О НЕКОТОРЫХ ПОДГРУППАХ l-ГРУПП

МАРИА ЯКУБИКОВА (Mária Jakubíková), Кошице

В монографии Сузуки [4] исследованны свойства частично упорядоченного множества M образованного всеми подгруппами данной группы G (отношение частичного упорядочения притом равно множественному включению.). Специально в [4] рассматривались условия, которые должна исполнить группа G, чтобы M была структура с определенными свойствами (напр. дистрибутивная структура, дедекиндовая структура, структура испольняющая некоторые условия для цепей, и т. п.). Аналогическая проблематика может быть исследована для частично упорядоченной группы G, и специально для структурно упорядоченной группы (l-группы). Пусть G—l-группа. Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$\mathscr{G}$: множество всех подгрупп (абстрактной) группы G,*
$\mathscr{L}$: множество всех l-подгрупп l-группы G,
$\mathscr{K}$: множество всех выпуклых подгрупп l-группы G,
$\mathscr{K}'$: множество всех выпуклых l-подгрупп l-группы G.

Каждое из множеств $\mathscr{G}, \mathscr{L}, \mathscr{K}, \mathscr{K}'$ мы считаем частично упорядоченным с помощью множественного включения. Мы докажем некоторые теоремы касающиеся свойств частично упорядоченных множеств $\mathscr{K}'$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{L}$. Теорема 1. 10 является обобщением одной теоремы Г. Биркгоффа ([1], кап. 14, теорема 10).

Припомним некоторые определения. Предположим, что $G = G(\leqq)$ — частично упорядоченное множество (отношение частичного упорядочения в G обозначим символом $\leqq$) и что на G определена бинарная операция $+$ так, что $G(+)$ является группой. (Операция $+$ может не быть коммутативной.) Единицу группы G обозначим 0. Пусть далее для любых элементов $x, y, z \in G$ имеет место $x + z \leqq y + z \Leftrightarrow x \leqq y$, $z + x \leqq z + y \Leftrightarrow x \leqq y$. При этих предположениях G называется частично упорядоченной группой. Если притом $G(\leqq)$ является структурой, тогда $G(\leqq, +)$ называется структурно упорядоченной группой (l-группой). В таком случае обозначим структурные операции в G через $\cap$, $\cup$. В дальнейшем мы предполагаем, что G — l-группа. Множество $A \subset G$ называется l-подгруппой в G, если A — подгруппа в $G(+)$ и одновременно A — подструктура в $G(\leqq)$. Подмножество $A \subset G$ выпуклое (в G), если для

* Иногда мы будем писать более подробно $\mathscr{G}(G)$ вместо $\mathscr{G}$; и аналогически для символов $\mathscr{L}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{K}'$.

любых элементов $x, y, z \in G$ из соотношений $x, y \in A$, $x \leqq z \leqq y$ вытекает $z \in A$. В следующем мы используем некоторые фундаментальные свойства l-групп ([1], кап. 14, §1, §4) без особых ссылок. Символы $\cap, \cup$ обозначают множественное пересечение и множественную сумму. G^+ соотв. G^- — множество всех элементов $x \in G$, исполняющих неравенство $x \geqq 0$ соотв. $x \leqq 0$. (Очевидно $G^- = \{x | x \in G, -x \in G^+\}$.) Пусть S — полная структура, $S_1 \subset S$. S_1 называется полной подструктурой в S, если для каждого подмножества $A \subset S_1$ имеет место $\sup A \in S_1$, $\inf A \in S_1$ (символы sup, inf здесь относятся к структуре S). Мы будем пользоваться следующим простым утверждением о подмножествах структур.

(T) Пусть S — структура, $A \subset B \subset S$. Если в S имеет место $\sup A = m$ и если $m \in B$, тогда тоже $\sup(B) A = m$. (Символ $\sup(B)$ обозначает супремум относительно к частично упорядоченному множеству B.) Аналогическое утверждение имеет место для инфимума.

§ 1. Частично упорядоченное множество $\mathscr{K}'$

1.1. *Всякое из частично упорядоченных множеств $\mathscr{G}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{K}'$ является полною структурой, в которой структурное пересечение равняется множественному пересечению.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{H}$ любое множество из множеств $\mathscr{G}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{K}'$, $\{A_i\} \subset \mathscr{H}$. Пусть S — система всех подмножеств множества G (частично упорядоченная с помощью множественного включения). Так как $\cap A_i \in \mathscr{H}$, то согласно (T) $\inf(\mathscr{H})\{A_i\} = \cap A_i$. Так как $\mathscr{H}$ обладает наибольшим элементом (т. е. G), $\mathscr{H}$ — полная структура.

Структурную операцию $\inf(\mathscr{H})$ будем в каждой структуре $\mathscr{H}$ обозначать символом $\wedge$, структурную операцию $\sup(\mathscr{H})$ обозначим $\vee(\mathscr{H})$. (Если из связанности будет явно вытекать о какой структуре речь идет, тогда мы будем писать только $\vee$.)

1.2. *Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n \in G^+$, $x \in G^+$, $x \leqq z_1 + z_2 + \ldots + z_n$. Тогда существуют элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ так, что $0 \leqq x_i \leqq z_i$ для $i = 1, \ldots, n$, $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.*

Доказательство. Утверждение вытекает при помощи математической индукции из [1], гл. XV, лемма 3 (стр. 245).

1.3. *Пусть $\{A_i\} \subset \mathscr{K}'$, $\{A_i\} \neq \emptyset$. Тогда $\vee(\mathscr{G})\{A_i\} \in \mathscr{K}'$.*

Доказательство. Обозначим $\vee(\mathscr{G})\{A_i\} = B$, пусть $b_1, b_2 \in B$. Тогда существует конечное число выпуклых l-подгрупп $A_{1,j}, A_{2,k} \in \{A_i\}$ $(j = 1, \ldots, n;$ $k = 1, \ldots, m)$ так, что для удобно выбранных элементов $z_{1,j} \in A_{1,j}$, $z_{2,k} \in A_{2,k}$ имеют место уравнения

$$b_1 = z_{1,1} + z_{1,2} + \ldots + z_{1,n}$$
$$b_2 = z_{2,1} + z_{2,2} + \ldots + z_{2,m}.$$

(Легко узнать, что можно предполагать $n = m$, $A_{1,i} = A_{2,i}$ для $i = 1, \ldots n$. Если, например, $b_1 = a + b + c$, $b_2 = d + e$, где всякий из элементов a, b, c, d, e находится в некотором из множеств A_i, тогда можно выбрать $n = 5$ и положить $b_1 = a + b + c + 0 + 0$, $b_2 = 0 + 0 + 0 + d + e$. В дальнейшей трактовке приведенное предположение считается выполненным.)

а) Докажем, что B — выпуклое подмножество в G. Пусть $z \in G$, $b_1 \leqq z \leqq b_2$. Тогда

$$0 \leqq z - b_1 \leqq b_2 - b_1 = z_{2,1} + z_{2,2} + \ldots + z_{2,n} - z_{1,n} - z_{1,n-1} - \ldots -$$
$$- z_{1,1} \leqq |z_{2,1}| + |z_{2,2}| + \ldots + |z_{2,n}| + |z_{1,n}| + |z_{1,n-1}| + \ldots + |z_{1,1}|.$$

По 1.2. существуют элементы $x_{1,i}, x_{2,i} (i = 1, \ldots, n)$, такие, что имеют место соотношения:

(1) $0 \leqq x_{1,i} \leqq |z_{1,i}|, \qquad 0 \leqq x_{2,i} \leqq |z_{2,i}|,$

(2) $z - b_1 = x_{2,1} + x_{2,2} + \ldots + x_{2,n} + x_{1,n} + x_{1,n-1} + \ldots + x_{1,1}.$

Так как A_i — выпуклые l-подгруппы в G, $|z_{1,i}|, |z_{2,i}| \in A_i (i = 1, \ldots, n)$, вследствие чего по (1) тоже $x_{1,i}, x_{2,i} \in A_i$, и, следовательно, по (2) тоже $z - b_1 \in B$, поэтому $z \in B$.

б) В дальнейшем докажем, что B является l-подгруппой в G. Обозначим

$$b_3 = -|z_{1,1}| - |z_{1,2}| - \ldots - |z_{1,n}| - |z_{2,1}| - |z_{2,2}| - \ldots - |z_{2,n}|,$$
$$b_4 = |z_{1,1}| + |z_{1,2}| + \ldots + |z_{1,n}| + |z_{2,1}| + |z_{2,2}| + \ldots + |z_{2,n}|.$$

Элементы b_3, b_4 являются элементами множества B. Далее $b_1, b_2 \in \langle b_3, b_4 \rangle$, и, таким образом, тоже элементы $b_1 \cap b_2$, $b_1 \cup b_2$ находятся в этом интервале. Однако по а) $\langle b_3, b_4 \rangle \subset B$, следовательно $b_1 \cap b_2 \in B$, $b_1 \cup b_2 \in B$.

1.4. Теорема. *Структура $\mathscr{K}'$ является полной подструктурой в каждой из структур $\mathscr{G}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{K}$.*

Доказательство. Пользуемся одинаковыми предположениями и обозначениями как в случае 1.3. Пусть $\mathscr{H}$ будет любая из структур $\mathscr{G}, \mathscr{L}, \mathscr{K}$. По 1.3 — $\vee(\mathscr{G})\{A_i\} \in \mathscr{H}$, следовательно по (T) $\vee(\mathscr{G})\{A_i\} = \vee(\mathscr{H})\{A_i\}$. Из этого равенства и из 1.1. вытекает доказываемое утверждение.

Замечание. Если G — коммутативная l-группа, тогда $\mathscr{G}$ дедекиндова структура (ср. напр., Курош [2], стр. 285), вследствие чего в этом случае $\mathscr{K}'$ является модулярной структурой. Обобщение этого утверждения приведем в абз. 1.10.

1.5. *Пусть A — подгруппа в G, пусть для всякого a_1, a_2 а $G^+ \cap A$ имеет место $a_1 \cup a_2 \in A$. Пусть A будет направленным по убыванию множеством (относительно к частичному упорядочению, данному отношением $\leqq$). Тогда A является l-подгруппой в G.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2 \in G^+ \cap A$. Из уравнения $(a_1 \cup a_2) - a_1 = a_2 - (a_1 \cap a_2)$ (ср. [1], стр. 219, теорема 4) вытекает по предложению $a_1 \cap a_2 \in A$. Пусть $b_1, b_2 \in A$. По предложению существует $b_3 \in A$ так, что $b_3 \leqq b_1, b_3 \leqq b_2$. Положим $c_1 = b_1 - b_3$, $c_2 = b_2 - b_3$. Тогда $c_1, c_2 \in G^+ \cap A$, $(b_1(op)\, b_2) - b_3 = c_1(op)\, c_2$, где (op) является любой из операций $\cap, \cup$. Из последнего уравнения и из выше доказанного вытекает $b_1(op)\, b_2 \in A$.

Замечание. В предыдущей лемме нельзя выбросить предлопожение о том, что A является направленным по убыванию множеством.

1.6. *Пусть $x, y \in G$, $x > 0$, $y > 0$, $x \cap y = 0$. Пусть G_1 множество всех элементов $z \in G$ вида $z = mx + ny$, где m, n целые числа. Тогда G_1 является l-подгруппой в G.*

Доказательство. Из отношения $x \cap y = 0$ вытекает $x + y = x \cup y = y + x$, и, таким образом, G_1 является подгруппой в G. Пусть $z_i = m_i x + n_i y$, $i = 1,2$. Обозначим $n_3 = \min\{n_1, n_2\}$, $n_4 = \max\{n_1, n_2\}$, и пусть символы m_3, m_4 имеют аналогическое значение. Элемент $m_3 x + n_3 y$ является нижней гранью множества $\{z_1, z_2\}$, и, таким образом, G_1 является направленным по убыванию множеством.

Пусть $z_1 \geqq 0$. Тогда, очевидно не может быть одновременно $m_1 < 0, n_1 < 0$. Пусть $m_1 \leqq 0$. Тогда $n_1 \geqq 0$, вследствие чего $n_1 y \geqq (-m_1)\, x$. Однако, из отношения $x \cap y = 0$ для любых не отрицательных целых чисел n, m вытекает $mx \cap ny = 0$, поэтому по предыдущему неравенству $m_1 = 0$. Если таким образом, $z_1 \geqq 0$, потом должно быть $m_1 \geqq 0$, и аналогически $n_1 \geqq 0$.

Пусть $z_1 \geqq 0$, $z_2 \geqq 0$. Тогда $z_1 \cup z_2 = (m_1 x + n_1 y) \cup (m_2 x + n_2 y) = (m_1 x \cup n_1 y) \cup (m_2 x \cup n_2 y) = m_4 x \cup n_4 y = m_4 x + n_4 y$, и, следовательно, $z_1 \cup z_2 \in G_1$. По 1.5. тем и утверждение доказано.

1.7. Теорема. *Пусть l-группа G не будет упорядоченной. Тогда множества $\mathscr{L}$, $\mathscr{K}$ не являются подструктурами в структуре $\mathscr{G}$.*

Доказательство. Так как G не упорядоченная группа, существуют в G не сравнимые элементы x_1, y_1. Обозначим $x = x_1 - (x_1 \cap y_1)$, $y = y_1 - (x_1 \cap y_1)$; тогда $x > 0$, $y > 0$, $x \cap y = 0$. Пусть G_1 имеет одинаковое значение как в абз. 1.6. Пусть $a = x + 2y$, $b = 2x + y$, пусть A соотв. B соотв. C является множеством всех элементов вида na соотв. mb соотв. $na + mb$, где n, m — целые числа. Тогда A, B — подгруппы в G; одновременно A, B — упорядоченные множества, и, таким образом, они l-подгруппы в G. Имеет место $C = \vee(\mathscr{G})\,\{A, B\}$. Однако C не является l-подгруппой в G, так как,

напр. элемент $x + y = a \cap b$ не принадлежит к множеству C, и, таким образом, $\vee(\mathscr{L})\,\{A, B\} \neq \vee(\mathscr{G})\,\{A, B\}$, из чего вытекает, что $\mathscr{L}$ не является подструктурой в $\mathscr{G}$.

Пусть $v = 2x - 2y$, пусть V будет множество всех элементов вида mv, где m целое число. Пусть A' теоретикомножественная сумма интервалов $\langle -nx, nx \rangle$, где n пробегает множество всех натуральных чисел. Пусть W будет множеством всех элементов вида $a_1 + v_1$, где $a_1 \in A'$, $v_1 \in V$. Для любых таких элементов имеем $|a_1| \cap |v_1| = 0$; из этого вытекает равенство $a_1 + v_1 = v_1 + a_1$, и, таким образом, W является подгруппой в G. Тогда, очевидно, $W = \vee(\mathscr{G})\,\{A', V\}$. Каждый элемент $v_1 \in V$, $v_1 \neq 0$ не сравнимый с элементом 0, и, следовательно, всякие два разные элемента из множества V взаимно не сравнимы. Из этого вытекает, что V — выпуклая подгруппа в G. Очевидно, A' выпуклая l-подгруппа в G. Так как $2x \in A'$, $v \in V$, $2x - (2x - 2y) = 2y > y > 0$, имеет место $y \in \vee(\mathscr{K})\,\{A', V\}$. Предположим, что было бы $y \in W$. Тогда существовал бы элемент $z \in A'$ и целое число m так, что $y = z + m(2x - 2y)$; далее существовало бы натуральное число n такое, что $-nx \leqq z \leqq nx$. Из предыдущих отношений получается:

$$(1 + 2m)\, y = z + 2mx,$$

$$-lx \leqq (1 + 2m)\, y \leqq lx,$$

где $l = n + 2|m|$. Обозначим $|1 + 2m| = k$. Тогда $S > 0$ и из предыдущего неравенства получается $-lx \leqq ky \leqq lx$, и следовательно, тоже $l > 0$, $ky \cap lx = ky$. Однако из отношения $x \cap y = 0$ вытекает для любых натуральных чисел k_1, l_1 равенство $k_1 y \cap l_1 x = 0$, что не возможно. Таким образом $y \notin W$, $W \neq \vee(\mathscr{K})\,\{A', V\}$ и $\mathscr{K}$ не является подструктурой в $\mathscr{G}$.

1.8. *Пусть $A, B \in \mathscr{K}'$, $A^+ \subset B^+$. Тогда $A \subset B$.*

Доказательство. Из отношения $A^+ \subset B^+$ вытекает $A^- \subset B^-$; так как $-a \cap 0 \leqq a \leqq a \cup 0$ для любого $a \in A$, и так как B — выпуклое подмножество в G, получается $a \in B$, т. е. $A \subset B$.

Замечание. Для множества $\mathscr{K}$ аналогическое утверждение не имеет места.

1.9. *Пусть $\{A_i\} \subset \mathscr{K}'$, $\{A_i\} \neq \emptyset$, $B = \vee\{A_i\}$,* $b_2 \in B, b_2 > 0$. Тогда существуют элементы $c_j (j = 1, \ldots, m)$, где m является подходящим натуральным числом, так, что $b_2 = c_1 + c_2 \ldots + c_m$, $c_j \geqq 0$ для $j = 1, \ldots, m$ и каждое c_j находится в некотором из множеств A_i.*

Доказательство. Достаточно положить в доказательстве утверждения 1.3, $b_1 = 0$, $z = b_2$ и иметь в виду уравнение (2).

* До конца § 1 пишется $\vee$ вместо $\vee\,(\mathscr{K}')$.

1.10. Теорема. *$\mathscr{K}'$ является дистрибутивной структурой.*

Доказательство. Предположим, что структура $\mathscr{K}'$ не дистрибутивная. Тогда в $\mathscr{K}'$ находятся l-группы A, B, C, U, V так, что выполнены соотношения $A \neq B$, $A \wedge C = B \wedge C = U$, $A \vee C = B \vee C = V$. Пусть $b \in B^+$. Тогда одновременно $b \in V = A \vee C$, таким образом, по 1.9 существуют элементы $a_1, \ldots, a_n \in A$, $c_1, \ldots, c_n \in C$ так, что $a_i \geqq 0$, $c_i \geqq 0$, $b = a_1 + c_1 + a_2 + c_2 + \ldots + a_n + c_n$. Из приведенных отношений вытекает $0 \leqq c_i \leqq b$, и следовательно, на основании выпуклости множества B, $c_i \in B$, $c_i \in B \cap C = B \wedge C = U = A \wedge C$, следовательно, $c_i \in A$. Таким образом тоже $b \in A$, $B^+ \subset A^+$, поэтому по 1.8 $B \subset A$. Аналогическим путем докажется $A \subset B$. Таким образом $B = A$, что не возможно.

Замечание. Если A, B — l-идеалы в G, тогда $A \cap B$ является l-идеалом в G и $\vee(\mathscr{G})\{A, B\}$ по 1.3 тоже l-идеал в G. Множество $\mathscr{J}$ всех l-идеалов в G, частично упорядоченные при помощи множественного включения является таким образом подструктурой структуры $\mathscr{K}'$. Из теоремы 1.10, таким образом, вытекает в качестве частного случая теорема 10, гл. XIV, [1], утверждающая следующие:

Множество всех l-идеалов l-группы G — дистрибутивная структура.

Обобщением предыдущей теоремы является:

1.11. Теорема. *Пусть $A \in \mathscr{K}'$, $\emptyset \neq \{A_i\} \subset \mathscr{K}'$. В $\mathscr{K}'$ имеет место следующий бесконечный дистрибутивный закон:*

$$A \wedge (\vee A_i) = \vee (A \wedge A_i).$$

Доказательство. Очевидно, $\vee(A \wedge A_i) \subset A \wedge (\vee A_i)$. Пусть $x \in A \wedge (\vee A_i)$ $x \geqq 0$. Тогда $x \in \wedge A_i$, и, следовательно, по 1.9 существуют элементы c_j, $c_j \geqq 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ так, что любой элемент c_j находится в некотором из множеств $A_i (c_j \in A_{i(j)})$ и, одновременно, $x = c_1 + c_2 + \ldots + c_m$. Так как $0 \leqq c_j \leqq x$ и так как A — выпуклое подмножество в G, $c_j \in A \wedge A_{i(j)}$, следовательно, $x \in \vee(A \wedge A_i)$. По 1.8 тогда $A \wedge (\vee A_i) \subset \vee (A \wedge A_i)$.

Замечание. Пусть G_1 — l-подгруппа полной l-группы G. Мы будем называть G_1 полной l-подгруппой в G, когда из соотношений $A \subset G_1$, $\sup A = m$ вытекает $m \in G_1$ (символ sup относится к частично упорядоченному множеству G).

1.12. Теорема. *Пусть G — полная l-группа, пусть A — полная l-подгруппа в G, $\emptyset \neq \{A_i\} \subset \mathscr{K}'$. Тогда выполняется уравнение:*

$$A \vee (\wedge A_i) = \wedge (A \vee A_i).$$

Доказательство. Очевидно $\wedge(A \vee A_i) \supset A \vee (\wedge A_i)$. Пусть $x \in \wedge(A \vee A_i)$, $x \geqq 0$. Так как $x \in A \vee A_i$ и G является коммутативной l-группой (см. [1], стр. 229) по 1.9 существуют для каждого A_i элементы $a^i \in A$, $a_i \in A_i$ так, что

$$x = a^i + a_i, \qquad a^i \geqq 0, \qquad a_i \geqq 0. \tag{3}$$

Пусть X — множество всех элементов $a \in A$, $a \leqq x$. Так как G полная l-группа, существует в G элемент $\sup X = a_0$, причем $a_0 \in A$, потому что A — полная l-подгруппа в G. Выразим элемент x в виде $x = a_0 + b$. Так как $a_0 \leqq x$, имеем $b \geqq 0$. По определению множества X для всякого a^i из (3) выполнено отношение $a^i \in X$, таким образом $a^i \leqq a_0$. Из уравнения $a^i + a_i = a_0 + b$ вытекает затем $b \leqq a_i$ и, следовательно, на основании выпуклости множеств A_i для каждого A_i выполняется $b \in A_i$, т. е. $b \in \wedge A_i$. Из уравнения $x = a_0 + b$ затем вытекает $x \in A \vee (\wedge A_i)$. Следовательно, $(\wedge(A \vee A_i))^+ \subset (A \vee (\wedge A_i))^+$. Для завершения доказательства достаточно применять 1.8.

1.13. *Существует коммутативная l-группа G, в которой для удобного $A \in \mathscr{K}'$, $\{A_i\} \subset \mathscr{K}'$ имеет место $A \vee (\wedge A_i) \neq \wedge (A \vee A_i)$.*

Пример. Пусть G множество всех функций, определенных на интервале $\langle 0,1 \rangle$, и непрерывных в точке 1; операция + и частичное упорядочение пусть будет в G определено обыкновенным способом. Пусть будет A множество всех $f \in G$, для которых $f(1) = 0$. Для каждого $y \in (0,1)$ пусть A_y будет множество всех $f \in G$, выполняющих для каждого $x \in \langle 0,1 \rangle$, $x < y$ отношение $f(x) = 0$. Тогда $\wedge A_y = \{0\}$,* $A \vee (\wedge A_y) = A$. Одновременно для каждого A_y $A \vee A_y = G$, следовательно $\wedge(A \vee A_y) = G$.

§ 2. Структура $\mathscr{K}$

2.1. Пусть G коммутативная частично упорядоченная группа. Если существует гомоморфное отображение $\varphi : G \to H$, где H – частично упорядоченная группа (причем гомоморфизм φ относится к групповой операции + и к частичному упорядочению, т. е. для любого $x, y \in G$ $(x + y)\varphi = x\varphi + y\varphi$, $x \leqq y \Rightarrow x\varphi \leqq y\varphi$), тогда множество $A = \{x : x \in G, x\varphi = 0\}$ является выпуклой подгруппой в G так, что $A\varphi = 0$. К всякой выпуклой подгруппе $C \subset G$, наоборот, существует частично упорядоченная группа H и гомоморфное отображение $\varphi_c : G \to H$ так, что $C\varphi_C = 0$. Пусть $R(\varphi)$ будет конгруенцией** на частично упорядоченной группе G, определенной гомоморфизмом φ (елементы $x, y \in G$ находятся в том же классе этой конгруэнции, когда $x\varphi = y\varphi$). Всякая конгруэнция R на G имеет вид $R = R(\varphi)$ для удобного гомоморфизма φ. Каждой выпуклой подгруппе $C \subset G$ отвечает одна и только одна конгруэнция R_C на G, в которой множество C образует один класс; и, наоборот, если R — конгруэнция на G, тогда класс в R,

---

* Символ 0 здесь обозначает единичный элемент группы G.

** Т. е. бинарное рефлексивное, симметрическое и транзитивное соотношение на G, причем для каждого $x, y, z \in G$ имеет место

a) $xRy \Rightarrow x + zRy + z$, b) xRy, $x \leqq z \leqq y \Rightarrow xRz$.

содержащий элемент 0, является выпуклой подгруппой в G. (Предыдущие утверждения вытекают из результатов работы [5], § 1.)

2.2. Пусть теперь G коммутативная l-группа. Множество всех конгруэнций на l-группе G (т. е. таких, при которых сохраняются операции $+$, $\cap$, $\cup$), обозначим $K(G)$. G может одновременно рассматриваться как частично упорядоченная группа; пусть $K_1(G)$ — множество всех конгруэнций на G как частично упорядоченной группе (т. е. в смысле абз. 2.1). Очевидно, $K(G) \subset K_1(G)$. Множества $K(G)$, $K_1(G)$ мы считаем частично упорядоченными (ср. [1], стр. 23). По [1], стр. 222 $K(G)$ изоморфное с частично упорядоченным множеством всех l-идеалов в G. Частично упорядоченное множество $K_1(G)$ по абз. 2.1 изоморфное с частично упорядоченным множеством $\mathscr{K}$. Значит, при изучении структуры $\mathscr{K}$ одновременно изучается (в случае коммутативности l-группы G) частично упорядоченное множество всех конгруэнций на частично упорядоченной группе G.

Частично упорядоченное множество $K(G)$, как известно, является дистрибутивной структурой. Если мы рассматриваем G как частично упорядоченную группу, получается существенно отличающееся положение. (В терминологии Мальцева [3] G в качестве l-группы является алгеброй, G как частично упорядоченная группа является алгебраической системой, но она не алгебра.) Структура $K_1(G)$ в общем не только не дистрибутивная, но и не дедекиндовая.

2.3. Теорема. *Пусть l-группа G не упорядочена. Тогда структура $\mathscr{K}$ не дедекиндовая.*

Доказательство. Пользуясь темже обозначением как в доказательстве теоремы 1.7, обозначим $t = x - y$ и пусть будет T множество всех элементов l-группы G, имеющих вид nt, где n является целым числом. Каждый элемент $t_1 \neq 0$ группы T не сравнимый с элементом 0, вследствие чего T — выпуклая подгруппа в G. Имеет место $V \subset T$, $V \neq T$ и так $\vee(\mathscr{K})\{A', V\} \subset \vee(\mathscr{K})\{A', T\}$. Очевидно $x \in \vee(\mathscr{K})\{A', V\}$. Из доказательства теоремы 1.7 получается $y \in \vee(\mathscr{K})\{A', V\}$, вследствие чего $t \in \vee(\mathscr{K})\{A', V\}$. Из последнего вытекает $T \subset \vee(\mathscr{K})\{A', V\}$, и так $\vee(\mathscr{K})\{A', T\} \subset \vee(\mathscr{K})\{A', V\}$, что относительно к предыдущему дает $\vee(\mathscr{K})\{A', T\} = \vee(\mathscr{K})\{A', V\}$. Для каждого $a \in A'$ имеем $|a| \cap y = 0$. Если $nt = nx - ny \in A'$, то $-ny \in A'$, $|n| y \cap y = 0$, значит $n = 0$. Следовательно, $A' \wedge V = A' \wedge T = \{0\}$. Выпуклые подгруппы $\{0\}$, A', V, T, $\vee(\mathscr{K})\{A', V\}$ образуют таким образом, подструктуру в $\mathscr{K}$, не являющуюся дедекиндовой.

Замечание. Возможно тоже формулировать следующий вопрос: Какое необходимое и достаточное условие, которое должна выполнять полная структура S, чтобы она была изоморфна с структурой $\mathscr{K}(G)$ для удобной l-группы G?

2.4. *Пусть G упорядоченная группа. Тогда $\mathscr{K} = \mathscr{K}'$ (и, следовательно, $\mathscr{K}$ является дистрибутивной структурой).*

Доказательство. Если G упорядоченная группа, тогда каждая подгруппа группы G является одновременно l-подгруппой в G, и, поэтому $\mathscr{K} = \mathscr{K}'$. По 1.10 $\mathscr{K}$ является дистрибутивной структурой.

2.5. *Пусть G упорядоченная группа. Тогда $\mathscr{K}$ является цепью.*

Доказательство. Пусть G — упорядоченная группа, $A, B \in \mathscr{K}$, $A \not\subset B$. Существует таким образом $a \in A$, $a \notin B$. Можно предполагать $a > 0$, (если $a < 0$, то мы рассматривали бы элемент $-a$). Пусть $b \in B$, $b > 0$. Не может быть $b \geqq a$ (в этом случае из выпуклости группы B следовало бы $a \in B$), поэтому $b \leqq a$, $b \in A$. И, таким образом, $B \subset A$.

Следствие. Если G упорядоченная группа, потом $\mathscr{K}$ является дистрибутивной структурой. (В отличии от в 2.4 мы в настоящем случае не пользовались теоремой 1.10)

2.6. Теорема. *Структура $\mathscr{K}$ является цепью тогда и только тогда, когда G — упорядоченная группа.*

Доказательство. Утверждение вытекает из 2.5 и 2.3.

2.7. *Пусть G упорядоченная группа. Структура $\mathscr{K}$ является структурой с дополнениями тогда и только тогда, если $\mathscr{K}$ содержит точно два элемента.*
Доказательство вытекает непосредственно из 2.6.

2.8. Теорема. *$\mathscr{K}$ является дедекиндовой структурой тогда и только тогда, когда G — упорядоченная группа. Если $\mathscr{K}$ — дедекиндовая структура, тогда $\mathscr{K}$ является дистрибутивной.*
Доказательство вытекает из 2.3 и 2.4.

2.9. Теорема. *Пусть G не является упорядоченной группой. Тогда $\mathscr{K}$ не выполняет условие убывающих цепей.*

Доказательство. Применим те же обозначения как в доказательствах теорем 1.7 и 2.3. Для каждого натурального числа n пусть будет T_n множество всех элементов вида $2^n mt$, где m пробегает все целые числа. Тогда T_n является выпуклой подгруппой в G, для $n_1 < n_2$ имеет место $T_{n_1} \neq T_{n_2}$, $T_{n_1} \supset T_{n_2}$.

2.10. Пусть A будет l-идеалом в l-группе G, пусть G_1 — l-фактор-группа G/A. Пусть B подгруппа в G. Рассмотрим соответствие $B \to \bar{B}$, где $\bar{B}$ — множество всех классов $\bar{x} = x + A$, причем $x \in B$. $\bar{B}$ очевидно является группой и приведенное соответствие определяет изоморфизм φ интервала $\langle A, G \rangle$ структуры $\mathscr{G}(G)$ на структуру $\mathscr{G}(G_1)$.

Пусть $B \in \mathscr{K}(G)$, $B \supset A$, $\bar{b}_1, \bar{b}_2 \in \bar{B}$, $\bar{x} \in G_1$, $\bar{b}_1 \leqq \bar{x} \leqq \bar{b}_2$. Тогда $\bar{b}_1 = \overline{b_1 \cap x}$,

$\bar{b}_2 = \overline{\bar{b}_2 \cup x}$ и, следовательно, $\bar{b}_1 \cap x$, $\bar{b}_2 \cup x \in B$, из чего вытекает $x \in B$, $\bar{x} \in \bar{B}$, $\bar{B} \in \mathscr{K}(G_1)$. Наоборот, пусть $\bar{B} \in \mathscr{K}(G_1)$, $B \supset A$, $\varphi(B) = \bar{B}$, b_1, $b_2 \in B$, $x \in G$, $b_1 \leqq x \leqq b_2$. Тогда $\bar{b}_1 \leqq \bar{x} \leqq \bar{b}_2$, и, следовательно, $\bar{x} \in \bar{B}$, $x \in B$, $B \in \mathscr{K}(G)$. Подобным способом можно доказать: $B \in \mathscr{L}(G)$ тогда и только тогда, когда $\bar{B} \in \mathscr{L}(G_1)$. Из предыдущего рассуждения вытекает:

Пусть $\mathscr{H}$ любой символ из $\mathscr{L}$, $\mathscr{K}$, $\mathscr{K}'$. Тогда

$$\varphi(\mathscr{H}(\mathscr{G}) \cap \langle A, G\rangle) = \mathscr{H}(G_1).$$

2.11. Теорема. *Пусть G будет коммутативной l-группой, $A, B \in \mathscr{K}'(G)$. Пусть $I = \langle A, B\rangle$ — интервал в структуре $\mathscr{K}(G)$. Если I не является цепью, тогда I содержит бесконечную убывающую цепь $B = B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset A$, $B_i \neq B_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$*

Доказательство. Обозначим $G_1 = B/A$. По 2.10 существует изофорфизм φ_1 интервала I на структуру $\mathscr{K}(G_1)$. Пусть I не будет цепью. Тогда ни $\mathscr{K}(G_1)$ не является цепью, следовательно, по 2.6 G_1 не упорядоченна. По 2.9 существует в $\mathscr{K}(G_1)$ бесконечная убывающая цепь $G_1 = C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, $C_{i+1} \neq C_i$. Для завершения доказательства достаточно иметь в виду те подгруппы D_i группы G, для которых имеет место $\varphi(D_i) = C_i$.

2.12. Пусть $x, y \in G^+$. Будем писать $x \ll y$, если для каждого натурального числа n имеет место $nx < y$. Мы скажем, что множество $M \subset G^+$ обладает свойством (a), если для всяких двух разных элементов $m_1, m_2 \in M$ будет или $m_1 \ll m_3$ или $m_2 \ll m_1$.

Для $x \in G$, $x > 0$ пусть $A(x) = \bigcup \langle -nx, nx\rangle (n = 1, 2, \ldots)$. Очевидно $A(x) \in \mathscr{K}'$. Если $x, y \in G$, $0 < x \ll y$, тогда $A(x) \subset A(y)$, $A(x) \neq A(y)$.

2.13. *Пусть G — упорядоченная группа. Структура $\mathscr{K}$ выполняет условие конечных цепей* (т. е. все ограниченные цепи в $\mathscr{K}$ конечны) *тогда и только тогда, если всякое множество $M \subset G^+$ обладающее свойством (a), является конечным.*

Доказательство. Утверждение „только тогда" вытекает из 2.12. Предположим, что структура $\mathscr{K}$ не выполняет условия конечных цепей. Тогда в $\mathscr{K}$ существует цепь $\{C_i\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, $C_i \neq C_{i+1}$ таким образом, что или $C_i \subset C_{i+1}$ для всякого i, или $C_i \supset C_{i+1}$ для всякого i. Выберем для $i = 2, 3, \ldots$ элемент $x_i \in C_i$, $x_i > 0$ так, чтобы в первом случае $x_i \in C_i - C_{i-1}$, во втором случае $x_i \in C_i - C_{i+1}$. (Символ — имеет здесь теоретическо-множественное значение.) Получается бесконечное множество $\{x_i\}$, имеющее свойство (a).

2.14. Теорема. *Структура $\mathscr{K}$ выполняет условие конечности цепей тогда и только тогда, когда G является упорядоченной группой и всякое множество $M \subset G^+$, имеющее свойство (a), является конечным.*

Доказательство. Утверждение „тогда" вытекает из 2.13. Утверждение „только тогда" вытекает из 2.9 и 2.13.

2.15. *Пусть G упорядоченная группа. Структура $\mathscr{K}$ является структурой с дополнениями тогда и только тогда, когда l-группа G является архимедовой.*

Утверждение вытекает из 2.7 и 2.12.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Birkhoff G., *Lattice theory*, revised edition, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. XXV, 1948.
[2] Курош А. Г., *Теория групп*, Москва 1953.
[3] Мальцев А. И., *Конструктивные алгебры*, Успехи математ. наук, 16, вып. 3 (99), (1961), 3—60.
[4] Suzuki M., *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups*, Berlin, 1956.
[5] Шимбирева Е. П., *К теории частично упорядоченных групп*, Матем. сборник 20 (62) (1947), 145—178.

Поступило 23. 12. 1961 г.

Katedra matematiky
Vysokej školy technickej
v Košiciach

ÜBER GEWISSE SYSTEME VON UNTERGRUPPEN EINER l-GRUPPE

Mária Jakubíková

Zusammenfassung

Es sei G eine l-Gruppe. Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen:
$\mathscr{G}$: die Menge aller Untergruppen von G,
$\mathscr{L}$: die Menge aller l-Untergruppen von G,
$\mathscr{K}$: die Menge aller konvexen Untergruppen von G,
$\mathscr{K}'$: die Menge aller konvexen l-Untergruppen von G. Jede von diesen Mengen ist durch die mengentheoretische Inklusion teilweise geordnet. Es wird bewiesen:

Es sei $\mathscr{H} \in \{\mathscr{G}, \mathscr{L}, \mathscr{K}, \mathscr{K}'\}$. Die Menge $\mathscr{H}$ ist ein vollständiger Verband, in dem der verbandstheoretische Durchschnitt gleich dem mengentheoretischen Durchschnitt ist. Der Verband $\mathscr{K}'$ ist ein vollständiger Teilverband in jedem Verband $\mathscr{H} \in \{\mathscr{G}, \mathscr{L}, \mathscr{K}\}$. Wenn G nicht geordnet (= linear geordnet) ist, so ist keine der Mengen $\mathscr{L}$, $\mathscr{K}$ ein Teilverband in $\mathscr{G}$. Der Verband $\mathscr{K}'$ ist distributiv. (Aus diesem Satz folgt als Spezialfall der Satz 10, Kap. XIV, [1].) Ist $A \in \mathscr{K}'$, $\emptyset \neq \{A_i\} \subset \mathscr{K}'$ so gilt

(1) $$A \vee (\wedge A_i) = \wedge (A \vee A_i).$$

Ist G eine vollständige l-Gruppe, so ist auch die zu (1) duale Gleichung im Kraft. Wenn G nicht vollständig ist, so braucht die zu (1) duale Gleichung nicht zu gelten. Wenn G keine geordnete Gruppe ist, so ist der Verband $\mathscr{K}$ nicht modulár. $\mathscr{K}$ ist eine Kette genau dann, wenn G eine geordnete Gruppe ist. $\mathscr{K}$ ist modulár genau dann, wenn G geordnet ist. Wenn G nicht geordnet ist, so erfüllt $\mathscr{K}'$ die absteigende Kettenbedingung nicht. Es sei G kommutativ, $A, B \in \mathscr{K}'$, $A \subset B$, $\mathscr{J} = \{C \mid C \in \mathscr{K}$ $A \subset C \subset B\}$. Wenn $\mathscr{J}$ keine Kette ist, so enthält $\mathscr{J}$ eine unendliche absteigende Kette.