MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 12, 2, 1962

К ТЕОРИИ КАНТОРОВСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

ТИБОР ШАЛАТ (Tibor Šalát), Братислава

Настоящая работа тесно примыкает к результатам работ [1], [2], [3], обобщает и дополняет их.

Пусть $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел, больших единицы. Известно (см. [4], стр. 7), что всякое действительное число $x \in \langle 0, 1)$ можно однозначно представить в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \dots q_k}, \tag{1}$$

где $\varepsilon_k(x)$ — целые числа $(k = 1, 2, 3, \dots)$; $0 \leqq \varepsilon_k(x) \leqq q_k - 1$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ и $\varepsilon_k(x) < q_k - 1$ для бесконечно многих k. Разложение (1) числа x называется канторовским разложением числа x. Канторовские разложения действительных чисел являются естественным обобщением g-адических разложений, которые мы получим, если положим $q_k = g$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$.

Если $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ — числовой ряд, то каждому числу x, представленному с помощью разложения (1), можно формально поставить в соответствие ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x) u_k. \tag{2}$$

Если $\sum_{k=1}^{\infty} (q_k - 1) |u_k| < \infty$, то, очевидно, каждый из рядов (2) абсолютно сходится.

Для дальнейшего введем еще следующее обозначение: интервалы

$$\left\langle \frac{l}{q_1 q_2 \dots q_n}, \frac{l+1}{q_1 q_2 \dots q_n} \right), \tag{3}$$

$0 \leqq l \leqq q_1 q_2 \dots q_n - 1$, l — целое, будем называть интервалами n-ного порядка. Будем говорить, что интервал (3) относится к (конечной) последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, если

$$\frac{l}{q_1 q_2 \dots q_n} = \frac{\varepsilon_1}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_1 q_2} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{q_1 q_2 \dots q_n}$$

$(0 \leqq \varepsilon_i \leqq q_i - 1$, ε_i — целое, $i = 1, 2, \dots, n)$.

Всех интервалов n-ного порядка имеется $q_1, q_2, \ldots, q_n$, и они полностью покрывают интервал $\langle 0,1)$. Далее, очевидно, что все числа, принадлежащие интервалу (3) (который относится к последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$), имеют в своих канторовских разложениях (1) на первых n местах цифры $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$.

Следующие две теоремы являются расширением результатов Дж. Д. Хилла из работы [1] на канторовские разложения.

Теорема 1. *Пусть* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ — *ряд с действительными членами, пусть*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (q_k - 1) \, | u_k | < +\infty.$$

Для каждого $x \in \langle 0, 1)$,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \ldots q_k}$$

(канторовское разложение числа x) положим

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x) \, u_k.$$

Утверждение: Функция φ интегрируема в смысле Риманна на $\langle 0, 1\rangle$ и

$$\int_0^1 \varphi \, dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (q_k - 1) \, u_k.$$

Доказательство. Для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$ положим

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(x) \, u_k.$$

Сразу видно, что для фиксированного n будет φ_n постоянной на каждом интервале n-ного порядка и ограниченной на $\langle 0,1)$, а значит, интегрируемой в смысле Риманна на $\langle 0, 1\rangle$. Далее, простая оценка дает

$$| \varphi_n(x) - \varphi(x) | = \Big| \sum_{n+1}^{\infty} \varepsilon_k(x) u_k \Big| \leqq \sum_{n+1}^{\infty} (q_k - 1) \, | u_k |,$$

согласно условию теоремы отсюда следует, что последовательность $\{\varphi_n(x)\}^{\infty}$ сходится равномерно к $\varphi(x)$ на $\langle 0,1)$, значит, φ интегрируема (в смысле Римана) на $\langle 0, 1\rangle$.

Обозначим теперь через R множество всех тех $x \in \langle 0,1)$, которые имеют только конечные разложения (1), т. е. для которых $\varepsilon_k(x) = 0$ для всех k, начиная с некоторого. Очевидно, R — счетное множество, значит $|R| = 0$ ($|M|$ означает меру Лебега множества M). Положим $T = \langle 0,1) - R$. Если $x \in T$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x)/(q_1, q_2, \ldots q_k)$, то канторовское разложение числа $1 - x$ будет

$$1 - x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k - 1 - \varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \ldots q_k}$$

и снова $1 - x \in T$, так что

$$\varphi(x) + \varphi(1 - x) = \sum_{k=1}^{\infty} (q_k - 1) \, u_k.$$

Отсюда получим

$$\int_T \varphi(x) \, dx + \int_T \varphi(1 - x) \, dx = \sum_{k=1}^{\infty} (q_k - 1) \, u_k$$

(налево имеем интегралы Лебега).

Дальше достаточно уже только принять во внимание, что

$$\text{(A)} \qquad \int_T \varphi(x) \, dx = (R) \int_0^1 \varphi(x) \, dx, \quad \int_T \varphi(1 - x) \, dx = (R) \int_0^1 \varphi(1 - x) \, dx$$

и установить, что при подстановке $1 - x = t$ перейдет второй интеграл справа в (A) в интеграл $\int_0^1 \varphi(x) \, dx$.

Тем самым доказательство теоремы закончено.

Функции φ_n, определенные на $\langle 0, 1)$ соотношением

$$\text{(4)} \qquad \varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(x) \, u_k$$

(см. доказательство предыдущей теоремы), можно таким же способом ввести и в том случае, если относительно сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ не делать никаких предположений. Поэтому во всей настоящей работе под $\varphi_n(x)$ понимается функция, определенная соотношением (4).

В дальнейшем интервал $\langle 0,1)$ рассматривается как метрическое пространство с обычной эвклидовской метрикой $\varrho(x, y) = | x - y |$.

Теорема 2. *Пусть* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ — *бесконечный ряд с действительными членами. Пусть*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (q_k - 1) \max(u_k, 0) = +\infty,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (q_k - 1) \min(u_k, 0) = -\infty.$$

Утверждение: Для всех $x \in \langle 0,1)$ за исключением точек множества первой категории справедливо

$$\liminf_{n\to\infty} \varphi_n(x) = -\infty, \qquad \limsup_{n\to\infty} \varphi_n(x) = +\infty. \tag{5}$$

Примечание. Условия теоремы, очевидно, выполнены, если $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ — не абсолютно сходящийся ряд.

Доказательство теоремы. Пусть R имеет тот же смысл, что и раньше, положим дальше $P = \langle 0,1) - R$, и пусть ϱ означает эвклидовскую метрику. Метрическое пространство (P, ϱ) — второй категории в себе. Поскольку при фиксированном n все точки разрыва функции φ_n лежат в R, то φ_n непрерывна на P (точно говоря, ее частная функция $(\varphi_n)_P$ непрерывна на P).

Для натурального K положим

$$A(K) = E[x;\, x \in P,\, \varphi_n(x) \leqq K,\, n = 1, 2, 3, \ldots]$$

Значит, $A(K)$ — замкнуто в P. Покажем, что $A(K)$ — нигде неплотно в P. Пусть $S'(x_0, \delta)$ $(\delta > 0)$ — сферическая окрестность точки $x_0 \in P$ в P, значит,

$$S'(x_0, \delta) = S(x_0, \delta) \cap P,\ S(x_0, \delta) = (x_0 - \delta,\, x_0 + \delta).$$

Для достаточно большого k уже $S(x_0, \delta)$ содержит некоторый интервал k-ого порядка i_k. Пусть этот интервал относится к последовательности $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$; $0 \leqq \varepsilon_i \leqq q_i - 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Положим

$$C = \varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_k u_k.$$

Из условия теорема следует существование такого натурального s, что

$$(q_{k+1} - 1)\max(u_{k+1}, 0) + \ldots + (q_{k+s} - 1)\max(u_{k+s}, 0) > K - C.$$

Определим теперь числа ε_{k+i} $(i = 1, 2, \ldots, s)$ следующим образом: если $\max(u_{k+i}, 0) = u_{k+i} > 0$, то $\varepsilon_{k+i} = q_{k+i} - 1$, но если $\max(u_{k+i}, 0) = 0$, то полагаем $\varepsilon_{k+i} = 0$, значит,

$$(q_{k+i} - 1)\max(u_{k+i}, 0) = \varepsilon_{k+i} \cdot u_{k+i} \quad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Обозначим через i_{k+s} тот интервал $(k+s)$-того порядка, который относится к последовательности

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1}, \ldots, \varepsilon_{k+s},$$

очевидно, $i_{k+s} \subset i_k$. Тогда $i_{k+s} \subset S(x_0, \delta)$, $i_{k+s} \cap P \subset S'(x_0, \delta)$ и для всякого $x \in i_{k+s} \cap P$ будет

$$\varphi_{k+s}(x) = \varepsilon_1 u_1 + \ldots + \varepsilon_k u_k + \varepsilon_{k+1} u_{k+1} + \ldots + \varepsilon_{k+s} u_{k+s} > K$$

значит $x \notin A(K)$. Отсюда получаем, что $A(K)$ — нигде неплотно в P. Положим теперь

$$A = \bigcup_{K=1}^{\infty} A(K).$$

Тогда

$$A = E[x;\ x \in P,\ \limsup_{n\to\infty} \varphi_n(x) < +\infty]$$

и согласно раньше сказанному A есть множество первой категории в P, значит, и первой категории в $\langle 0, 1)$. Точно так же можно усмотреть, что и

$$B = E[x;\ x \in P,\ \liminf_{n\to\infty} \varphi_n(x) > -\infty]$$

есть множество первой категории в $\langle 0,1)$, и таким образом, также $A \cup B \cup R$ — первой категории в $\langle 0,1)$; из определений этих множеств следует, что для всякого $x \in \langle 0, 1) - (A \cup B \cup R)$ справедливо (5).

Тем самым доказательство теоремы закончено.

В условиях теоремы 2 множество H всех тех $x \in \langle 0,1)$, для которых либо $\liminf_{n\to\infty} \varphi_n(x) > -\infty$ либо $\limsup_{n\to\infty} \varphi_n(x) < +\infty$, является множеством первой категории в $\langle 0,1)$. Известно (см. [5]), что существует тесная связь между множествами первой категории и нулевыми (в смысле меры Лебега) множествами, но притом известно, что не всякое множество первой категории — нулевое. Известно даже (см. [6]), что интервал $\langle 0,1)$ является объединением двух множеств, из которых одно—первой категории в $\langle 0,1)$ и второе имеет хаусдорффовскию размерность 0 (и следовательно, оно нулевое). В связи с теоремой 2 возникает естественный вопрос об исследовании меры Лебега множества H. Ответ на этот вопрос при условиях (для ряда $\sum_1^{\infty} u_k$) немного более сильных, чем условия теоремы 2, дает следующая теорема:

Теорема 3. *(i) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ — ряд с действительными членами и пусть*

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (q_k - 1)\, u_k = +\infty.$$

Утверждение: Для почти всех $x \in \langle 0, 1)$ справедливо

$$\limsup_{n\to\infty} \varphi_n(x) = +\infty.$$

(ii) Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ — ряд с действительными членами и пусть

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (q_k - 1)\, u_k = -\infty.$$

Утверждение: Для почти всех $x \in \langle 0, 1)$ справедливо

$$\liminf_{n \to \infty} \varphi_n(x) = -\infty.$$

Следствие. 1. Пусть для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ имеют место оба условия теоремы (3): (*i*) и (*ii*); пусть H означает множество всех тех $x \in \langle 0,1)$, для которых либо $\liminf_{n \to \infty} \varphi_n(x) > -\infty$, либо $\limsup_{n \to \infty} \varphi_n(x) < +\infty$, тогда H есть нулевое множество первой категории.

2. Если специально положить $q_k = 2 (k = 1, 2, 3, \ldots)$, то получится следующий результат, дополняющий результаты работы [1]: Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ колеблется между $-\infty$ и ∞. Пусть M означает множество всех тех $x \in (0, 1)$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_n(x) 2^{-n}$ (диадическое разложение числа x, содержащее бесконечно много цифр $c_n(x) \neq 1$), для которых либо

$$\liminf_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} c_k(x) u_k > -\infty,$$

либо

$$\limsup_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} c_k(x) u_k < +\infty,$$

тогда M есть нулевое множество первой категории.

В дальнейшем $|M|_e$ означает внешнюю меру Лебега множества M.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 3, покажем некоторые основные свойства однородных множеств (см. [7]).

Под однородным множеством H интервала $\langle 0,1)$ мы понимаем такое подмножество этого интервала, плотность которого в каждом интервале $I \subset \langle 0, 1)$ постоянна (не зависит от I), причем под плотностью множества H в интервале I понимается число

$$D(I) = \frac{|H \cap I|_e}{|I|}.$$

Известно (см. [7]), что каждое однородное и измеримое в интервале $\langle 0, 1)$ множество имеет либо меру 0 либо меру 1.

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится следующая вспомогательная теорема, которая является, собственно говоря, критерием однородности множеств в $\langle 0, 1)$.

Введем еще такое обозначение: через I_n будем обозначать систему всех интервалов n-ного порядка. Интервалы n-ного порядка будем обозначать через i_n^k, $0 \leqq k \leqq q_1 q_2 \ldots q_n - 1$. Значит, $I_n = \{i_n^k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, q_1 q_2 \ldots q_n - 1$.

Лемма 1. *Пусть B — измеримое подмножество интервала $\langle 0, 1)$. Пусть для каждого $n = 1, 2, 3 \ldots$ имеет место следующее предложение: Если k, k' — два произвольных числа последовательности*

$$0, 1, 2, \ldots, q_1 q_2 \ldots q_n - 1,$$

то

$$|B \cap i_n^k| = |B \cap i_n^{k'}|.$$

Утверждение: Множество B однородно в $\langle 0, 1)$ (и, следовательно, его мера — либо 0 либо 1).

Доказательство леммы. Положим

$$D_n = \frac{|B \cap i_n^k|}{|i_n^k|}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, q_1 q_2 \ldots q_n - 1$.

Из очевидного соотношения

$$B = \bigcup_{k=0}^{q_1 q_2 \cdots q_n - 1} (B \cap i_n^k)$$

— если принять во внимание, что i_n^k для фиксированного n попарно непересекаются, получим

$$|B| = \sum_{k=0}^{q_1 q_2 \cdots q_n - 1} |B \cap i_n^k| = D_n \sum_{k=0}^{q_1 q_2 \cdots q_n - 1} |i_n^k| = D_n |\langle 0,1)| = D_n.$$

Достаточно показать, что для каждого интервала $I \subset \langle 0, 1)$ будет

$$\frac{|B \cap I|}{|I|} = |B|.$$

Пусть α и β соответственно левая и правая концевые точки интервала I, пусть никакое из чисел α, β не совпадает с какой-либо из концевых точек интервала $\langle 0, 1)$. Пусть $\varepsilon > 0$, выберем натуральное n таким образом, чтобы

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Покроем весь интервал $\langle 0, 1)$ интервалами n-ного порядка, и будем считать, что n мы выбрали уже таким большим, что имеет место (α) и хотя бы один интервал n-ного порядка содержится в I. Пусть i_n^k $(k = l + 1, l + 2, \ldots, l + s)$ — все такие интервалы n-ного порядка, которые содержатся в I. Тогда, очевидно,

$$(\beta) \qquad \bigcup_{k=l+1}^{l+s} i_n^k \subset I \subset \bigcup_{k=l}^{l+s+1} i_n^k.$$

Отсюда сразу же получаем

$$0 \leqq |I| - \sum_{k=l+1}^{l+s} |i_n^k| \leqq 2\frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_n} < \varepsilon,$$

$$0 \leqq \sum_{k=l}^{l+s+1} |i_n^k| - |I| \leqq 2\frac{1}{q_1 q_2 \cdots q_n} < \varepsilon.$$

Дальше, из (β) следует

$$\bigcup_{k=l+1}^{l+s} (B \cap i_n^k) \subset B \cap I \subset \bigcup_{k=l}^{l+s+1} (B \cap i_n^k)$$

и отсюда согласно раньше сказанному

$$|B| \sum_{k=l+1}^{l+s} |i_n^k| = \sum_{k=l+1}^{l+s} |B \cap i_n^k| \leqq |B \cap I| \leqq \sum_{k=l}^{l+s+1} |B \cap i_n^k| = |B| \cdot \sum_{k=l}^{l+s+1} |i_n^k|.$$

Если теперь воспользоваться (γ), то получим

$$|B| \frac{|I| - \varepsilon}{|I|} \leqq \frac{|B \cap I|}{|I|} \leqq |B| \frac{|I| + \varepsilon}{|I|}.$$

Так как ε было произвольным (>0), то наше утверждение получается немедленно. Заметим еще, что если бы (одна или обе) концевая точка I совпадала с концевой точкой $\langle 0, 1)$, то наше доказательство проводилось бы аналогично.

Доказательство теоремы 3. Достаточно, очевидно, ограничиться доказательством части (i).

Пусть (1) — канторовское разложение числа x, пусть $\varphi_n(x)$ и R имеют тот же смысл, что и раньше.

Покажем сначала, что множество

$$H_1 = E[x;\ x \in \langle 0,1) - R,\ \limsup_{n\to\infty} \varphi_n(x) < +\infty]$$

измеримо и однородно в $\langle 0, 1)$. Измеримость H_1 следует из того, что функции φ_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) кусочно-непрерывны в $\langle 0, 1)$.

Покажем, что H_1 — однородно в $\langle 0, 1)$. Нусть i_n^r, i_n^l — два интервала n-ного порядка, пусть r_n^l относится к последовательности

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n.$$

и i_n^l относится к последовательности

$$\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_n'.$$

Сразу видно, что $H_1 \cap i_n^r$ получится из $H_1 \cap i_n^l$ путем сдвига на расстояние

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon_i - \varepsilon_i'}{q_1 q_2 \cdots q_i},$$

значит, $|H_1 \cap i_n^r| = |H_1 \cap i_n^l|$, откуда по лемме 1 следует $|H_1| = 0$ или $|H_1| = 1$. Следовательно, достаточно показать, что не может быть $|H_1| = 1$.

Будем доказывать от противного: пусть $|H_1| = 1$. Положим

$$H_1' = H_1 \cap \left\langle 0, \frac{1}{2}\right), \qquad H_1'' = H_1 \cap \left\langle \frac{1}{2}, 1\right).$$

Тогда, очевидно, $|H_1'| = |H_1''| = 1/2$. Построим отображение $f(x) = 1 - x$ множества H_1' в $\langle 1/2, 1)$. Положим $f(H_1') = H_1'''$. Очевидно, $|H_1'''| = 1/2$ и поэтому $H_1'' \cap H_1''' \neq \emptyset$. Следовательно, существует такое y, что $y \in H_1'' \cap H_1'''$, $y = f(x^0) = 1 - x^0$. Тем самым мы доказали существование такого числа x^0, $x^0 \in \langle 0, 1)$, что одновременно оба числа x^0 и $1 - x^0$ принадлежат H_1. Если теперь

$$x^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x^0)}{q_1 q_2 \cdots q_k}$$

есть канторовское разложение числа x^0($\varepsilon_k(x^0) < q_k - 1$ для бесконечно многих k, а также $\varepsilon_k(x^0) > 0$ для бесконечно многих k, поскольку $x^0 \notin R$), то сразу видно, что канторовским разложением числа $1 - x^0$ будет

$$1 - x^0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(1 - x^0)}{q_1 q_2 \cdots q_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k - 1 - \varepsilon_k(x^0)}{q_1 q_2 \cdots q_k}.$$

Значит,

$$(6) \qquad \varphi_n(x^0) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(x^0) u_k, \qquad \varphi_n(1 - x^0) = \sum_{k=1}^{n} (q_k - 1 - \varepsilon_k(x^0)) u_k.$$

Так как x^0, $1 - x^0 \in H_1$, то получаем

$$\limsup_{n\to\infty} (\varphi_n(x^0) + \varphi_n(1 - x^0)) \leqq \limsup_{n\to\infty} \varphi_n(x^0) + \limsup_{n\to\infty} \varphi_n(1 - x^0) < +\infty.$$

Однако, с другой стороны, из (6) согласно условию теоремы получаем

$$\limsup_{n\to\infty} (\varphi_n(x) + \varphi_n(1 - x)) = \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (q_k - 1) u_k = +\infty.$$

Мы пришли к противоречию, следовательно, необходимо должно быть $|H_1| = 0$.

Таким же способом можно доказать и следующую теорему:

Теорема 4. *Пусть* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ *— ряд с действительными членами, пусть ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} (q_k - 1) u_k$ *расходится.*

Утверждение: Для почти всех $x \in \langle 0, 1)$,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \cdots q_k},$$

бесконечный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x) u_k$ *расходится.*

Доказательство. Будем двигаться быстрее. Тем же способом, что и в доказательстве предыдущей теоремы, установим, что множество E всех тех $x \in \langle 0, 1) - R$, для которых ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x) u_k$ сходится, измеримо и имеет меру 0 или 1. Если бы $|E| = 1$, мы обнаружили бы, что существует число x^0 такое, что x^0 и $1 - x^0$ принадлежат E. Из соотношения

$$\varphi_n(x^0) + \varphi_n(1 - x^0) = \sum_{k=1}^{n} (q_k - 1) u_k$$

получим сразу же противоречие (левая сторона имеет для $n \to \infty$ конечный предел, что противоречит предположенной расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (q_k - 1) u_k$). Следовательно, должно быть $|E| = 0$.

Примечание. Теоремы 3 и 4 можно считать обобщением известного факта, согласно которому почти все (в некотором смысле, определенном на основ т. наз. дуальных значений множеств натуральных чисел) частичные ряды расходящегося ряда расходятся.

Примечание. а) В некоторых частных случаях можно определенным способом охарактеризовать множество E из предыдущей теоремы. Так, например (см. [8]), если

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = +\infty; \qquad u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots, \qquad u_n \to 0$$

и последовательность $\{q_n\}_1^{\infty}$ ограничена, то необходимое условие для того, чтобы $x \in E$, такового:

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{S_n(x)}{n} = 0, \tag{7}$$

где $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(x)$.

Это условие имеет следующий наглядный смысл: В последовательности $\{\varepsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ не должно содержаться „слишком много“ ненулевых членов. Дело в том, что если при фиксированном $x \in \langle 0, 1)$ обозначить через A_x множество всех тех натуральных чисел k, для которых $\varepsilon_k(x) \neq 0$, то для числа $A_x(n)$ элементов множества A_x, которые не превышают n, получаем путем тривиальной оценки $A_x(n) \leqq S_n(x)$, а из (7) следует

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{A_x(n)}{n} = 0,$$

т. е. нижняя асимптотическая плотность множества A_x — нулевая.

б) Если $u_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $u_n \to 0$ и

$$u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots$$

(относительно сходимости $\sum_{k=1}^{\infty} u_n$ ничего не предполагается) и если $\{q_k\}_1^{\infty}$ — произвольная последовательность натуральных чисел больших единицы, то необходимое условие для того, чтобы $x \in E$, таково:

$$S_n(x) = \sum_{k=1} \varepsilon_k(x) = O\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

(см. [8]).

Это условие — не достаточное для того, чтобы $x \in E$. В самом деле, если положить $u_n = 1/n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $q_k = k + 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и выбрать $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x)/(k+1)!$ так, что $\varepsilon_k(x) = 1$, если k — простое число и $\varepsilon_k(x) = 0$ в остальных случаях, то $S_n(x) = \pi(n)$ ($\pi(x)$ значит число простых чисел меньших или равных x), $S_n(x) = O(n) = O(1/u_n)$ и притом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x) u_k = \sum_p \frac{1}{p} = \infty$$

($\sum_p 1/p$ означает ряд обратных величин простых чисел).

Можно показать, что достаточным условием для того, чтобы $x \in E$, будет в этом случае: для некоторого $\alpha > 0$ (α не зависит от n)

$$S_n(x) = O\left(\frac{1}{u_n^{1-\alpha}}\right).$$

В работе [2] доказал П. Туран (тригонометрическим методом, основанным на известной теореме Кантора-Лебега из теории тригонометрических рядов), что если $\{q_k\}_1^{\infty}$ имеет тот же смысл, что и раньше и $\sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k < \infty$, то для почти всех $x \in \langle 0, 1)$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x)/q_k$ расходится.

В работе [3] Рени дал более общее утверждение (вероятностными методами), что если для некоторого $\alpha \geqq 0$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k^{\alpha}$ расходится, то для почти всех $x \in \langle 0, 1)$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_k^{\alpha+1}}$$

расходится.

Оба этих результата мы получили как частный случай теоремы 4, если положить $u_k = 1/q_k$ и $u_k = 1/q_k^{1+\alpha}$ соответственно $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hill J. D., *Some theorems on subseries*, Bull. Amer. Math. Soc. 48 (1942), 103—108.
[2] Turán P., *„Faktoriálisos" számrendszerbeli „számjegyek" eloszlásáról*, Matematikai Lapok VII (1956), 71—76.
[3] Rényi A., *A számjegyek eloszlása valós számok Cantor-féle előállításaiban*, Matematikai Lapok VII (1956), 77—100.
[4] Niven I., *Irrational numbers*, Carus Monographs 11, 1956.
[5] Sierpiński W., *Sur la dualité entre la première catégorie et la mesure nulle*, Fund. Math. 22 (1934), 276—278.
[6] Goffman C., *Problem* 4589 [1954, 350], Amer. Math. Monthly 62 (1955), 497—498.
[7] Knopp K., *Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diophantischen Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten*, Math. Ann. 95 (1926), 409—426.
[8] Rademacher H., *Über die asymptotische Verteilung gewisser konwergenzerzeugenden Faktoren*, Math. Zeit. 11 (1921), 276—288.

Поступило 12. 9. 1961 г.

Katedra matematickej analýzy
Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského
v Bratislave

TO THE THEORY OF CANTOR EXPANSIONS OF THE REAL NUMBERS

Tibor Šalát

Summary

The paper is closely related to the papers [1], [2], [3] and is a completion and generalization of the formers.

The main results are contained in the following theorems (Theorem 3 and 4).

Theorem. Let $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ be a series with real members and let $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ be a sequence of natural numbers which are greater or equal to 2. Let $\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (q_k - 1)\, u_k = -\infty$, $\limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (q_k - 1)\, u_k = +\infty$.

Then for almost all $x \in \langle 0,1\rangle$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x)/(q_1 q_2 \dots q_k)$ (the Cantor's expansion of x), the following is true

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(x)\, u_k = -\infty, \qquad \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k(x)\, u_k = +\infty.$$

Theorem. Let $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ be a series with real numbers and let $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ has the same meaning as in the preceeding theorem. Let the series $\sum_{k=1}^{\infty} (q_k - 1)\, u_k$ be divergent.

Then for almost all $x \in \langle 0,1)$, $x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x)/(q_1 q_2 \dots q_k)$ the infinite series $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k(x)\, u_k$ is divergent.