует, что если выполнены условия (39) и (40) для каждого $p \in \Pi_0(G)$,* то будут уже выполнены условия (38). Следовательно, если воспользуемся леммой 13, то можем высказать следующее утверждение: Если s_1, s_2 — взаимно простые целые рациональные числа, то прямое разложение (35) имеет место в точности тогда, если для каждого $p \in \Pi_0(G)$ выполнены следующие неравенства:

1. $$\alpha_1(p) + \exp_p s_2 - \exp_p (s_2 - a(p)\, s_1) \leqq \min[\alpha_1(p), \alpha_2(p) + \exp_p a(p)],$$
2. $$\alpha_2(p) + \exp_p s_2 - \exp_p s_1 \leqq \min[\alpha_1(p), \alpha_2(p) + \exp_p a(p)],$$
3. $$\alpha_1(p) + \exp_p s_2 - \exp_p a(p) \leqq \min[\alpha_1(p) + \exp_p s_1, \alpha_2(p) + \exp_p (s_2 - a(p)\, s_1)],$$
4. $$\alpha_2(p) + \exp_p s_2 \leqq \min[\alpha_1(p) + \exp_p s_1, \alpha_2(p) + \exp_p (s_2 - a(p)\, s_1)].$$

Теперь разделим множество $\Pi_0(G)$ до двух непересекающихся подмножеств, и это будет следующим образом:

$$\Pi_0^{(1)}(G) = E(p; p \in \Pi_0(G), a(p) = 0),$$
$$\Pi_0^{(2)}(G) = E(p; p \in \Pi_0(G), a(p) \neq 0).$$

* Здесь предполагаем, что $\Pi_0(G) \neq \emptyset$. Но если $\Pi_0(G) = \emptyset$, то при условиях теоремы будет $G = \mathscr{S}(x_1) \dotplus \mathscr{S}(x_2)$ и теорема тривиально справедлива.

Если $p \in \Pi_0^{(1)}(G)$, то неравенства 1) и 3) выполнены всегда и останут неравенства

$$\alpha_2(p) + \exp_p s_2 - \exp_p s_1 \leqq \alpha_1(p),$$
$$\alpha_2(p) + \exp_p s_2 \leqq \min[\alpha_1(p) + \exp_p s_1, \alpha_2(p) + \exp_p s_2].$$

Но легко видеть, что если выполнено второе из этих последних неравенств, то первое также будет выполнено; следовательно, остается только последнее неравенство. Притом, если $\exp_p s_1 > 0$, то $\exp_p s_2 = 0$, и неравенство выполнено автоматически. Нетривиальное условие получаем только в том случае, если $\exp_p s_1 = 0$, и это будет

$$(41) \qquad \exp_p s_2 \leqq \alpha_1(p) - \alpha_2(p).$$

Этим мы доказали, что для $p \in \Pi_0^{(1)}(G)$ можно условия 1) — 4) заменить единственным условием (41), которое еще представим в виде

$$(42) \qquad s_2 \not\equiv 0 \quad (\bmod\, p^{\alpha_1(p) - \alpha_2(p) + 1}) \qquad (p \in \Pi_0^{(1)}(G)).$$

Если теперь $p \in \Pi_0^{(2)}(G)$, то необходимо будет $\alpha_2(p) < \alpha_1(p)$ и одновременно $\exp_p a(p) < \alpha_1(p) - \alpha_2(p)$, так как $0 < a(p) < p^{\alpha_1(p) - \alpha_2(p)}$. Следовательно, для $p \in \Pi_0^{(2)}(G)$ можно неравенства 1) и 2) записать в виде

1*) $\alpha_1(p) + \exp_p s_2 - \exp_p (s_2 - a(p)\, s_1) \leqq \alpha_2(p) + \exp_p a(p),$

2*) $\alpha_2(p) + \exp_p s_2 - \exp_p s_1 \leqq \alpha_2(p) + \exp_p a(p);$

притом условия 3) и 4) предоставляем в их первоначальном виде. Если бы для некоторого $p \in \Pi_0^{(2)}(G)$ было $\exp_p s_2 \neq \exp_p a(p)$, то в силу соотношения $(s_1, s_2) = 1$ было бы $\exp_p (s_2 - a(p)\, s_1) \leqq \exp_p s_2$, или,

$$\alpha_1(p) + \exp_p s_2 - \exp_p (s_2 - a(p)) \geqq \alpha_1(p).$$

Но одновременно $\alpha_2(p) + \exp_p a(p) < \alpha_1(p)$, значит, в таком случае условие 1*) невыполнимо. Итак, должно быть

$$(43) \qquad \exp_p s_2 = \exp_p a(p) \qquad (p \in \Pi_0^{(2)}(G)).$$

Отсюда следует, что условие 1*) имеет вид

$$(44) \qquad \alpha_1(p) - \alpha_2(p) \leqq \exp_p (s_2 - a(p)\, s_1) \qquad (p \in \Pi_0^{(2)}(G)),$$

и что условие 2*) выполнено тривиально. В то же время из соотношений (43) и (44) вытекает справедливость неравенств 3) и 4). В заключение еще отметим, что из неравенства (44) уже следует соотношение (43). В самом деле, если $\exp_p s_2 \neq \exp_p a(p)$, то в силу соотношения $(s_1, s_2) = 1$ будет

$$\exp_p (s_2 - a(p)\, s_1) \leqq \exp_p a(p) < \alpha_1(p) - \alpha_2(p),$$

или, неравенство (44) не имеет места.

Этим мы доказали, что для $p \in \Pi_0^{(2)}(G)$ условия 1) — 4) равносильны с единственным условием вида (44), которое можно также представить в виде

$$(45) \qquad s_2 - a(p)s_1 \equiv 0 \pmod{p^{\alpha_1(p)-\alpha_2(p)}} \qquad (p \in \Pi_0^{(2)}(G)).$$

Итак, мы доказали следующее: α) Группа G разложима в прямую сумму в точности тогда, если существуют взаимно простые целые рациональные числа s_1, s_2 удовлетворяющие соотношению (35). β) Если s_1, s_2 — взаимно простые целые рациональные числа, то прямое разложение (35) имеет место в точности тогда, если выполнены условия (42) и (45) (смотри также условия (33) и (34)).

Этим теорема доказана.

Замечание. Как следует из доказательства теоремы 5, мы могли ее высказать в немножко сильнейшем виде: Группа без кручения G удовлетворяющая условиям теорумы 5 разложима в прямую сумму в точности тогда, если существуют взаимно простые целые рациональные числа s_1, s_2 удовлетворяющие условиям (33) и (34) (или, (42) и (45)). Притом, если такие числа s_1, s_2 существуют то группа G обладает прямым разложением вида (35).

Следующая теорема дает достаточное условие прямой неразложимости группы без кручения ранга 2.

Теорема 6. *Пусть G — группа без кручения ранга 2 обладающая свойством (R) и пусть $\mathfrak{M}_B(G)$ — полная каноническая система инвариантов Мальцева вида* (4) *группы G относительно к базису $B = (x_1, x_2)$, удовлетворяющая условиям* a), b) *теоремы 5. Если для бесконечного числа простых чисел $p \in \Pi_0(G)$ будет $a(p) \neq 0$ и одновременно $\exp_p a(p) > 0$, то группа G неразложима в прямую сумму.*

Доказательство. Предположим наоборот, что группа G разложима в прямую сумму. То по теореме 5 существуют взаимно простые целые рациональные числа s_1, s_2 удовлетворяющие условиям (33) и (34), и имеет место в точности прямое разложение (35). В силу предположений теоремы, для бесконечного числа простых чисел $p \in \Pi_0(G)$ одновременно справедливо соотношение (33) и неравенство $\exp_p a(p) > 0$. Но это значит, что для бесконечного числа простых чисел p будет $\exp_p s_2 > 0$, или, $s_2 = 0$. Тогда имеем $\mathscr{S}(s_1x_1 + s_2x_2) = \mathscr{S}(s_1x_1) = \mathscr{S}(x_1)$, значит, прямое разложение (35) несправедливо. Таким образом мы получили противоречие, или, группа G неразложима в прямую сумму и теорема доказана.

§ 4.

В этом отделе выведем еще дальнейшие простые следствия теоремы 5. Для этой цели выскажем два вспомогательных утверждения, касающихся разрешимости системы сравнений.

Лемма 16. *Пусть p_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ — различные простые числа и пусть a_i и β_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ — такие натуральные числа, что $(a_i, p_i) = 1$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Тогда существуют взаимно простые целые рациональные числа s_1, s_2 удовлетворяющие соотношениям*

$$(46) \qquad s_2 - a_i s_1 \equiv 0 \pmod{p_i^{\beta_i}} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Доказательство. Прежде всего положим $h = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$ и кроме того обозначим $h_j = hp_j^{-\beta_j}$ $(j = 1, 2, \dots, n)$. Если теперь j — произвольный индекс, $1 \leq j \leq n$, то определим

$$(47) \qquad s_1^{(j)} = h_j, \; s_2^{(j)} = (a_j + p_j^{\beta_j})\, h_j.$$

Из формул (47) непосредственно следует равенство

$$s_2^{(j)} - a_j s_1^{(j)} = (a_j + p_j^{\beta_j})\, h_j - a_j h_j = h_j p_j^{\beta_j},$$

или, имеет место сравнение

$$s_2^{(j)} - a_j s_1^{(j)} \equiv 0 \pmod{p_j^{\beta_j}}.$$

Но если $k \neq j$, $1 \leq k \leq n$, то $p_k^{\beta_k} \mid s_i^{(j)}$ $(i = 1, 2)$, или, одновременно имеют место соотношения

$$s_2^{(j)} - a_k s_1^{(j)} \equiv 0 \pmod{p_k^{\beta_k}} \; (k \neq j;\, k = 1, 2, \dots, n).$$

Этим мы доказали, что для каждого j $(1 \leq j \leq n)$ пара целых рациональных чисел $s_1^{(j)}, s_2^{(j)}$, определенных формулами (47), удовлетворяет системе сравнений

$$(48) \qquad \xi_2 - a_i \xi_1 \equiv 0 \pmod{p_i^{\beta_i}} \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Легко видеть, что если даны некоторые решения системы сравнений (48), то каждая их линейная комбинация с целочисленными коэффициентами также служит решением для системы (48). Итак, если в частности положим

$$(49) \qquad t_1 = \sum_{j=1}^{n} s_1^{(j)}, \qquad t_2 = \sum_{j=1}^{n} s_2^{(j)},$$

то будет

$$(50) \qquad t_2 - a_i t_1 \equiv 0 \pmod{p_i^{\beta_i}} \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Из определения чисел $s_2^{(j)}$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ формулами (47) следует, что $p_j \nmid s_2^{(j)}$ $(j = 1, 2, \dots, n)$, но $p_j \mid s_2^{(k)}$ $(j \neq k;\, j, k = 1, 2, \dots, n)$. Отсюда и из определения числа t_2 формулой (49) непосредственно вытекает, что $(t_2, p_j) = 1$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ Значит, если положим $d = (t_1, t_2)$ и если пишем $t_1 = ds_1$ и $t_2 = ds_2$, то по (50) имеем

$$d\,(s_2 - a_i s_1) \equiv 0 \pmod{p_i^{\beta_i}} \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

и притом $(d, p_j) = 1$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Но тогда уже должно быть

$$s_2 - a_i s_1 \equiv 0 \pmod{p_i^{\beta_i}} \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

или, справедливы соотношения (46). Так как $(s_1, s_2) = 1$, то этим лемма доказана.

Лемма 17. *Пусть $p_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ — различные простые числа и пусть a_i, β_i — такие натуральные числа, что $(a_i, p_i) = 1 (i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда существует целое рациональное число s, для которого справедливы сравнения*

$$(51)\qquad 1 - a_i s \equiv 0 \pmod{p_i^{\beta_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказательство. По лемме 16 существуют взаимно простые целые рациональные числа s_1, s_2 удовлетворяющие соотношениям (46). Так как по предположению $(a_i, p_i) = 1 (i = 1, 2, \ldots, n)$, то из соотношений (46) и из $(s_1, s_2) = 1$ уже следует, что $(p_i, s_2) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Итак, если положим $h = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$, то также будет $(s_2, h) = 1$. Следовательно, существует целое рациональное число s_2^*, для которого имеем $s_2 s_2^* \equiv 1 \pmod{h}$, или, также

$$s_2 s_2^* \equiv 1 \pmod{p_i^{\beta_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Значит, умножением всех соотношений (45) на число s_2^* получаем

$$0 \equiv s_2 s_2^* - a_i s_1 s_2^* \equiv 1 - a_i s_1 s_2^* \pmod{p_i^{\beta_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

итак, если положим $s = s_1 s_2^*$, то будут все соотношения (51) выполнены и лемма полностью доказана.

Замечание. Предшествующую лемму выгоднее высказать следующим образом: Если числа p_i, a_i, β_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ удовлетворяют условиям леммы 17, то существует такое целое рациональное число s, что система сравнений (48) обладает решением вида $\xi_1 = s$, $\xi_2 = 1$.

Теорема 7. *Пусть G — группа без кручения ранга 2 обладающая свойством (R) и пусть $\mathfrak{M}_B(G)$ — полная каноническая система инвариантов Мальцева вида (4) группы G относительно к некоторому ее базису B, удовлетворяющая условиям* a) *и* b) *теоремы 5. Если множество простых чисел*

$$\Pi_0^{(2)}(G) = E(p; p \in \Pi_0(G), \quad a(p) \neq 0)$$

конечно, то группа G разложима в прямую сумму.

Доказательство. Пусть p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — в точности все различные простые числа из множества $\Pi_0^{(2)}(G)$. Кроме того будем просто писать $a(p_i) = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. По теореме 5 группа G разложима в прямую сумму в точности тогда, если существуют взаимно простые целые рациональные числа s_1, s_2 удовлетворяющие соотношениям

$$(52)\qquad s_2 - a_i s_1 \equiv 0 \pmod{p_i^{\alpha_1(p_i) - \alpha_2(p_i)}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и одновременно соотношениям (34) для $p \in \Pi_0(G) \dot{-} \Pi_0^{(2)}(G)$. Как мы уже заметили, из (52) следует, что должно быть

$$(53)\qquad \exp_{p_i} s_2 = \exp_{p_i} a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Для простоты обозначим $\gamma_i = \exp_{p_i} a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, положим $d = p_1^{\gamma_1} \cdot p_2^{\gamma_2} \cdot \ldots \cdot p_n^{\gamma_n}$ и кроме того определим

$$d_i = p_i^{-\gamma_i}, \; b_i = a_i p_i^{-\gamma_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

В силу (53) можно писать $s_2 = t_2 d$, следовательно, взаимно простые целые радиональные числа s_1, s_2 удовлетворяющие соотношению (52) существуют в точности тогда, если существуют взаимно простые целые рациональные числа s_1, t_2 удовлетворяющие соотношениям

$$t_2 d - a_i s_1 \equiv 0 \qquad \pmod{p_i^{\alpha_1(p_i) - \alpha_2(p_i)}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Но эти сравнения равносильны сравнениям

$$(54)\qquad t_2 d_i - b_i s_1 \equiv 0 \qquad \pmod{p_i^{\alpha_1(p_i) - \alpha_2(p_i) - \gamma_i}}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

притом имеем $(d_i, p_i) = (b_i, p_i) = 1$ $(i = 1, 2. \ldots, n)$. Тогда существуют целые рациональные числа d_i^* $(i = 1, 2, \ldots, n)$ такие, что $(d_i^*, p_i) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и одновременно

$$d_i d_i^* \equiv 1 \qquad \pmod{p_i^{\alpha_1(p_i) - \alpha_2(p_i) - \gamma_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Это значит, что сравнения (54) можно заменить равносильной системой сравнений

$$(55)\qquad t_2 - d_i^* b_i s_1 \equiv 0 \qquad \pmod{p_i^{\alpha_1(p_i) - \alpha_2(p_i) - \gamma_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $(d_i^* b_i, p_i) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. По лемме 17 обладает система сравнений (55) решением вида $t_2 = 1$, $s_1 = s$, где s — удобное целое рациональное число; очевидно, будет $(s, p_i) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Этим мы доказали, что числа $s_1 = s$, $s_2 = d$ удовлетворяют условиям (52) и притом $(s_1, s_2) = 1$. Кроме того из определения числа $s_2 = d$ следует, что $(s_2, p) = 1$ для каждого (положительного) простого числа $p \neq p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, или, в частности, для каждого $p \in \Pi_0(G) \dot{-} \Pi_0^{(2)}(G)$. Это значит, что одновременно выполнено условие (34) теоремы 5, значит, группа G разложима в прямую сумму, как гласит теорема.

Если множество простых чисел $\Pi_0^{(2)}(G)$ бесконечно, то кроме общей теоремы 5 нельзя ничего сказать о разложимости группы G. Это следует из того обстоятельства, что нам неизвестны условия разрешимости системы сравнений (33) в целых взаимно простых рациональных числах для бесконечного числа простых чисел p. Но если воспользуемся предшествующими результатами, то можем доказать теорему о единственности решения такой системы сравнений.

Теорема 8. *Пусть Π^* — бесконечное множество простых чисел и пусть для каждого простого числа $p \in \Pi^*$ даны натуральные числа $a(p)$ и $\beta(p)$ такие, что*

$$a(p) < p^{\beta(p)} \quad (p \in \Pi^*). \tag{56}$$

То система сравнений

$$\xi_2 - a(p)\,\xi_1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p^{\beta(p)}) \qquad (p \in \Pi^*) \tag{57}$$

обладает не более чем одним (с точностью до знака) решением в целых взаимно простых рациональных числах.*

Доказательство. Очевидно, теорему достаточно доказать только в том случае, когда Π^* не является множеством всех положительных простых чисел Π; значит, будем предполагать, что $\Pi \dot{-} \Pi^* \neq \emptyset$. Теперь для каждого простого числа $p \in \Pi$ определим каноническую p-матрицу $\mathfrak{R}^{(p)}$ второй степени, и это будет следующим образом: Если $p \in \Pi \dot{-} \Pi^*$, то положим

$$\mathfrak{R}^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_\infty(p), & 0 \\ 0, & \mathfrak{p}_0(p) \end{pmatrix}.$$

Для $p \in \Pi^*$ определим

$$\mathfrak{R}^{(p)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{p}_{\beta(p)}(p), & \mathfrak{p}_{\beta(p)}(p)\,a(p) \\ 0, & \mathfrak{p}_0(p) \end{pmatrix};$$

в силу неравенств (56), таким образом определенные матрицы $\mathfrak{R}^{(p)}$ являются, действительно, каноническими p-матрицами.

Пусть теперь G — группа без кручения ранга 2, для которой система p-инвариантов $(\mathfrak{R}^{(p)}, \pi_p = \varepsilon)\,(p \in \Pi)$ служит полной канонической системой инвариантов Мальцева относительно к некоторому ее базису $B = (x_1, x_2)$; как было доказано в [1], § 7 и § 9, такая группа существует и с точностью до изоморфизма определена однозначно. Группа G обладает свойством (R) (здесь пользуемся тем, что $\Pi_1(G) = \Pi \dot{-} \Pi^* \neq \emptyset$) и если положим $\mathfrak{M}_B(G) = [(\mathfrak{R}^{(p)}, \varepsilon); p \in \Pi]$, то даже $\mathfrak{N}(G; \mathfrak{M}_B) = (0_+)$. Следовательно, к группе G можно применить теорему 5.

Пусть теперь s_1, s_2 и t_1, t_2 — две пары взаимно простых целых рациональных чисел, удовлетворяющих системе сравнений (57). Так как $\Pi^* = \Pi_0(G)$ и так как множество $E(p; p \in \Pi_0(G), a(p) = 0)$ пусто, то обе пары s_1, s_2 и t_1, t_2 выполняют одновременно условия (33) и (34) теоремы 5, значит, группа G разложима в прямую сумму. Притом, если положим $g_1 = s_1x_1 + s_2x_2$ и $g_2 = t_1x_1 + t_2x_2$, то уже должно быть

$$G = \mathscr{S}(x_1) \dotplus \mathscr{S}(g_1) = \mathscr{S}(x_1) \dotplus \mathscr{S}(g_2). \tag{58}$$

* Если системе (57) удовлетворяет пара чисел s_1, s_2, то ей удовлетворяет также пара $-s_1, -s_2$.

Применением леммы 13 непосредственно получаем, что для каждого $p \in \Pi_1(G)$ имеем $\chi(x_1; p, G) = \infty$, но $\chi(g_1; p, G) < \infty$. В то же время для каждого $p \in \Pi_0(G)$ будет (см. (56))

$$\chi(x_1; p, G) = \exp_p a(p) < \beta(p) = \chi(g_1; p, G).$$

Так как множество $\Pi_0(G) = \Pi^*$ по предположению бесконечно, то должно быть typ $\mathscr{S}(x_1) \parallel$ typ $\mathscr{S}(g_1)$. Тогда, по лемме 4, прямое разложение (58) группы G однозначно, или, имеет место равенство $\mathscr{S}(g_1) = \mathscr{S}(g_2)$. Но это значит, что существуют ненулевые целые рациональные числа h, k такие, что $hg_1 = kg_2$, или,

$$hs_1x_1 + hs_2x_2 = kt_1x_1 + kt_2x_2.$$

Отсюда уже следуют равенства $ks_1 = ht_1$, $hs_2 = kt_2$. В силу (58) должно быть $s_2 \neq 0$ и $t_2 \neq 0$, значит, мы получаем равенство $(s_1/s_2) = (t_1/t_2)$. Но так как эти дроби по предположению несократимы, то или $s_1 = t_1$ и $s_2 = t_2$, или же $s_1 = -t_1$, $s_2 = -t_2$.

Этим теорема полностью доказана.

Пользовавшись этой последней теоремой и теоремой 5, мы могли бы высказать некоторые дальнейшие достаточные условия для того, чтобы группа без кручения ранга 2 являлась неразложимой в прямую сумму.

Замечание. Во всей этой статье мы занимались группами без кручения G ранга два, удовлетворяющими тем свойством, что по крайней мере для одного простого числа p имеет место равенство $r_p(G) = 1$, или, $\Pi_1(G) \neq \emptyset$. Но теми самыми методами можно было бы изучать и такие группы без кручения ранга 2, для которых $\Pi_1(G) = \emptyset$. Так напрмиер, легко убедиться в том, что если $\Pi_1(G) = \emptyset$ и если множество

$$E(p; p \in \Pi_0(G), \alpha_1(p) > \alpha_2(p)) \tag{59}$$

конечно (здесь предполагаем, что нам известна некоторая полная каноническая система инвариантов Мальцева $\mathfrak{M}_B(G)$), то группа G всегда разложима в прямую сумму. Если множество (59) бесконечно, то можно было бы определить необходимые и достаточные условия для того, чтобы группа G являлась разложимой в прямую сумму. Но эти условия существенно сложнее чем условия теоремы 6, и их удостоверение ровнако сложно как удостоверение прямой разложимости группы G. Поэтому мы сосредоточили свое внимание к группам, для которых $\Pi_1(G) \neq \emptyset$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Мальцев И. А., *Абелевы группы конечного ранга без кручения*, Мат. сб. (н. с.) 4, 1938, 45—68.

[2] Прохазка Л., *О p-ранге абелевых групп без кручения конечного ранга*, Чех. мат. ж., т. 12 (87), 1962, 3—43.

Поступило 3. 11. 1960 г.

Katedra algebry a geometrie
Matematicko-fyzikální fakulty
Karlovy university v Praze

BEDINGUNGEN FÜR DIE DIREKTE ZERLEGBARKEIT GEWISSER TORSIONSFREIER ABELSCHER GRUPPEN VOM RANGE ZWEI

Ladislav Procházka

Zusammenfassung

Diese Abhandlung knüpft an die Arbeit [2] des Verfassers an. Deshalb wurden einige in [2] eingeführte Begriffe gemeinsam mit ihren Bezeichnungen, z. B. p-Zahl, p-Matrix, kanonische p-Matrix, p-primitive Untergruppe, p-Rang einer torsionsfreien Gruppe u. s. w., übernommen und werden in der vorliegenden Arbeit nicht mehr erklärt. Es sei noch bemerkt, daß unter dem Wort Gruppe immer eine abelsche Gruppe zu verstehen ist.

Es sei G eine torsionsfreie Gruppe vom Range 2 und $B = (x_1, x_2)$ eine beliebige ihre Basis (d. h. ein geordnetes Paar von linear unabhängigen Elementen von G). Wie in [1] bewiesen wurde (s. auch [2]), gibt es zu jeder (positiven) Primzahl p eine kanonische p-Matrix $\mathfrak{K}^{(p)}$ der Form (3) und eine Permutation π_p der Indexmenge $\{1, 2\}$, so daß die kanonische p-Matrix $\mathfrak{K}^{(p)}$ eine p-Matrix der p-primitiven Untergruppe $\Gamma^{(p)}(\pi_p(B))$ von G gezüglich der Basis $\pi_p(B) = (x_{\pi_p(1)}, x_{\pi_p(2)})$ bildet (s. [1]).

Definition 2. G sei eine torsionsfreie Gruppe vom Range 2 und B irgendeine ihre Basis. Dann werden wir das Paar $(\mathfrak{K}^{(p)}, \pi_p)$, wobei $\mathfrak{K}^{(p)}$ eine nach dem vorhergehenden bestimmte kanonische p-Matrix der Form (3) und π_p die entsprechende Permutation ist, als kanonische Malcevsche p-Invariante der Gruppe G bezüglich der Basis B bezeichnen. Ist für jede Primzahl $p \in \Pi$ (Π sei die Menge aller positiven Primzahlen) eine Malcevsche kanonische p-Invariante der Gruppe G bezüglich der Basis B gegeben, so sagen wir, daß ein vollständiges kanonisches System Malcevscher Invarianten $\mathfrak{M}_B(G)$ der Gruppe G bezüglich der Basis B vorliege (s. (4)).

Falls $p \in \Pi$ und G eine torsionsfreie Gruppe ist, bezeichnen wir mit $r_p(G)$ den p-Rang von G. Ist G eine torsionsfreie Gruppe vom Range 2, so erklären wir folgende Primzahlmengen:

$$\Pi_k(G) = E(p;\, p \in \Pi,\, r_p(G) = k) \qquad (k = 0,1,2).$$

Satz 1. *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe vom Range 2, für welche $\Pi_1(G) \neq \emptyset$ und sei (4) ein vollständiges kanonisches System Malcevscher Invarianten der Gruppe G bezüglich einer Basis B. Ist für irgendeine Primzahl $p \in \Pi_1(G)$ die in der kanonischen p-Matrix $\mathfrak{K}^{(p)}$ der Form (3) auftretende ganze p-adische Zahl $\mathfrak{a}(p)$ nicht rational, so ist die Gruppe G direkt unzerlegbar.*

Definition 3. Von einer torsionsfreien Gruppe G vom Range 2 sagen wir, daß sie die Eigenschaft (R) habe, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) $\Pi_1(G) \neq \emptyset$,

b) $l_p(G) = 0$ für jede Primzahl $p \in \Pi_1(G)$.

Wir erinnern noch darauf, daß $l_p(G)$ eine weitere in [2] eingeführte Invariante von Gruppe G ist. Durch die Invariante $l_p(G)$ kann folgende Eigenschaft der Gruppe G ausgedrückt werden: Ist G eine torsionsfreie Gruppe vom Range 2, $p \in \Pi_1(G) \neq \emptyset$ und $(\mathfrak{K}^{(p)}, \pi_p)$ irgendeine Malcevsche kanonische p-Invariante der Gruppe G, so ist die in der kanonischen p-Matrix $\mathfrak{K}^{(p)}$ (s. (3)) auftretende ganze p-adische Zahl $\mathfrak{a}(p)$ genau dann rational, wenn $l_p(G) = 0$.

Es sei G eine torsionsfreie Gruppe vom Range 2, welche die Eigenschaft (R) besitzt, und sei (4) ein vollständiges kanonisches System Malcevscher Invarianten der Gruppe G bezüglich einer Basis B. Ist $p \in \Pi_1(G)$ und ist $\mathfrak{a}(p)$ die in der kanonischen p-Matrix $\mathfrak{K}^{(p)}$ der p-Invariante $(\mathfrak{K}^{(p)}, \pi_p)$ auftretende ganze p-adische Zahl, so muß sie nach der vorhergehenden Bemerkung schon rational sein.

Wir setzen $\mathfrak{a}(p)^* = 0_+$ (bzw. $\mathfrak{a}^*(p) = 0_-$), falls $\mathfrak{a}(p) = 0$ und $\pi_p = \varepsilon^*$ (bzw. $\pi_p = (1, 2)$); für $\mathfrak{a}(p) \neq 0$ setzen wir $\mathfrak{a}^*(p) = \mathfrak{a}(p)$ (bzw. $\mathfrak{a}^*(p) = \mathfrak{a}^{-1}(p)$), falls $\pi_p = \varepsilon$ (bzw $\pi_p = (1, 2)$). Die Symbole 0_+, 0_- sind als zwei verschiedene Exemplare von Null aufzufassen. Die so erhaltene Menge rationaler Zahlen $\mathfrak{a}^*(p)$ $(p \in \Pi_1(G))$ wird durch $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B)$ bezeichnet (s. (5)).

Satz 2. *G sei eine torsionsfreie Gruppe vom Range 2, die die Eigenschaft (R) besitzt, und sei (4) ein vollständiges kanonisches System Malcevscher Invarianten der Gruppe G bezüglich einer Basis B. Enthält die durch (5) erklärte Menge rationaler Zahlen $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B)$ mindestens drei Elemente, so ist G direkt unzerlegbar.*

Jetzt setzen wir $0_+ = 0/1$, und rein formal $0_- = 1/0$; diese Brüche mögen als teilerfremd aufgefasst werden. Weiter, ist p eine Primzahl und $\mathfrak{a}$ eine ganze p-adische Zahl, dann bezeichnen wir mit $\exp_p \mathfrak{a}$ die obere Grenze aller nichtnegativen ganzen rationalen Zahlen α, für die p^α ein Teiler von $\mathfrak{a}$ ist; es ist also $\exp_p 0 = \infty$ für jede Primzahl p.

Ist G eine torsionsfreie Gruppe vom Range 2, $p \in \Pi_1(G)$ und $(\mathfrak{K}^{(p)}, \pi_p)$ eine kanonische Malcevsche p-Invariante von G bezüglich einer Basis B, dann ist die in der p-Matrix $\mathfrak{K}^{(p)}$ (s. (3)) auftretende ganze p-adische Zahl $\mathfrak{a}(p)$ schon eine ganze rationale Zahl; in diesem Falle schreiben wir $a(p)$** anstatt $\mathfrak{a}(p)$.

Satz 3. *G sei eine torsionsfreie Gruppe vom Range 2, die die Eigenschaft (R) besitzt, und sei (4) ein vollständiges kanonisches System Malcevscher Invarianten der Gruppe G bezüglich einer Basis B. Enthält die Menge $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B)$ genau zwei Elemente,*

$$\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B) = \left(\frac{s_2^{(i)}}{s_1^{(i)}}\ (i = 1, 2)\right),$$

wobei $s_j^{(i)}$ $(i, j = 1, 2)$ ganze rationale Zahlen sind, für die $(s_1^{(i)}, s_2^{(i)}) = 1$ $(i = 1, 2)$ gilt und satzen wir $\Delta = \det (s_j^{(i)})_{i,j=1}^2$, so ist die Gruppe G direkt zerlegbar genau dann, falls für jede Prizahl $p \in \Pi_0(G)$ die Bedingungen

1.

$$\exp_p \Delta + \max [\alpha_1(p) - \exp_p (s_{\pi(2)}^{(2)} - a(p) s_{\pi(1)}^{(2)}),\ \alpha_2(p) - \exp_p s_{\pi(1)}^{(2)},\ -\exp_p s_{\pi(2)}^{(2)}] \leqq$$
$$\leqq \min [\alpha_1(p),\ \alpha_2(p) + \exp_p (s_{\pi(2)}^{(1)} - a(p) s_{\pi(1)}^{(1)})],$$

2.

$$\exp_p \Delta + \max [\alpha_1(p) - \exp_p (s_{\pi(2)}^{(1)} - a(p) s_{\pi(1)}^{(1)}),\ \alpha_2(p) - \exp_p s_{\pi(1)}^{(1)},\ -\exp_p s_{\pi(2)}^{(1)}] \leqq$$
$$\leqq \min [\alpha_1(p),\ \alpha_2(p) + \exp_p (s_{\pi(2)}^{(2)} - a(p) s_{\pi(1)}^{(2)})]$$

erfüllt sind; hierbei wurde π statt π_p geschrieben.

Satz 5. *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe vom Range 2, die die Eigenschaft (R) besitzt, und sei (4) ein vollständiges kanonisches System Malcevscher Invarianten von G bezüglich einer Basis B, welches den folgenden Bedingungen genügt:*

a) $\mathfrak{R}(G; \mathfrak{M}_B) = (0_+)$,

b) $\pi_p = \varepsilon$ für jede Primzahl $p \in \Pi_0(G)$.

---

* Mit ε wurde die identische Permutation bezeichnet.

** Es ist noch immer die Ungleichung $0 \leqq a(p) < p^{\alpha_1 - \alpha_2}$ erfüllt.

Unter diesen Bedingungen ist die Gruppe G genau dann direkt zerlegbar, falls zwei solche teilerfremde ganze rationale Zahlen s_1, s_2 vorhanden sind, daß für jede Primzahl $p \in \Pi_0(G)$, für die $a(p) \neq 0$ die Relation (33) *besteht, und außerdem die Beziehung* (34) *für alle übrigen Primzahlen $p \in \Pi_0(G)$ gilt.*

Durch diesen Satz wurde der folgende Satz bewiesen.

Satz 7. *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe vom Range 2, die die Eigenschaft (R) besitzt, und sei* (4) *ein vollständiges kanonisches System Malcevscher Invarianten von G bezüglich einer Basis B, welches den Bedingungen* a) *und* b) *des Satzes 5 genügt. Unter diesen Voraussetzungen ist die Gruppe G direkt zerlegbar, falls die Primzahlmenge*

$$\Pi_0^{(2)}(G) = E\big(p;\, p \in \Pi_0(G),\, a(p) \neq 0\big)$$

endlich ist.