MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS
ROČNÍK 12 1962 ČÍSLO 2

O ISTEJ TRIEDE ORIENTOVANÝCH GRAFOV

JURAJ BOSÁK, Bratislava

Predmetom práce bude vyšetrovanie vlastností $(u, v)_m$-grafov. Takto budeme nazývať konečný orientovaný* graf G, obsahujúci vrcholy $u \neq v$ také, že G možno rozložiť na m ťahov** z vrchola u do vrchola v; to znamená, že G nemá izolované vrcholy a že každá hrana grafu G patrí práve do jedného z týchto ťahov. Budú nás zaujímať najmä otázky súvisiace s výskytom cyklov a tzv. (u, v)-hrán v $(u, v)_m$-grafoch. Na tieto možnosti upozornil Kotzig v [1], poznámka 15 na str. 62, a to pre prípad neorientovaných grafov. My budeme formulovať výsledky v reči orientovaných grafov, kde je situácia analogická.

Veta 1. *Nutná a postačujúca podmienka na to, aby súvislý*** orientovaný graf G bol $(u, v)_m$-grafom je, aby sa rozdiel počtu do vrcholu vchádzajúcich a z tohoto vrcholu vychádzajúcich hrán rovnal*

a) $-m$ *pre vrchol* u;
b) $+m$ *pre vrchol* v;
c) 0 *pre všetky ostatné vrcholy grafu* G.

Dôkaz. Nutná podmienka je zrejmá. Aby sme dokázali postačujúcu podmienku, doplňme graf G m hranami, orientovanými z v do u na rovnovážne orientovaný graf [2]. Tento, ako je dobre známe, dá sa rozložiť na cykly (bez spoločných hrán). Preto pôvodný graf G možno rozložiť na m ťahov z u do v a prípadné cykly. Vzhľadom na súvislosť grafu G možno tieto cykly postupne pripojiť k uvedeným m ťahom, čím dostaneme žiadaný rozklad grafu G na m ťahov z u do v.

Veta 2. *V $(u, v)_m$-grafe G ($m > 1$) k ľubovoľnému systému hranovo-disjunktných ťahov $T_1, T_2, \ldots, T_k$ ($1 \leq k < m$) z u do v existuje systém ťahov $T_{k+1}, \ldots, T_m$ z u do v tak, že $T_1, T_2, \ldots, T_k, T_{k+1}, \ldots, T_m$ sú hranovo-disjunktné ťahy z u do v.*

*Uvedený systém ťahov $T_1, T_2, \ldots, T_k, T_{k+1}, \ldots, T_m$ obsahuje všetky hrany grafu vtedy a len vtedy, keď graf $G - \{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$**** je súvislý.*

---

* Pripúšťame „viacnásobné" hrany aj slučky.

** Pod ťahom rozumieme vždy kontinuitne orientovaný ťah, čiže spojenie [6], neprechádzajúce žiadnou hranou viac než raz.

*** Slová „súvislý" graf, „komponent" chápeme vzhľadom na neorientovaný graf, ktorý dostaneme z G zrušením orientácie všetkých jeho hrán.

**** Znakom $G - \{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$ označujeme graf, ktorý vznikne z grafu G vynechaním všetkých

D ô k a z. Vrcholy u, v zrejme patria do toho istého komponentu grafu $G - \{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$. Tento komponent je podľa vety 1 $(u, v)_{m-k}$-grafom, z čoho vyplývajú obe tvrdenia vety 2.

Veta 3. *Ak po vynechaní rovnovážne orientovaného grafu z $(u, v)_m$-grafu G vznikne súvislý graf G_0, je G_0 opäť $(u, v)_m$-grafom. Ľubovoľný $(u, v)_m$-podgraf grafu G možno vytvoriť uvedeným spôsobom (vynechaním istého rovnovážne orientovaného grafu) z G.*

D ô k a z. Prvá časť vety vyplýva bezprostredne z vety 1. Pre dôkaz druhého tvrdenia stačí uvážiť, že ak vynecháme z $(u, v)_m$-grafu jeho $(u, v)_m$-podgraf, dostaneme podľa vety 1 rovnovážne orientovaný graf.

Dôsledok 1. *Ak postupným vynechávaním cyklov vytvoríme z $(u, v)_m$-grafu G acyklický* [5] *graf G_0, je G_0 opäť $(u, v)_m$-grafom.*

P o z n á m k a. Na príkladoch možno ukázať, že 1. vetu 2 nemožno zovšeobecniť na všetky orientované grafy, obsahujúce m hranovo-disjunktných ťahov z vrcholu u do vrcholu v; 2. v dôsledku 1 vety 3 nemožno postupné vynechávanie cyklov nahradiť vynechaním všetkých hrán, patriacich do niektorého cyklu v G; 3. acyklický $(u, v)_m$-podgraf $(u, v)_m$-grafu nemusí byť jednoznačne určený.

Dôsledok 2. *Každý $(u, v)_m$-podgraf $(u, v)_m$-grafu G obsahuje všetky hrany grafu G, nepatriace do žiadneho cyklu v G.*

Veta 4. *Nech hrana h z $(u, v)_m$-grafu G patrí do n, ale nie do viac rôznych cyklov $C_1, C_2, \ldots, C_n$ v G (nepožadujeme, aby tieto cykly boli hranovo-disjunktné). Acyklický $(u, v)_m$-podgraf grafu G, do ktorého patrí hrana h, existuje vtedy a len vtedy, keď existuje systém S hranovo-disjunktných cyklov grafu G taký, že 1. hrana h nepatrí do žiadneho z cyklov systému S; 2. každý z cyklov $C_1, C_2, \ldots, C_n$ má spoločnú aspoň jednu hranu s niektorým cyklom zo systému S.*

D ô k a z. Ak existuje systém S uvedených vlastností, po vynechaní všetkých cyklov systému S z grafu G vznikne istý graf G_0, v ktorom hrana h nepatrí do žiadneho cyklu. Postupným vynechávaním cyklov z grafu G_0 vznikne podľa dôsledku 1 vety 3 acyklický graf požadovaných vlastností. Obrátene, ak existuje acyklický $(u, v)_m$-podgraf grafu G, obsahujúci hranu h, podľa vety 3 ho môžeme vytvoriť vynechaním istého rovnovážne orientovaného grafu z G. Cykly, na ktoré možno rozložiť tento rovnovážne orientovaný graf, tvoria hľadaný systém S. Dôkaz je vykonaný.

Pre ďalšie účely uvedieme tri definície:

Nazvime (u, v)-množinami grafu G také množiny M hrán konečného orientovaného grafu G s vrcholmi u, v, pre ktoré platí: 1. každý ťah z u do v obsahuje aspoň jednu hranu z M; 2. ku každej hrane z M existuje aspoň jeden ťah z u do v neobsahujúci okrem tejto hrany žiadnu inú hranu z M; 3. neexistuje v grafe G (u, v)-množina s menším počtom prvkov (hrán) než má množina M.

hrán ťahov $T_1, T_2, \ldots, T_k$ a izolovaných vrcholov, ktoré prípadne pri tomto postupe vzniknú. V tomto zmysle hovoríme i v ďalšom texte o vynechávaní podgrafov.

Hranu, ktorá patrí do niektorej (u, v)-množiny grafu G, nazvime (u, v)-hranou grafu G. Poznamenajme, že pojem (u, v)-hrany je totožný s pojmom ω-hrany, zavedeným v práci [3] (pozri lemmu 7).

$(u, v)_m$-graf nazvime normálnym, ak obsahuje aspoň jednu (u, v)-množinu s m hranami. (Potom, pravda, všetky jeho (u, v)-množiny pozostávajú z m hrán.)

Veta 5. *V normálnom $(u, v)_m$-grafe G hrana h je (u, v)-hranou práve vtedy, keď h nepatrí do žiadneho cyklu v grafe G.*

D ô k a z. 1. Nech hrana h je (u, v)-hrana grafu G. Potom h patrí do niektorej (u, v)-množiny M grafu G. Keďže G je normálny $(u, v)_m$-graf, M má m prvkov (hrán). Ak hrana h patrí do nejakého cyklu C grafu G, podľa dôsledku 1 vety 3 existuje $(u, v)_m$-podgraf G_0 grafu G, ktorého prvkom nie je žiadna hrana cyklu C. Každý ťah z u do v v grafe G_0 musel by potom prechádzať niektorou z hrán množiny M, nepatriacou do C. Takýchto hrán je však menej než m, čo je v spore s tým, že G_0 je $(u, v)_m$-graf.

2. Nech hrana h nepatrí do žiadneho cyklu grafu G. Keby h nebola (u, v)-hranou grafu G, existoval by v grafe $G - h$ podľa [3], veta 6 systém m hranovo-disjunktných ťahov z u do v. Ak vynecháme tieto ťahy z grafu G, dostaneme podľa našej vety 1 rovnovážne orientovaný graf, ktorý možno rozložiť na cykly. Jeden z týchto cyklov musí obsahovať aj hranu h, čo je spor s predpokladom. Dôkaz je vykonaný.

Nech je teraz daný acyklický $(u, v)_m$-graf G. Zaveďme v množine vrcholov grafu G čiastočné usporiadanie takto: $a \leqq b$ práve vtedy, ak $a = b$ alebo ak v G existuje ťah z a do b (porovnaj [4], str. 12). Nech je ďalej T ľubovoľný ťah z u do v v grafe G a nech je x ľubovoľný vrchol grafu G rôzny od u, označme znakom $h(T, x)$ tú hranu z ťahu T, pre konečný vrchol y ktorej platí $x \leqq y$, pričom žiadny z predchádzajúcich vrcholov ťahu T nemá túto vlastnosť. Stručne povedané, $h(T, x)$ je tá hrana ťahu T, ktorej konečný vrchol je „najmenším" vrcholom ťahu T „nad" vrcholom x.

Veta 6. *Nech je G acyklický $(u, v)_m$-graf, ktorý možno rozložiť na ťahy $T_1, T_2, \ldots, T_m$; nech je h ľubovoľná hrana grafu G, x konečný vrchol hrany h. Potom hrany $h(T_1, x), h(T_2, x), \ldots, h(T_m, x)$ tvoria (u, v)-množinu M grafu G, obsahujúcu hranu h.*

D ô k a z. Dokážeme, že množina M splňuje všetky tri podmienky z definície (u, v)-množiny.

1. Nech T_0 je ľubovoľný ťah z u do v. Hrana $h(T_0, x)$ patrí do niektorého z ťahov systému $T = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$. Nech je to napr. ťah T_i. Ľahko vidíme, že $h(T_0, x) = h(T_i, x)$. V opačnom prípade pre počiatočný vrchol y hrany $h(T_0, x)$ by platilo $x \leqq y$, čo odporuje definícii symbolu $h(T_0, x)$. Preto $T_0 \ni h(T_0, x) = h(T_i, x) \in M$, t. j. ťah T_0 obsahuje hranu $h(T_0, x)$ z M.

2. Hranou $h(T_j, x)$, kde $T_j \in T$, prechádza ťah T_j, a keďže ťahy systému T sú navzájom hranovo-disjunktné, T_j prechádza len týmto ťahom systému T.

3. Tretia vlastnosť vyplýva opäť z toho, že žiadne dva rôzne ťahy systému T nemajú spoločnú hranu.

Ďalej ak $h \in T_k \in T$, potom $h = h(T_k, x) \in M$.

Tým je dôkaz vety skončený.

*

Záverom ďakujem A. Kotzigovi a K. Čulíkovi za cenné pripomienky k práci.

LITERATÚRA

[1] Kotzig A., *Súvislosť a pravidelná súvislosť konečných grafov*, Bratislava 1956.

[2] Kotzig A., *O rovnovážne orientovaných konečných grafoch*, Časopis pro pěstování matematiky 84(1959), 31—45.

[3] Kotzig A., *Beitrag zur Theorie der endlichen gerichteten Graphen*, Wissenschaftliche Zeitschrift der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Math.-Nat. X/1 (1961), 113—126.

[4] Berge C., *Théorie des graphes et ses applications*, Duncd, Paris 1958.

[5] Sedláček J., *O konečných orientovaných grafech*, Časopis pro pěstování matematiky 82 (1957), 195—215.

[6] Sedláček J., *O incidenčních maticích orientovaných grafů*, Časopis pro pěstování matematiky 84 (1959), 303—316.

Došlo 29. 2. 1960.

Kabinet matematiky
Slovenskej akadémie vied
v Bratislave

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

Юрай Босак

Резюме

Статья занимается конечными ориентированными графами (с вершинами $u \neq v$), разложимыми в ветви из вершины u в вершину v. Исследуются разные подграфы таких графов.

ON CERTAIN CLASS OF ORIENTED GRAPHS

Juraj Bosák

Summary

The paper deals with the finite oriented graphs (with vertices $u \neq v$) decomposable into the directed paths from the vertex u to the vertex v. Various subgraphs of such graphs are investigated.