MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK 12 1962 ČÍSLO 3

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ПРОСТЫХ ЛОМАНЫХ ЛИНИЙ В ПЛОСКОСТИ

ВАЦЛАВ ПОЛАК, (VÁCLAV POLÁK) Брно

§ 1. Введение

Простая плоская ломаная линия $\boldsymbol{P} = (X, A_1, \dots, A_n, Y)$ с собственными вершинами называется сечением односвязной области J из X в Y, если X, Y — две точки границы множества J и линия $\boldsymbol{P}$ лежит полностью — за исключением двух своих концов — в множестве J. В работе доказывается, что всяких два изогональных сечения множества J из X в Y могут быть переведены друг в друга конечным числом параллельных переносов сторон так, что при этих преобразованиях сохраняется свойство быть сечением и изогональность.

§ 2. Определения и вспомогательные теоремы

Пусть n — натуральное число и $\boldsymbol{P} = (A_0, A_1, \dots, A_n, A_{n+1})$ — простая n-ломаная линия, имеющая только собственные вершины. (Вершинами являются точки $A_1, A_2, \dots, A_n$. Собственной вершиной называется вершина, две соседние стороны которой лежат на разных прямых. Простой линией называется линия, непересекающая сама себя.) В дальнейшем мы будем предполагать, что ломаная линия имеет только собственные вершины. Для $i = 1, 2, \dots, n$ пусть α_i — угол между векторами $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$, $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ (в этом порядке, притом положительный смысл измерения углов мы берем против направления движения часовой стрелки, а из двух возможных углов между двумя векторами выбираем тот, который меньше 180°). Всегда имеет место $0 < |\alpha_i| < 180°$. Для простого многоугольника тогда имеет место $\sum_i \alpha_i = \pm 360°$, где знаки зависят от его ориентировки.

Определение 1. Будем говорить, что простая n-ломаная линия является линией типа Ω, если $|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i| < 180°$. О простой ломаной линии будем говорить, что она — типа Ω_∞, если она — типа Ω и оба ее крайних отрезка можно без ограничения одновременно продолжать без того, чтобы нарушалась простота.

Определение 2. Две простые ломаные линии $\mathbf{P} = (A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$, $\mathbf{Q} = (B_0, B_1, \ldots, B_n, B_{n+1})$ назовем параллельными, если все векторы $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$, $\overrightarrow{B_iB_{i+1}}$ попарно параллельны и одинаково направлены (для всех α_i, β_i имеет место $\alpha_i = \beta_i$).

Пусть $\mathbf{P} = (A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$ — простая n-ломаная линия, $A_i (1 \leqq i \leqq n)$ — произвольная ее вершина, и $\mathbf{R} = (B_0, B_1, \ldots, B_k, B_{k+1})$ — такая линия типа Ω_∞, что векторы $\overrightarrow{B_0B_1}$, $\overrightarrow{B_kB_{k+1}}$ одинаково направлены и параллельны поочередно векторам $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$, $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$. Очевидно, существуют точки $B_1', B_2', \ldots, B_k'$ такие, что линия $(A_{i-1}, B_1', \ldots, B_k', A_{i+1})$ параллельна $\mathbf{R}$, а линия $\mathbf{Q} = (A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}, B_1', \ldots, B_k', A_{i+1}, \ldots, A_n, A_{n+1})$ — простая.)

Определение 3. Если простая линия $\mathbf{Q}$ получается из $\mathbf{P}$ описанным только что способом, то будем говорить, что линия $\mathbf{R}$ нами вложена в вершину A_i многоугольника $\mathbf{P}$. Это определение может быть распространено и на случай, когда A_i — несобственная вершина, т. е. точки A_{i-1}, A_i, A_{i+1} лежат на одной прямой. (Очевидно, существуют точки $B_1', B_2', \ldots, B_k', A_{i+1}'$ такие, что A_{i+1}' лежит на полупрямой $A_{i+2}A_{i+1}$, линия $(A_{i-1}, B_1', \ldots, B_k', A_{i+1}')$ параллельна $\mathbf{R}$ и линия $(A_0, A_1, \ldots, A_{i-1}, B_1', \ldots, B_k', A_{i+1}', A_{i+2}, \ldots, A_n, A_{n+1})$ — простая.)

Лемма 1. *Пусть $\mathbf{P}$ — простая ломаная линия типа Ω. Тогда существует простая ломаная линия $\mathbf{R}$ типа Ω_∞, параллельная $\mathbf{P}$.*

Доказательство проделаем полной индукцией по числу вершин. Для однoломаных линий утверждение, очевидно, выполнено. Так как всякая 2-ломаная линия типа Ω является линией типа Ω_∞, то наша лемма справедлива и для $n = 2$. Пусть $n \geqq 3$ — произвольное натуральное число и пусть лемма справедлива для всех k, $1 \leqq k < n$. Пусть $P = (A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$ простая n-ломаная линия типа Ω. Пусть $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$. Потом линия $P' = (A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1})$ — типа Ω. По индукционному предположению построим линию R' параллельную P' и типа Ω_∞. Вложением линии $\mathbf{R}'$ во вторую вершину линии (B_0, B_1, B_2, B_3), у которой векторы $\overrightarrow{B_0B_1}, \overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{B_2B_3}$ одинаково направленные и параллельные поочередно векторам $\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_2A_3}$, построим некоторую линию $\mathbf{R}$. Если $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$, то рассмотрим последовательность $0, \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Так как разность двух соседних членов этой последовательности (равно как и разность первого и последнего члена) отлична от нуля и лежит между числами $-180°$, $+180°$, то существует число i_0, $1 \leqq i_0 < n$ такое, что $|\sum_{i=1}^{i_0} \alpha_i| < 180°$, $|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i - \sum_{i=1}^{i_0} \alpha_i| = |\sum_{i=i_0+1}^{n} \alpha_i| < 180°$ и по крайней мере одно из этих чисел отлично

от нуля. Но это означает, что линии $\mathbf{P}_1 = (A_0, A_1, \ldots, A_{i_0}, A_{i_0+1})$, $\mathbf{P}_2 = (A_{i_0}, A_{i_0+1}, \ldots, A_n, A_{n+1})$ — типа Ω. Согласно индукционному предположению можно к ним построить линии $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ параллельные $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, типа Ω_∞. Эти линии вложим в обе вершины 2-ломаной линии $\mathbf{R}_3$, три стороны которой одинаково направлены и параллельны поочередно векторам $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_{i_0}A_{i_0+1}}$, $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}$ (по крайней мере одна из вершин линии $\mathbf{R}_3$ — несобственная). Искомая линия $\mathbf{R}$ построена.

Лемма 2. *Пусть $\mathbf{R}$ — простой многоугольник, V — произвольная его вершина и пусть внутренний угол многоугольника $\mathbf{R}$ при вершине V — меньше $180°$. Тогда произойдет по крайней мере один из следующих двух случаев: (i) существуют треугольник (A, B, C) и линии $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$ типа Ω_∞ такие, что если их вложить в вершины B, C, то получится многоугольник $\mathbf{S}$, параллельный $\mathbf{R}$ (притом вершине $V \in \mathbf{R}$ соответствует $A \in \mathbf{S}$). (ii) Существует выпуклый четырехугольник (A, B, C, D), внутренняя часть которого содержит внутреннюю часть параллелограмма, определенного отрезками $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, и существуют линии $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{R}_3$ типа Ω_∞ такие, что если их вложить в вершины B, C, D, то получится многоугольник $\mathbf{S}$, параллельный $\mathbf{R}$ (притом вершине $V \in \mathbf{R}$ соответствует $A \in \mathbf{S}$).*

Доказательство легко производится с помощью последовательности $0, \alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \ldots, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$ (разность двух ее следующих друг за другом членов лежит между числами $-180°$, $180°$ и $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 360°$).

Определение 4. Пусть J — односвязная область в плоскости, X, Y — две точки ее границы и $\mathbf{P} = (X, A_1, \ldots, A_n, Y)$ — простая n-ломаная линия такая, что она полностью — за исключением двух своих концов — лежит в J. Тогда мы будем говорить, что $\mathbf{P}$ образует сечение области J из точки X в Y.

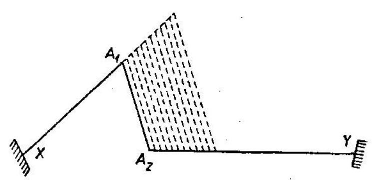

Рис. 1.

Определение 5. Пусть $\mathbf{P} = (X, A_1, \ldots, A_n, Y)$ — сечение области J из X в Y. Сечение $\mathbf{P}$ разбивает J на две связные области. Одну из них мы считаем положительной, вторую отрицательной. Выберем произвольную (отличную от нулевой и n-той) сторону сечения $\mathbf{P}$ (скажем, $\overline{A_iA_{i+1}}$). Осуществим параллельный перенос прямой $p_i = A_iA_{i+1}$ в направлении, перпендикулярном ей, на расстояние $d > 0$ (см. рис. 1). Исходное положение прямой обозначим через $p_i^{(0)}$, конечное ее положение через $p_i^{(d)}$, а всякому промежуточному положению прямой при переносе поставим в соответствие число, представляющее величину переноса. Выберем этот перенос таким малым, чтобы для всякого $t \in [0, d]$ было определено сечение $(X, A_1, \ldots, A_{i-1}, p_{i-1} \cap p_i^{(t)}, p_i^{(t)} \cap p_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_n, Y)$. Результатом этого процесса является преобразование сечения $\boldsymbol{P}$, называемое элементарным преобразованием сечения $\boldsymbol{P}$ или же элементарным переносом i-той стороны сечения $\boldsymbol{P}$ и обозначаемое либо через $\tau^{(i, d)}$, если мы имеем дело с переносом в положительную часть области J, либо через $\tau^{(i, -d)}$, если перенос происходит в отрицательную часть. Сечение $\boldsymbol{P}\tau^{(i,d)}$ является окончательным сечением, полученным с помощью описанного выше процесса (оно соответствует числу $t = d$). Вершины сечения $\boldsymbol{P}\tau^{(i,d)}$ обозначим через $A_j\tau^{(i,d)}$. Очевидно, для $i \neq j \neq i+1$ имеем $A_j\tau^{(i,d)} \equiv A_j$. Тождественное преобразование (оно не переносит никакой стороны) мы будем также считать элементарным преобразованием.

Определение 6. Пусть $\tau^{(i,d)}$ — произвольное элементарное преобразование сечения $\boldsymbol{P}$ и пусть $d > 0$. Тогда для всякого $t \in [0, d]$ однозначно определено элементарное преобразование $\tau^{(i,t)}$ сечения $\boldsymbol{P}$. Для $t = 0$ получаем тождественное преобразование, для $t = d$ — первоначальное преобразование $\tau^{(i,d)}$. Множество этих преобразований, упорядоченное естественным образом (одно-однозначным соответствием $t \leftrightarrow \tau^{(i,t)}$) обозначим через $I(\tau^{(i,d)})$. Это множество однозначно определено преобразованием $\tau^{(i,d)}$, и оно образует непрерывный переход к этому преобразованию от тождественного преобразования. Вполне аналогичным способом дается определение множества $I(\tau^{(i,d)})$ для $d < 0$.

Определение 7. Пусть $\overline{A_iA_{i+1}}$ — произвольная сторона сечения $\boldsymbol{P}$. Тогда множество всех таких чисел $t \geqq 0$, что существует элементарное преобразование $\tau^{(i,t)}$ сечения $\boldsymbol{P}$, заполняет интервал $[0, T]$, нде $T > 0$. Если T — конечное число, то преобразование сечения $\boldsymbol{P}$, которое получается параллельным переносом его i-той стороны на расстояние T в положительную часть области J, называется предельным преобразованием сечения $\boldsymbol{P}$ и обозначается через $\Pi_+^{(i)}$. Если для $\Pi_+^{(i)}$ определить множество $I(\Pi_+^{(i)})$ таким же образом, как это делалось выше, то это множество состоит — за исключением преобразования $\Pi_+^{(i)}$ — из одних только элементарных преобразований. Преобразование $\Pi_+^{(i)}$ определено однозначно. Аналогично определяется преобразование $\Pi_-^{(i)}$ и множество $I(\Pi_-^{(i)})$.

Пусть $\tau_1 = \tau^{(i,c)}$ — элементарное преобразование сечения $\boldsymbol{P}$, $\tau_2 = \tau^{(j,d)}$ — элементарное преобразование сечения $\boldsymbol{P}\tau_1$. Тогда можно определить произведение $\tau = \tau_1 . \tau_2$ этих преобразований. Множество $I(\tau)$ получится, если мы за множеством преобразований $I(\tau_1)$ поставим следующее множество, образуемое преобразованиями $\tau_1 . \tau^{(j,t)}$, где $\tau^{(j,t)} \in I(\tau_2)$ и эти преобразования упорядочены по параметру t (единственным общим элементом указанных множеств является $\tau_1 \equiv \tau_1 . \tau^{(j,0)}$). В дальнейшем под преобразованием τ сечения $\boldsymbol{P}$ мы будем понимать (если это не сможет привести к недоразумению) произведение конеч-

ного числа элементарных преобразований. О сечениях $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\tau$ будем говорить, что их можно преобразовать друг в друга. Очевидно, оба сечения параллельны. Система преобразований $I(\tau)$ образует непрерывный переход преобразований сечения $\boldsymbol{P}$ от тождественного преобразования к преобразованию τ.

В работе содержится доказательство следующего утверждения:

Теорема. *Каждые два параллельные сечения $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ из X в Y односвязной области J можно преобразовать друг в друга (т. е. существует такая конечная последовательность $\{\boldsymbol{R}_i\}_{i=1}^k$ сечений из X в Y в области J, что $\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{R}_k = \boldsymbol{Q}$ и $\boldsymbol{R}_{i+1}$ получается из $\boldsymbol{R}_i$ элементарным переносом некоторой из его сторон).*

Для доказательства теоремы нам понадобится еще несколько рассуждений.

Пусть $(A_0, A_1, \ldots, A_n, A_{n+1})$ — простая ломаная линия типа Ω_∞. Отрезки $\overline{A_0A_1}$ и $\overline{A_nA_{n+1}}$ заменим соответственно полупрямыми $p = A_1A_0$ и $q = A_nA_{n+1}$. Последовательность множеств p, $\overline{A_1A_2}$, ..., $\overline{A_{n-1}A_n}$, q представляет двухсторонне бесконечную простую ломаную линию. Обозначим ее через $\boldsymbol{P}$. Линия $\boldsymbol{P}$ имеет n собственных вершин. Аналогично, как и для сечений, для линии $\boldsymbol{P}$ можно определить элементарный перенос некоторой ее стороны; можно также дать определение преобразования линии $\boldsymbol{P}$ как последовательности конечного числа таких переносов.

Лемма 3. *Пусть $\boldsymbol{P} = (p, \overline{A_1A_2}, \ldots, \overline{A_{n-1}A_n}, q)$ — простая двухсторонне бесконечная ломаная линия. Пусть прямые, на которых лежат полупрямые p, q, пересекаются (точку их пересечения обозначим через X). Пусть $\varepsilon > 0$ — такое число, что все собственные вершины линии P лежат внутри замкнутой круговой ε-окрестности $K(X, \varepsilon)$ точки X. Пусть $\boldsymbol{Q}$ — линия, получившаяся переносом линии $\boldsymbol{P}$ в направлении, параллельном p, на расстояние $d > 0$. Тогда существует преобразование τ линии $\boldsymbol{P}$ такое, что (а) $\boldsymbol{P}\tau = \boldsymbol{Q}$, (б) $\pi \in I(\tau) \Rightarrow$ все вершины $\boldsymbol{P}\pi$ лежат внутри $K(X\pi, \varepsilon)$.*

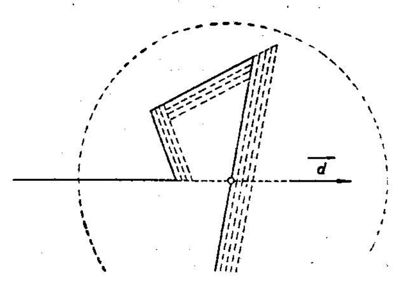

Рис. 2.

Доказательство произведем непосредственным построением преобразования τ. Сложением элементарных переносов сторон поочередно первой, второй и т. д. последней по направлениям, параллельным вектору переноса $\vec{d}$, легко найдется преобразование τ_1 со свойством (б) такое, что $\boldsymbol{P}\tau_1$ получается из $\boldsymbol{P}$ трансляцией на вектор $\vec{t}$, который одинаково направлен и параллелен вектору $\vec{d}$ и $0 < |\vec{t}| \leqq |\vec{d}|$ и такое, что имеет место: $\pi \in I(\tau_1) \Rightarrow \boldsymbol{P}\pi$ имеет вершины внутри $K(X, \varepsilon)$ (см. рис. 2). Сложением нескольких таких преобразований получим тогда преобразование τ.

Лемма 4. *Пусть* **P** — *сечение области* J, A — *его вершина и* τ — *преобразование сечения* **P**. *Тогда существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что для всех* $\pi \in I(\tau)$ *замкнутая круговая* ε — *окрестность точки* $A\pi$ *лежит полностью в* J *и не содержит — за исключением участков внутренних частей соседних сторон — никакой другой точки сечения* $\mathbf{P}\pi$.

Лемма 5. *Пусть* **P** — *сечение области* J, A — *его вершина и* τ — *преобразование сечения* **P**. *Пусть* ε — *число из предыдущей леммы для вершины* A *и преобразования* τ. *Пусть* **R** — *линия типа* Ω_∞ *такая, что ее можно вложить в вершину* A *и что все ее вершины лежат внутри* $K(A, \varepsilon)$. *Построим из сечений* **P**, $\mathbf{P}\tau$ *два новые сечения (взаимно параллельные)* $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ *вложением линии* **R** *в вершины* A, $A\tau$. *Тогда сечения* $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$ *можно также преобразовать друг в друга.*

Лемма является очевидным следствием двух предыдущих лемм.

§ 3. Доказательство теоремы и следствие

Для доказательства нашей теоремы нам нужно еще некоторым способом охарактеризовать пару сечений **P**, **Q** области J из X в Y. Будем говорить, что сечения $\mathbf{P} = (X = A_0, A_1, \ldots, A_r, A_{r+1} = Y)$, $\mathbf{Q} = (X = B_0, B_1, \ldots, B_s, B_{s+1} = Y)$ области J из X в Y хорошо расположены, если точка B_1 лежит между X, A_1 (значит, векторы $\overrightarrow{XA_1}$, $\overrightarrow{XB_1}$ одинаково направлены и параллельны), если либо точка B_s лежит между A_r, Y либо A_r — между B_s, Y (значит, векторы $\overrightarrow{A_rY}$, $\overrightarrow{B_sY}$ одинаково направлены и параллельны) и если множество $\mathbf{P} \cap \mathbf{Q}$ кроме общих частей нулевых и последних сторон содержит только конечное число точек, из которых никакая не является вершиной. Каждая из этих точек Z является, очевидно, точкой пересечения одной стороны из **P** (скажем, i-той) и одной стороны из **Q** (скажем, j-той) и, очевидно, Z лежит внутри обоих отрезков $\overline{A_iA_{i+1}}$, $\overline{B_jB_{j+1}}$. Точке Z поставим в соответствие упорядоченную пару (i, j). Множество таких пар обозначим через $\mathfrak{M}$. Определим $\mathfrak{N} = \{(i,j) : (i,j) \in \mathfrak{M}, i = 0\}$, $\mathfrak{S} = \{(i,j) : (i,j) \in \mathfrak{M}$ и либо $i = r$ либо $j = s\}$. Из простоты линий **P**, **Q** и их определения хорошего расположения сразу же вытекают следующие утверждения: Множества $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{S}$ либо не пересекаются, либо имеют по большей мере общую пару $(0, s)$. Множество $\mathfrak{S}$ либо пусто либо содержит только пары, для которых либо сплошь $i = r$ либо сплошь $j = s$ (причем эти две возможности исключают друг друга). Имеет место $(i, 0) \notin \mathfrak{M}$. Если **P**, **Q** — параллельные сечения, то $(i, i) \notin \mathfrak{M}$ для каждого i.

Доказательство теоремы (см. рис. 3) проведем полной индукцией по числу вершин. Для $n = 2$ теорема, очевидно, справедлива. Пусть $n > 2$ — произвольное натуральное число и пусть теорема справедлива для всех p-ломаных сечений, где $2 \leqq p < n$. Рассмотрим два параллельные n-ломаные сечения **P**,

Q области J из точки X в Y. Без ограничения общности можно предполагать, что **P**, **Q** хорошо расположены (этого можно добиться, преобразовав предварительно некоторое из сечений).

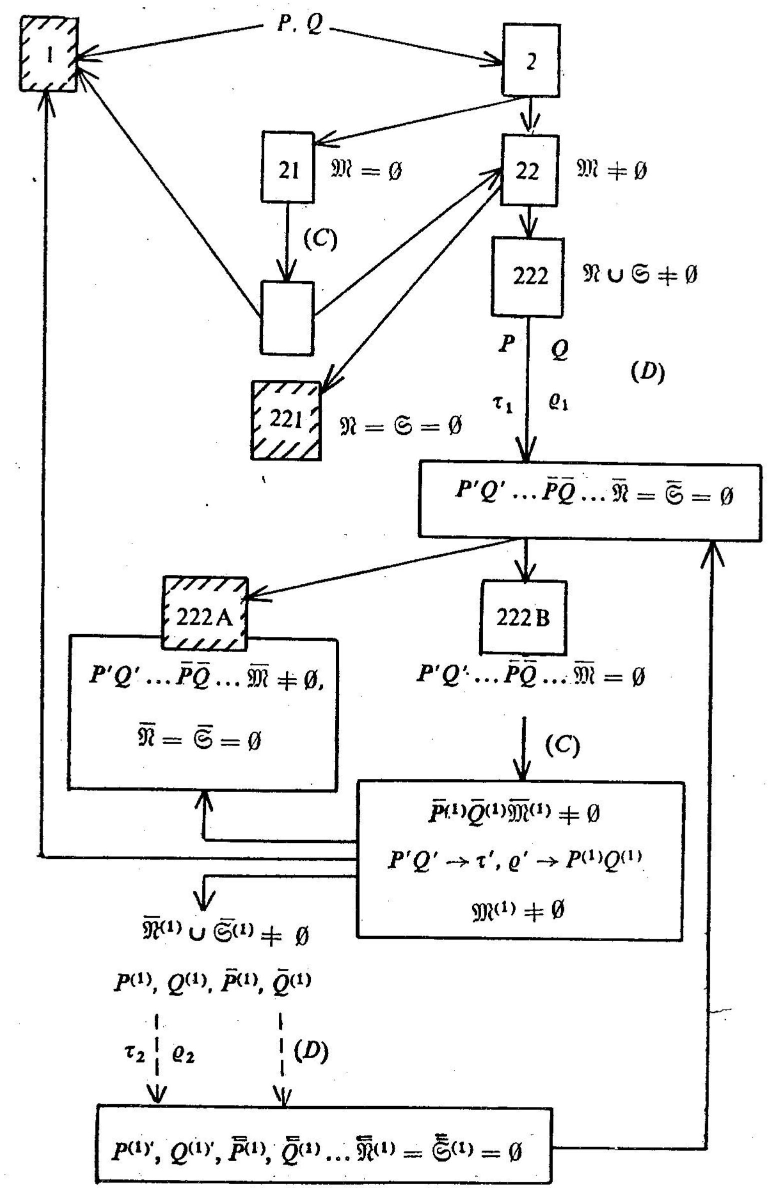

Рис. 3.

1. Пусть $(0, n) \in \mathfrak{M}$. Точка A_n должна тогда, очевидно, лежать между точками B_n, Y. Обозначим через Z точку, соответствующую паре $(0, n)$. Будем различать случаи β_1, β_2 в зависимости от того, лежат или нет B_2, Y в одной и той же полуплоскости, определенной прямой XZ (поскольку Z лежит между Y, B_n, то точка Y не лежит на этой прямой). Независимо от этого разделения различим случаи β^1, β^2 в зависимости от того, лежат или нет B_{n-1}, X в одной и той же полуплоскости, определенной прямой YZ (поскольку точка Z лежит между X, A_1, то точка X не лежит на этой прямой). Если одновременно произойдет случай β_1 и β^1, обозначим этот случай через β_1^1. Аналогично могут быть различены остальные 3 случая β_1^2, β_2^1, β_2^2 (см. рис. 4—7). Все эти четыре случая мы разрешим с помощью следующих двух утверждений, справедливых при наших индукционных предположениях (доказательство этих утверждений проделаем позже):

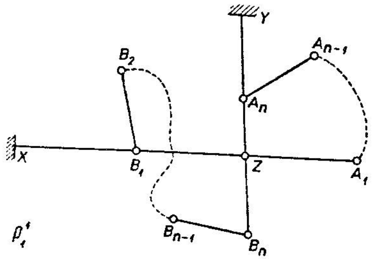

Рис. 4.

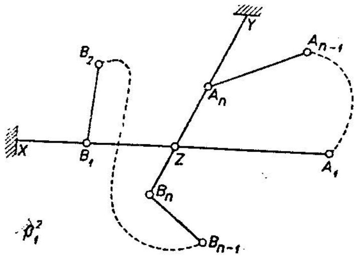

Рис. 5.

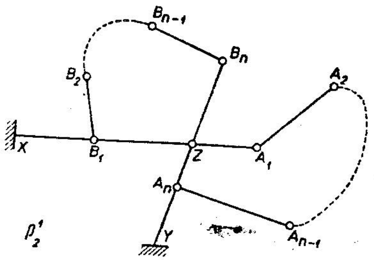

Рис. 6.

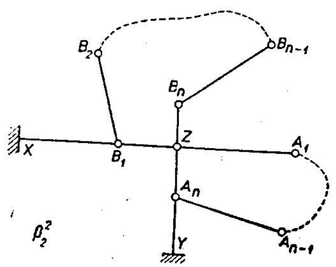

Рис. 7.

(A) Пусть (X, Z, Y) — сечение области J из X в Y, линия $\boldsymbol{P} = (X, A_1, \ldots, A_n, Y)$ — сечение области J из X в Y такое, что A_1 лежит между X, Z и Z между A_n, Y (см. рис. 8). Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ существует преобразование τ сечения $\boldsymbol{P}$ такое, что $\boldsymbol{P}\tau$ имеет все вершины внутри круговой ε-окрестности точки Z.

(B) Пусть (X, Z, Y) — сечение области J из X в Y. Пусть сечение $\boldsymbol{P} = (X, A_1, \ldots, A_n, Y)$ области J из X в Y — такое, что A_1 лежит между X, Z; Z — между A_n, Y и либо (u) точки A_1, A_{n-1} лежат в разных полуплоскостях, определенных

прямой YZ (рис. 9) либо (v) точки A_2, A_n лежат в разных полуплоскостях, определенных прямой XZ (рис. 10). Тогда существует преобразование τ сечения $\boldsymbol{P}$ такое, что $A_n\tau$ лежит между Y, Z.

Решим сначала случай β_1^1. Согласно (B) существует преобразование τ_1 сечения $\boldsymbol{Q}$ такое, что $B_n\tau_1$ лежит между Y, Z. Согласно (A) существует преобразование τ_2 сечения $\boldsymbol{P}$ такое, что $B_n\tau_1$ лежит между точками $A_n\tau_2$, Y. Значит, существует $\pi \in I(\tau_2)$ такое, что $A_n\pi = B_n\tau_1$ и по предположению сечения $\boldsymbol{P}\pi$, $\boldsymbol{Q}\tau_1$ можно перевест идруг в друга. (Эти сечения имеют общую n-тую сторону. Следовательно, рассматриваем $(n - 1)$ — ломаные сечения $\boldsymbol{P}' = (X, A_1\pi, \ldots, A_{n-1}\pi, A_n\pi)$, $\boldsymbol{Q}' = (X, B_1\tau_1, \ldots, B_{n-1}\tau_1, A_n\pi)$ односвязной области $J' = J - \overline{Y(A_n\tau)}$.)

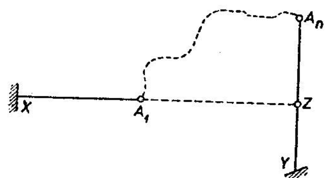
Рис. 8.

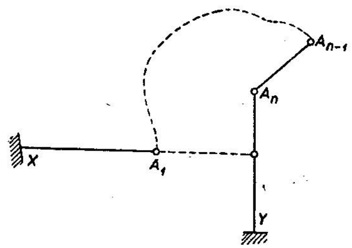
Рис. 9.

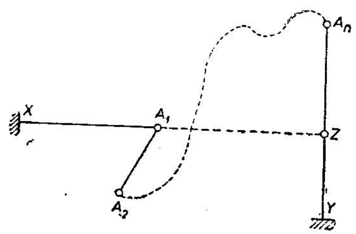
Рис. 10.

Аналогично можно поступать и в случаях β_1^2 β_2^2. То же самое относится и к оставшемуся случаю β_2^1, только сечения $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ поменяются ролями. (Для сечения $\boldsymbol{P}$ используем утверждение (B), а для сечения $\boldsymbol{Q}$ — утверждение (A). Найдем преобразования τ_1, τ_2 такие, что $A_1\tau_1 = B_1\tau_2$ и эти сечения тогда согласно предположению можно перевести друг в друга.) Тем самым случай 1 разрешен.

2. Пусть не произойдет случай 1, т. е. $(0, n) \notin \mathfrak{M}$.

21. Пусть $\mathfrak{M} = \emptyset$. Тогда существуют преобразования τ, ϱ такие, что $\boldsymbol{P}' = \boldsymbol{P}\tau$, $\boldsymbol{Q}' = \boldsymbol{Q}\varrho$ хорошо расположены и такие, что их множество $\mathfrak{M}'$ — непустое. Дело в том, что при наших индукционных предположениях имеет место следующее общее утверждение:

(C) Пусть $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ — два сечения (по большей мере n-ломанные, $3 \leqq n$) области J из X в Y такие, что они хорошо расположены и их $\mathfrak{M} = \emptyset$. Тогда существуют преобразования τ, ϱ такие, что сечения $\boldsymbol{P}^{(1)} = \boldsymbol{P}\tau$, $\boldsymbol{Q}^{(1)} = \boldsymbol{Q}\varrho$ хорошо расположены и $\mathfrak{M}^{(1)} \neq \emptyset$. (Преобразования τ, ρ легко построить таким образом, что соответствующие элементарные преобразования осуществляем в направлении внутрь многоугольника, образуемого сечениями **P**, **Q** — см. рис. 11.)

22. Пусть $\mathfrak{M} \neq \emptyset$.

221. Пусть $\mathfrak{N} = \mathfrak{S} = \emptyset$. Так как $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, то существуют числа i, j такие, что $1 \leqq i < n$, $1 \leqq j < n$, $(i, j) \in \mathfrak{M}$. Паре (i, j) соответствует некоторая точка Z — точка пересечения i-той и j-той стороны. Согласно предположению точка Z лежит внутри обеих. Без ограничения общности можно предполагать, что (i, j) — та пара, которая имеет из всех пар множества $\mathfrak{M}$ минимальный второй компонент и точка Z — ближайшая к точке B_j (из всех возможных точек пересечения отрезка $\overline{B_jB_{j+1}}$ с сечением **P**). Очевидно, $i \neq j$. Различим два случая α и β, для $i > j$ и $i < j$ соответственно.

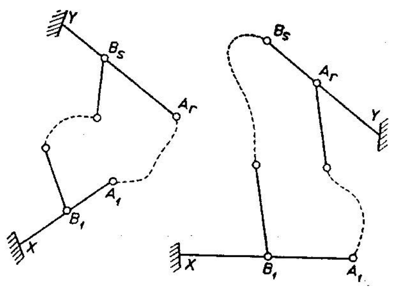

Рис. 11.

221 α. Пусть $i > j$ (рис. 12). Докажем сначала, что линия $(A_j, A_{j+1}, \ldots, A_i, A_{i+1})$ — типа Ω: Из свойств пары (i, j) следует, что линия $(B_1, B_2, \ldots, B_j, Z)$ не имеет с сечением **P**, кроме точек B_1, Z никакой другой общей точки. Отсюда следует, что отрезки $\overline{B_1B_2}, \overline{B_2B_3}, \ldots, \overline{B_{j-1}B_j}, \overline{B_jZ}, \overline{ZA_i}, \overline{A_iA_{i-1}}, \ldots, \overline{A_2A_1}, \overline{A_1B_1}$

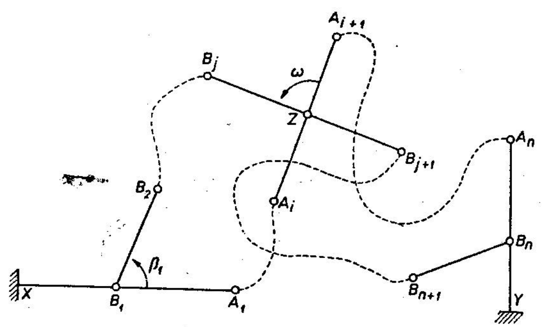

Рис. 12.

образуют простой многоугольник (обозначим его через T). Очевидно, он полностью лежит и со своей внутренней части в множестве J. Внутренний угол многоугольника T при вершине Z — меньше 180°. (Пусть этот угол больше 180°. Тогда точки $A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_n, Y$ лежат внутри многоугольника T. Отсюда $Y \in J$ — противоречие.) Для многоугольника T имеет место $\pm 360° =$

$$= \sum_{k=1}^{j} \alpha_k + \sum_{k=j+1}^{i} \alpha_k + \omega + \sum_{k=2}^{j} (-\beta_k) \pm (180° \mp \beta_1),$$ где ω, $0 < |\omega| < 180°$ — угол, указанный на рис. 12 (без ограничения общности можно предполагать, что $0 < \omega < 180°$ и в равенстве имеет место верхний знак. Поскольку **P**, **Q** — сечения параллельные, то справедливо $\sum_{k=1}^{j} \alpha_k = \sum_{k=1}^{j} \beta_k$ и после подстановки в верхнее уравнение получим $\sum_{k=j+1}^{i} \alpha_k = 180° - \omega$. Тем самым доказано, что линия $(A_j, A_{j+1}, \ldots, A_i, A_{i+1})$ — типа Ω (параллельную с ней линию типа Ω_∞ обозначим через **R**).

Из свойств пары (i, j) вытекает, что линия $(X, B_1, \ldots, B_j, Z, A_{i+1}, \ldots, A_n, Y)$ является сечением области J из X в Y. Это сечение обозначим через $\bar{\mathbf{P}}$. Построим из сечения $\bar{\mathbf{P}}$ сечение $\mathbf{P}_1$ вложением линии **R** в вершину Z сечения $\bar{\mathbf{P}}$. Сечения **P**, $\mathbf{P}_1$ параллельны и имеют общую n-тую сторону. Следовательно, согласно предположениям существует преобразование τ_1 такое, что $\mathbf{P}\tau_1 = \mathbf{P}_1$. Сечение $\mathbf{P}_1$ параллельно **Q** и имеет с ним общую нулевую сторону. Значит, существует преобразование τ_2 такое, что $\mathbf{P}_1\tau_2 = \mathbf{Q}$. Положим $\tau = \tau_1\tau_2$, и мы готовы.

221 β. Пусть $i < j$. Пусть (i', j') — та пара (рис. 13), которая имеет из всех пар множества $\mathfrak{M}$ минимальный первый компонент и точка Z', соответствующая этой паре, является ближайшей к точке $A_{i'}$ (из всех возможных точек

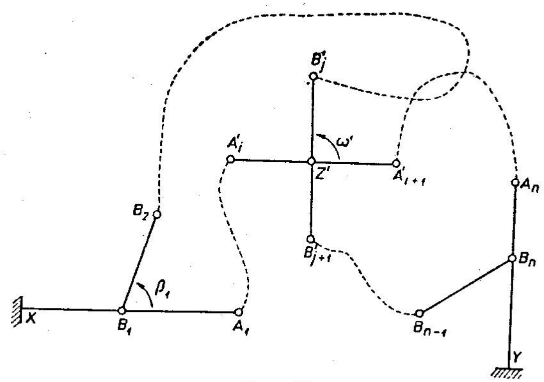

Рис. 13.

пересечения отрезка $\overline{A_{i'}A_{i'+1}}$ с сечением **Q**). Очевидно, $i' \leqq i, j \leqq j'$. Аналогичным способом, как это делалось выше, докажем, что линия $(B_{i'}, B_{i'+1}, \ldots, B_{j'}, B_{j'+1})$ — типа Ω (параллельную с ней линию типа Ω_∞ обозначим через **R'**). Из свойств пары (i', j') вытекает, что линия $(X, A_1, \ldots, A_{i'}, Z', B_{j'+1}, \ldots, B_n, Y)$ является сечением множества J из X в Y (обозначим его через $\bar{\mathbf{Q}}$). Построим из сечения $\bar{\mathbf{Q}}$ сечение $\mathbf{Q}_1$ вложением линии $\mathbf{R}'$ в вершину Z' сечения $\bar{\mathbf{Q}}$. Сечения $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}_1$ параллельны и имеют общую n-тую сторону. Согласно предположению существует преобразование τ_1 такое, что $\mathbf{Q}\tau_1 = \mathbf{Q}_1$. Сечения $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}_1$ параллельны и имеют общую нулевую сторону. Следовательно, существует преобразование τ_2 такое, что $\mathbf{Q}_1\tau_2 = \mathbf{P}$. Положим $\tau = \tau_1\tau_2$, и мы готовы.

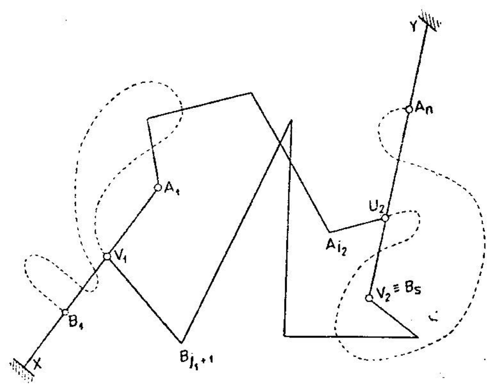

Рис. 14.

222. Пусть $\mathfrak{N} \cup \mathfrak{S} \neq \emptyset$. При наших индукционных предположениях справедливо следующее общее утверждение (доказательство приведем позже):

(D) Пусть $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ — два сечения (по большей мере n-ломаные) области J из X в Y такие, что они хорошо расположены и $\mathfrak{N} \cup \mathfrak{S} \neq \emptyset$. Тогда существуют сечения $\bar{\mathbf{P}}$, $\bar{\mathbf{Q}}$ из X в Y, линии $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ (не все 1-ломаные) типа Ω_∞ и преобразования τ, ϱ такие, что $\bar{\mathbf{P}}$, $\bar{\mathbf{Q}}$ хорошо расположены, $\bar{\mathfrak{M}} \subset \mathfrak{M}$, $\bar{\mathfrak{N}} = \bar{\mathfrak{S}} = \emptyset$ (см. рис. 14, нумерацию сторон в $\bar{\mathbf{P}}$, $\bar{\mathbf{Q}}$ оставим как в $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$), вложением линий $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ в первые и в последние вершины сечений $\bar{\mathbf{P}}$, $\bar{\mathbf{Q}}$ получим сечения, $\mathbf{P}'$, $\mathbf{Q}'$, параллельные $\mathbf{P}$ и имеет место $\mathbf{P}\tau = \mathbf{P}'$, $\mathbf{Q}\varrho = \mathbf{Q}'$.

Хотя бы у одного из сечений $\bar{\mathbf{P}}$, $\bar{\mathbf{Q}}$ число вершин по сравнению с сечениями $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ уменьшилось. На основании леммы 5 достаточно теперь ограничиться исследованием сечений $\bar{\mathbf{P}} = (X, A_1, \ldots, A_{i_2}, U_2, Y)$, $\bar{\mathbf{Q}} = (X, V_1, B_{j_1+1}, \ldots, B_{j_2}, V_2, Y)$ (рис. 14).

222A. Пусть $\bar{\mathfrak{M}} \neq \emptyset$. Тогда существуют числа $i, j, 1 \leqq i \leqq i_2, j_1 \leqq j \leqq j_2$ такие, что $(i, j) \in \bar{\mathfrak{M}}$. Паре (i, j) соответствует некоторая точка Z — точка пересечения i-той стороны из $\bar{\mathbf{P}}$ и j-той стороны из $\bar{\mathbf{Q}}$. Согласно предположению точка Z лежит внутри обеих сторон. Без ограничения общности можно предполагать, что (i, j) — та пара, которая имеет из всех пар множества $\bar{\mathfrak{M}}$ минимальный второй компонент и точка Z — к точке B_j (в случае $j = j_1$ к точке V_1) ближайшая (из всех возможных точек пересечения j-той стороны с сечением $\bar{\mathbf{P}}$). Вследствие параллельности сечений $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ будет $i \neq j$. Различим два случая: $i > j$ или $i < j$. Вполне аналогично тому, как мы это делали в случаях 221 α, β можно найти преобразование, переводящее $\mathbf{P}'$ в $\mathbf{Q}'$.

222B. Пусть $\bar{\mathfrak{M}} = \emptyset$. Согласно утверждению (C) можно преобразованиями перевести $\bar{\mathbf{P}}$, $\bar{\mathbf{Q}}$ в $\bar{\mathbf{P}}^{(1)}$, $\bar{\mathbf{Q}}^{(1)}$, для которых $\bar{\mathfrak{M}}^{(1)} \neq \emptyset$. (С помощью леммы 5 переведем $\mathbf{P}'$, $\mathbf{Q}'$ преобразованиями τ', ϱ' в $\mathbf{P}^{(1)}$, $\mathbf{Q}^{(1)}$, которые получатся из $\bar{\mathbf{P}}^{(1)}$, $\bar{\mathbf{Q}}^{(1)}$ вложением линий $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$, $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ в соответствующие вершины.) Если $\bar{\mathfrak{N}}^{(1)} \cap \bar{\mathfrak{S}}^{(1)} \neq \emptyset$, то $(0, n) \in \bar{\mathfrak{M}}^{(1)}$ и для пары сечений $\mathbf{P}^{(1)}$, $\mathbf{Q}^{(1)}$ происходит случай 1, который нами уже полностью разрешен. Пусть $\bar{\mathfrak{N}}^{(1)} \cap \bar{\mathfrak{S}}^{(1)} = \emptyset$. Если $\bar{\mathfrak{N}}^{(1)} = \bar{\mathfrak{S}}^{(1)} = \emptyset$, то сечения $\bar{\mathbf{P}}^{(1)}$, $\bar{\mathbf{Q}}^{(1)}$ и соответствующие им сечения $\mathbf{P}^{(1)}$, $\mathbf{Q}^{(1)}$ имеют те же свойства, что и сечения $\bar{\mathbf{P}}$, $\bar{\mathbf{Q}}$, $\mathbf{P}'$, $\mathbf{Q}'$ в случае 222A. Этот случай уже полностью разрешен. Пусть $\bar{\mathfrak{N}}^{(1)} \cup \bar{\mathfrak{S}}^{(1)} \neq \emptyset$. Тогда согласно (D) можно построить сечения $\bar{\bar{\mathbf{P}}}^{(1)}$, $\bar{\bar{\mathbf{Q}}}^{(1)}$, для которых $\bar{\bar{\mathfrak{N}}}^{(1)} = \bar{\bar{\mathfrak{S}}}^{(1)} = \emptyset$, вложением некоторых линий в соответствующие вершины построить сечения $\mathbf{P}^{(1)\prime}$, $\mathbf{Q}^{(1)\prime}$, параллельные $\mathbf{P}$ и некоторыми преобразованиями τ_2, ϱ_2 перевести $\mathbf{P}^{(1)}$, $\mathbf{Q}^{(1)}$ в $\mathbf{P}^{(1)\prime}$, $\mathbf{Q}^{(1)\prime}$. Притом хотя бы у одного из сечений $\bar{\bar{\mathbf{P}}}^{(1)}$, $\bar{\bar{\mathbf{Q}}}^{(1)}$ число сторон по сравнению с сечениями $\bar{\mathbf{P}}^{(1)}$, $\bar{\mathbf{Q}}^{(1)}$ уменьшилось. Рассуждения 222A, B, проведенные нами для сечений $\bar{\mathbf{P}}$, $\bar{\mathbf{Q}}$, $\mathbf{P}'$, $\mathbf{Q}'$, повторим теперь для сечений $\bar{\bar{\mathbf{P}}}^{(1)}$, $\bar{\bar{\mathbf{Q}}}^{(1)}$, $\mathbf{P}^{(1)\prime}$, $\mathbf{Q}^{(1)\prime}$. Так как мы имеем дело с конечным числом сторон, а операцией (D) число сторон уменьшается, то после неcколькократного повторения этих операций мы достигнем цели.

Для того, чтобы закончить доказательство, нам остается еще доказать справедливость утверждений (A), (B) и (D).

Доказательство утверждения (A):

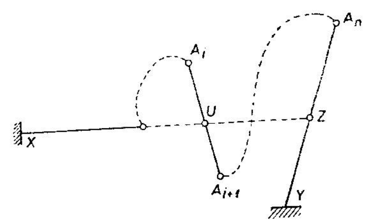

Рис. 15.

1. Пусть внутри отрезка $\overline{A_1Z}$ существует хотя бы одна точка сечения $\mathbf{P}$ (рис. 15). Пусть U — та из этих точек, которая находится ближе всего к точке A_1. Без ограничения общности можно предполагать, что U лежит внутри некоторой стороны (скажем, i-той). Легко докажется, что линии $(X, A_1, \ldots, A_i, A_{i+1})$, $\bar{\mathbf{P}}_1 = (X, U, A_{i+1}, \ldots, A_n, Y)$ — типа Ω (параллельные им достаточно малые линии типа Ω_∞ обозначим через $\mathbf{R}_1$, $\mathbf{R}_2$). Линию $\mathbf{R}_2$ вложим в вершину Z сечения (X, Z, Y). Таким образом, мы получим сечение параллельное $\bar{\mathbf{P}}_1$ и поскольку число его вершин — меньше n, его можно образовать из $\bar{\mathbf{P}}_1$ преобразованием (обозначим его через $\bar{\tau}_2$). Образуем из сечений $\bar{\boldsymbol{P}}_1$, $\bar{\boldsymbol{P}}_1\bar{\tau}_2$ сечения $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, параллельные $\boldsymbol{P}$ так, что вложим в вершины U, $U\bar{\tau}_2$ линию $\boldsymbol{R}_1$. Согласно лемме 5 существует τ_2 такое, что $\boldsymbol{P}_1\tau_2 = \boldsymbol{P}_2$. По предположениям существует τ_1 такое, что $\boldsymbol{P}\tau_1 = \boldsymbol{P}_1$. Преобразование $\tau_1\tau_2$ решает наш случай.

2. Пусть внутри отрезка $\overline{A_1Z}$ не лежит никакая точка сечения $\boldsymbol{P}$.

21. Пусть точки A_{n-1}, X лежат в разных полуплоскостях, определенных прямой A_nY (рис. 9). Тогда на полупрямой YA_n существуют кроме отрезка $\overline{A_nY}$ еще другие точки сечения $\boldsymbol{P}$ (хотя бы одна). В случае необходимости можно заранее проведенным достаточно малым элементарным преобразованием добиться того, чтобы никакая из этих точек не была вершиной. Ближайшую к точке A_n из этих точек обозначим через U. Существует число i, $1 \leqq i < n-1$ такое, что U лежит внутри стороны $\overline{A_iA_{i+1}}$. Легко докажется, что линия $(A_i, A_{i+1}, \ldots, A_n, Y)$ — типа Ω (параллельную ей достаточно малую линию типа Ω_∞ обозначим через $\boldsymbol{R}$). Так как линия $\bar{\boldsymbol{P}}_1 = (X, A_1, \ldots, A_i, U, Y)$ — типа Ω, то мы поступаем так же, как в 1: Линию $\bar{\boldsymbol{P}}_1$ „стянем“ в окрестность точки Z (преобразованием $\bar{\tau}_2$), в вершины U, $U\bar{\tau}_2$ линий $\bar{\boldsymbol{P}}_1$, $\bar{\boldsymbol{P}}_1\bar{\tau}_2$ вложим $\boldsymbol{R}$ (сечения $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$), согласно лемме 5 существует τ_2 такое, что $\boldsymbol{P}_2 = \boldsymbol{P}_1\tau_2$ и согласно индукционным предположениям существует τ_1 такое, что $\boldsymbol{P}\tau_1 = \boldsymbol{P}_1$.

22. Мы используем подобные приемы и в том случае, когда точки A_{n-1}, X лежат в одной и той же полуплоскости, определенной прямой A_nY, но точки

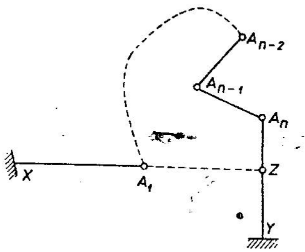

Рис. 16.

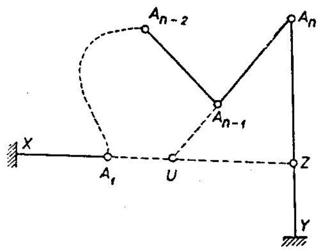

Рис. 17.

A_{n-2}, Y лежат в разных полуплоскостях, определенных прямой $A_{n-1}A_n$ (рис. 16, 17).

23. Пусть внутренние углы простого многоугольника $(A_1, A_2, \ldots, A_n, Z)$ при вершинах A_1, Z, A_n, A_{n-1} меньше 180°. Осуществим предельное преобразование $\Pi^{(n-1)}$ в направлении вектора $\overrightarrow{A_nY}$. Если $A_n\Pi^{(n-1)}$ лежит на отрезке $\overline{A_nZ}$,

то произойдет один из случаев, изображенных на рис. 18, 19, 20, 21, 22, которые легко решаются. Если же $A_n\Pi^{(n-1)}$ не лежит на отрезке $\overline{A_nZ}$, то существует $\tau \in J(\Pi^{(n-1)})$ такое, что $A_n\tau$ лежит между Y, Z и прямая XA_1 пересечет внутреннюю часть стороны $(\overline{A_{n-1}A_n})\tau$, что опять таки можно легко решить, так как $(X, A_1, \ldots, A_n)$ — типа Ω. Доказательство утверждения (A) закончено.

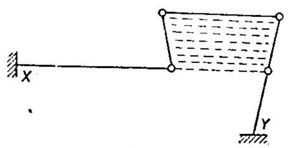

Рис. 18.

Доказательство утверждения (B).

Решим сначала случай (*u*). На полупрямой YA_n лежит кроме отрезка $\overline{A_nY}$

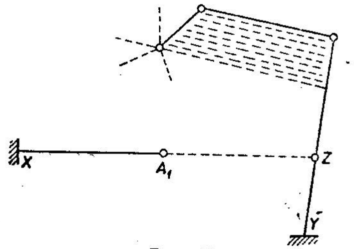

Рис. 19.

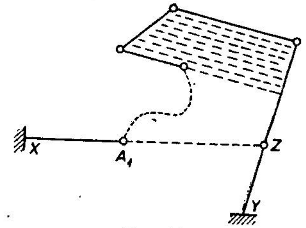

Рис. 20.

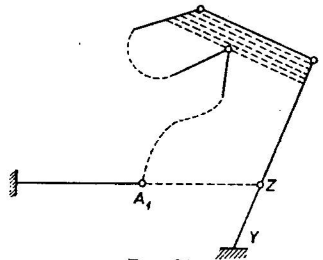

Рис. 21.

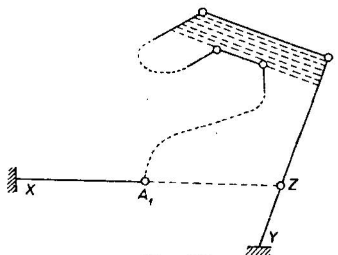

Рис. 22.

еще хотя бы одна другая точка сечения $\boldsymbol{P}$. Без ограничения общности можно предполагать, что таких точек только конечное число и никакая из них не является вершиной. Пусть U — та из них, которая является ближайшей к A_n. Существует i, $1 \leqq i \leqq n-2$ такое, что U лежит между A_i, A_{i+1}. Очевидно, $(U, A_n, A_{n-1}, \ldots, A_{i+1})$ — простой многоугольник, внутренний угол которого при вершине U — меньше 180°. Согласно лемме 2 могут произойти два случая. Либо существует число i', $i < i' < n$ и треугольник (U, B, C) такие, что $B \in \overline{UA_{i+1}}$, $C \in \overline{UA_n}$, $\overrightarrow{BC}$ — одинаково направлен и параллелен вектору $\overrightarrow{A_{i'}A_{i'+1}}$ (рис. 23) и линии $(A_i, A_{i+1}, \ldots, A_{i'}, A_{i'+1})$, $(A_{i'}, A_{i'+1}, \ldots, A_n, Y)$ — типа Ω, либо существует выпуклый четырехугольник (U, B, C, D) и числа i', j', $i < i' < j' < n$ такие, что $B \in \overline{UA_{i+1}}$, $D \in \overline{UA_n}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ одинаково направлены и параллельны $\overrightarrow{A_{i'}A_{i'+1}}, \overrightarrow{A_{j'}A_{j'+1}}$, четырехугольник (U, B, C, D) содержит внутреннюю часть параллелограмма, определенного отрезками $\overline{UB}, \overline{UD}$ (рис. 24) и линии $(A_i, A_{i+1}, \ldots, A_{i'}, A_{i'+1}), (A_{i'}, A_{i'+1}, \ldots, A_{j'}, A_{j'+1}), (A_{j'}, A_{j'+1}, \ldots, A_n, Y)$ — типа Ω. Очевидно, точки соответственно B, C и B, C, D

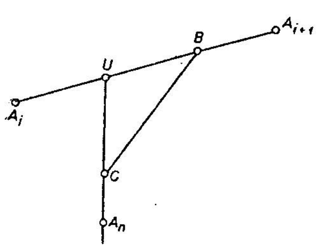

Рис. 23.

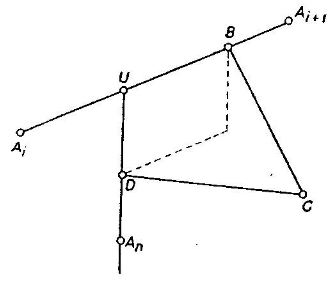

Рис. 24.

можно выбирать так, чтобы линия соответственно $\bar{\mathbf{P}}_1 = (X, A_1, \ldots, A_i, B, C, Y)$ и $(X, A_1, \ldots, A_i, B, C, D, Y)$ была сечением. Обозначим через $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2$ $(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3)$ линии типа Ω_∞, параллельные указанным линиям. Легко докажется, что линия $(X, A_1, \ldots, A_i, A_{i+1})$ — типа Ω (параллельную ей линию типа Ω_∞ обозначим через $\mathbf{R}$).

Будем строить сначала преобразование τ для случая $A_iA_{i+1} \nparallel XA_1$. Очевидно, существует 3-ломаное (4-ломаное) сечение $\mathbf{Q} = (X, V', B', C', Y)$ $(\mathbf{Q} = (X, V', B', C', D', Y))$ такое, что векторы $\overrightarrow{XV'}, \overrightarrow{V'B'}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{C'Y}$ $(\overrightarrow{XV'}, \overrightarrow{V'B'}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{C'D'}$

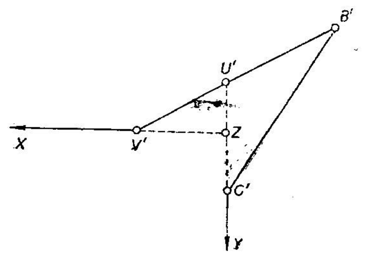

Рис. 25.

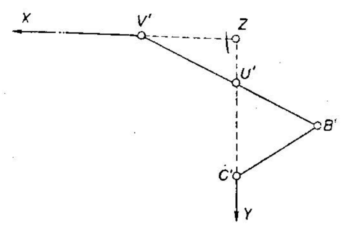

Рис. 26.

$\overrightarrow{D'Y})$ одинаково направлены и параллельны векторам $\overrightarrow{XA_1}, \overrightarrow{UB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CY}$ $(\overrightarrow{XA_1}, \overrightarrow{UB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DY})$, точка $C'(D')$ лежит внутри отрезка $\overline{ZY}$, прямая YZ пересечет в обоих случаях отрезок $\overline{V'B'}$ в внутренней точке (обозначим его через U') (рис. 25, 26, 27, 28).

Вложим теперь линию $\mathbf{R}$ (достаточно малую) в вершину V' сечений $\mathbf{Q}$ и (X, V', U', Y). Новые сечения обозначим через $\bar{\mathbf{P}}_3, \bar{\bar{\mathbf{P}}}_2$. Обозначим дальше через $\bar{\bar{\mathbf{P}}}_1$ сечение $(X, A_1, \ldots, A_i, U, Y)$ (рис. 29). Так как $\bar{\bar{\mathbf{P}}}_1, \bar{\bar{\mathbf{P}}}_2$ параллельны и число их сторон меньше n, то согласно предположениям существует пре-

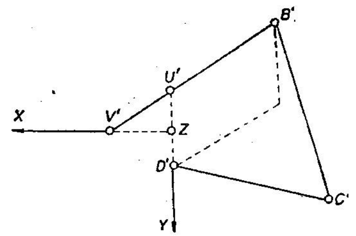

Рис. 27.

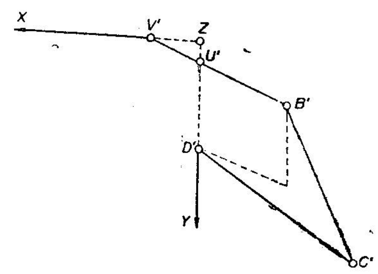

Рис. 28.

образование $\bar{\bar{\tau}}_2$ сечения $\bar{\bar{\mathbf{P}}}_1$ такое, что $\bar{\bar{\mathbf{P}}}_1\bar{\bar{\tau}}_2 = \bar{\bar{\mathbf{P}}}_2$. Дальше, очевидно, что $U\bar{\bar{\tau}}_2 = U'$. Вершины B, C (B, C, D) сечения $\bar{\mathbf{P}}_1$ можно выбрать так, чтобы они находились внутри $K(U, \varepsilon)$, где ε — число, соответствующее по лемме 4 вершине U и преобразованию $\bar{\bar{\tau}}_2$. Построим сечение $\bar{\mathbf{P}}_2$ (рис. 30), параллельное $\bar{\mathbf{P}}_1$ так, что в вершину U' сечения $\bar{\bar{\mathbf{P}}}_2$ вложим линию, параллельную (A_i, B, C, Y) $((A_i, B, C, D, Y))$ и такую, что нововложенные вершины лежат внутри $K(U', \varepsilon)$. Из леммы 5 вытекает существование преобразования $\bar{\tau}_2$ такого, что $\bar{\mathbf{P}}_1\bar{\tau}_2 = \bar{\mathbf{P}}_2$. Далее видно, что существует преобразование $\bar{\tau}_3$ такое, что $\bar{\mathbf{P}}_2\bar{\tau}_3 = \bar{\mathbf{P}}_3$ (рис. 30). Построим теперь из сечений $\bar{\mathbf{P}}_1, \bar{\mathbf{P}}_3$ новые сечения $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_3$ так, что в соответствую-

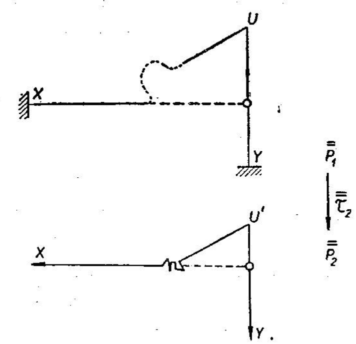

Рис. 29.

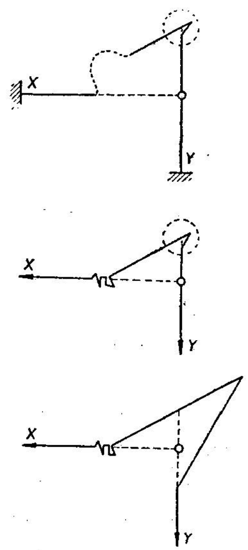

Рис. 30.

щие вершины сечений $\bar{P}_1, \bar{P}_3$ вложим линии R_1, R_2 (R_1, R_2, R_3) (рис. 31). Очевидно, P_1, P_3 параллельны P и согласно лемме 5 существует преобразование $\tau_2\tau_3$ такое, что $P_1\tau_2\tau_3 = P_3$. Так как сечения P, P_1 имеют общую нулевую сторону, то по предположениям существует преобразование τ_1 такое, что $P\tau_1 = P_1$. Положим $\tau = \tau_1\tau_2\tau_3$, и мы готовы. Аналогично поступаем в случае $A_iA_{i+1} \parallel XA_1$.

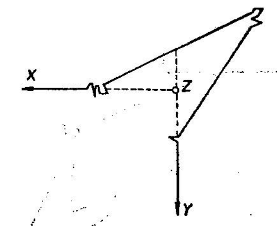

Рис. 31.

Решим теперь случай (v). На полупрямой XZ лежит кроме стороны $\overline{XA_1}$ и точки Z еще другие точки сечения P. Элементарным преобразованием можно добиться того, что этих точек будет только конечное число и никакая из них

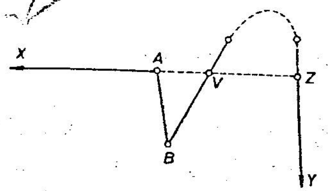

Рис. 32.

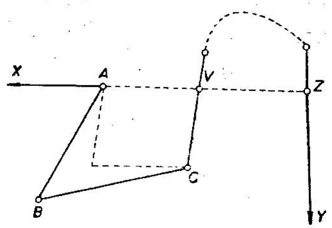

Рис. 33.

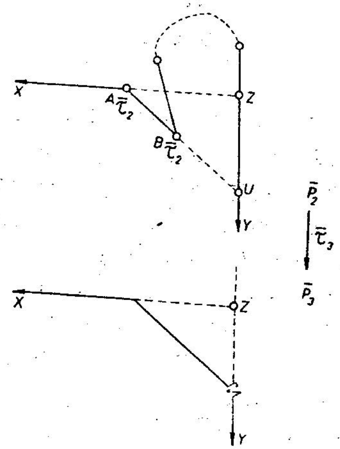

Рис. 34.

не будет вершиной. Пусть V — ближайшая из этих точек к точке A_1. Очевидно, V лежит между A_1, Z и существует число i, $1 < i < n$ такое, что V лежит внутри $\overline{A_iA_{i+1}}$.

Простой многоугольник ($V, A_1, \ldots, A_i$) имеет угол при вершине V меньше $180°$. Согласно лемме 2 существует число i', $1 \leqq i' < i$ (числа i', j', $1 \leqq i' < j' < i$) и треугольник (A, B, V) (выпуклый четырехугольник (A, B, C, V)) со свойствами, указанными в лемме 2 (рис. 32, 33). Построим сечение $\bar{\bar{P}}_1 = (X, V, A_{i+1}, \ldots, A_n, Y)$. Это сечение мы „стянем“ в достаточно малую окрестность точки Z (преобразованием $\bar{\bar{\tau}}_2$). В соответствующие вершины сечений $\bar{\bar{P}}_1, \bar{\bar{P}}_2 = \bar{\bar{P}}_1\bar{\bar{\tau}}_2$ вложим треугольник (четырехугольник). Новые сечения обозначим через $\bar{P}_1, \bar{P}_2$. Согласно лемме 5 существует преобразование $\bar{\tau}_2$ такое, что $\bar{P}_2 = \bar{P}_1\bar{\tau}_2$. Рас-

суждениями, аналогичными рассуждениям в случае (u), построим преобразование τ (см. рис. 34—37). Утверждение (B) доказано.

Доказательство утверждения (D): Пусть $\mathfrak{N} \neq \emptyset$. Это означает, что внутри отрезка $\overline{A_1B_1}$ существует непустое множество точек, принадлежащих сечению Q. Пусть Z — та из этих точек, которая находится ближе всего к точке B_1. Очевидно, существует число l, $1 < l$, такое, что Z лежит внутри l-той стороны сечения Q. Очевидно, точки $B_1, B_2, \ldots, B_l, Z$ образуют простой многоугольник (обозначим его T), который полностью лежит в J (рис. 38). Внутренние углы многоугольника T при вершинах B_1, Z, очевидно — меньше $180°$. Дальше, легко видеть, что линия ($X, B_1, \ldots, B_l, B_{l+1}$) — типа Ω (параллельную ей линию типа Ω_∞ обозначим R). Если вложить линию R в вершину Z сечения

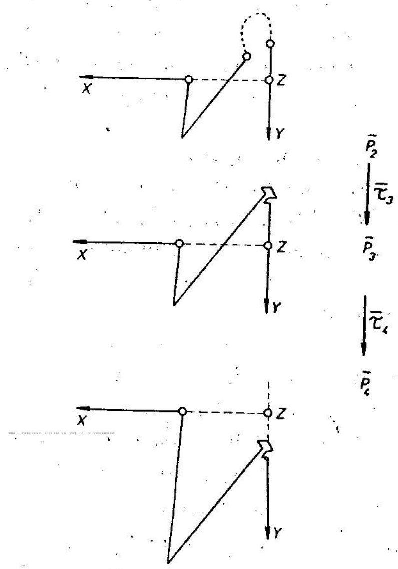

Рис. 35.

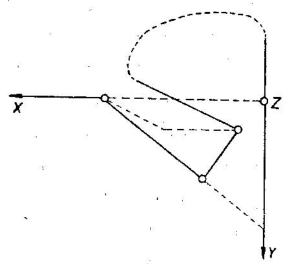

Рис. 36.

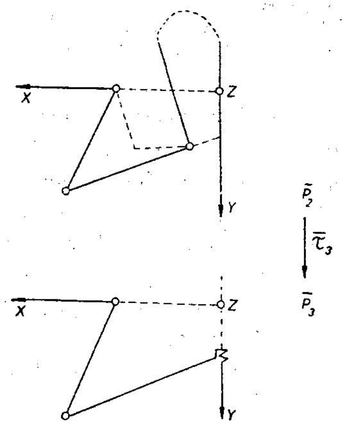

Рис. 37.

$Q^{(1)} = (X, Z, B_{l+1}, B_{l+2}, \ldots, Y)$, то получим сечение (обозначим его Q_1), параллельное Q, которое имеет с Q общую последнюю сторону — значит, их можно преобразованием перевести друг в друга. Пара $P, Q^{(1)}$ хорошо расположена, $\mathfrak{M}^{(1)} \subset \mathfrak{M}$, но $(0, l) \notin \mathfrak{N}^{(1)}$. Так продолжаем до тех пор, пока из $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{S}$ не будут удалены все элементы. Тем самым мы построим сечения $\bar{P}, \bar{Q}$.

Доказательство утверждения (D) закончено, и тем самым и доказательство нашей теоремы.

Следствие. *Пусть $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}'$ — два параллельных простых плоских многоугольника. Тогда существует конечная последовательность $\{\boldsymbol{R}_i\}_{i=1}^{k}$ простых многоугольников такая, что $\boldsymbol{R}_1 \equiv \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}_k \equiv \boldsymbol{R}'$ и $\boldsymbol{R}_{i+1}$ получается из $\boldsymbol{R}_i$ элементарным переносом некоторой его стороны (т. е. $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}'$ можно преобразовать друг в друга).**

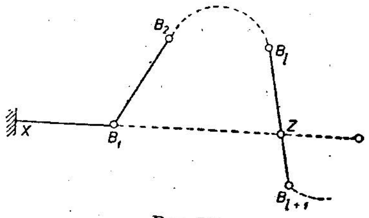

Рис. 38

Доказательство. Пусть соответствующие друг другу стороны простых многоугольников $\boldsymbol{R} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$, $\boldsymbol{R}' = (A_1', A_2', \ldots, A_n')$ параллельны и одинаково направлены, внутренний угол при вершине A_1 — меньше $180°$ и $A_1' \equiv A_1$. К многоугольнику $\boldsymbol{R}$ для вершины A_1 построим по лемме 2 параллельный ему многоугольник $\boldsymbol{S}$ со свойствами, указанными в лемме. Предположим, что $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}$ расположены так, что выполняется $A_1 \equiv A$, где $A \in \boldsymbol{S}$ — вершина, соответствующая вершине $A_1 \in \boldsymbol{R}$. Пусть $\boldsymbol{K}_1$ — окружность, которая в своей внутренней части содержит все три многоугольника $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}'$. Пусть $\boldsymbol{K}_1^\circ$ ($\boldsymbol{R}^\circ, \boldsymbol{S}^\circ, \boldsymbol{R}'^\circ$) означает внутреннюю часть окружности $\boldsymbol{K}_1$ (многоугольников $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{R}'$) и пусть $\bar{\boldsymbol{R}}^\circ, \bar{\boldsymbol{S}}^\circ, \bar{\boldsymbol{R}}'^\circ$ — замыкания этих внутренних частей.

Рассмотрим пару многоугольников $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}$. Множество $\boldsymbol{K}_1^\circ - (\bar{\boldsymbol{R}}^\circ \cup \bar{\boldsymbol{S}}^\circ)$ открыто и оно состоит из конечного числа связных компонентов. Обозначим через $\mathscr{J}_1$ тот из этих компонентов, для которого окружность $\boldsymbol{K}_1$ является частью его границы. Очевидно, $\mathscr{J}_1$ — вдвойне связная область. Из свойства многоугольника $\boldsymbol{S}$ следует, что точка A_1 лежит на его границе. Очевидно, существует простая ломаная линия $\boldsymbol{P}$, соединяющая точку A_1 с произвольной наперед выбранной точкой окружности $\boldsymbol{K}_1$ и такая, что за исключением этих концов лежит полностью внутри $\mathscr{J}_1$. Дальше, очевидно, существует окружность $\boldsymbol{K}_2$ с центром A_1 такая, что полностью лежит внутри $\boldsymbol{K}_1$ и множество $\bar{\boldsymbol{K}}_2^\circ$ не содержит кроме участков внутренних частей обеих соседних сторон многоугольников $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}$ и участка внутренней части стороны линии $\boldsymbol{P}$, никаких других точек линий $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P}$ (точки пересечения окружности $\boldsymbol{K}_2$ со сторонами $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_1A_n}$ обозначим через X, Y). Обозначим $\mathscr{J} = \boldsymbol{K}_1^\circ - (\bar{\boldsymbol{K}}_2^\circ \cup \boldsymbol{P})$. Очевидно, $\mathscr{J}$ — односвязная область, X, Y — две различные точки ее границы и $\boldsymbol{R}_1 = (X, A_2, \ldots, A_n, Y)$, $\boldsymbol{S}_1 = (X, B_2, \ldots, B_n, Y)$ — два параллельных сечения множества $\mathscr{J}$ из X в Y. Согласно нашей теореме, $\boldsymbol{R}_1$ можно преобразовать в $\boldsymbol{S}_1$. Указанное

* См. V. Polák: O jisté transformaci jednoduchých rovinných mnohoúhelníků. Matematicko-fyzikálny časopis SAV X, 2, 1960, 81—98.

преобразование является также преобразованием τ_1 многоугольника $\boldsymbol{R}$ и имеет место $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{R}\tau_1$. Вполне аналогичным способом построим преобразование τ_2 такое, что $\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{S}\tau_2$. Положим $\tau = \tau_1\tau_2$, и мы готовы. Утверждение доказано.

Поступило 11. 1. 1960 г.

Katedra matematiky
Přírodovědecké fakulty
Masarykovy university
v Brně

ON A CERTAIN TRANSFORMATION OF SIMPLE POLYGONAL LINEX IN THE PLANE

Václav Polák

Summary

In the (Euclidean) plane let J be a simple connected region and let X, Y be two points on its boundary, further $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ two parallel cuts of the region J going from X to Y (that means $\boldsymbol{P}$ and $\boldsymbol{Q}$ are two simple polygonal lines joining the points X and Y entirely lying in J except their two ends X, Y and $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ have the same number of vertices and corresponding oriented sides are concured parallel).

Let us make a parallel transformation of an arbitrary side of the cut $\boldsymbol{L}$ in J from X to Y so, that all polygonal lines formed during this transformation are parallel simple and all are cuts of J from X to Y. The resulting cut we denote $\boldsymbol{L}_\tau$, the respective transformation τ is said to be elementary transformation of $\boldsymbol{L}$.

It is proved that it is olways possible to transform $\boldsymbol{P}$ into $\boldsymbol{Q}$ by means of a finite number of elementary transformations.