MATEMATICKO-FYZIKÁLNY ČASOPIS SAV, 12, 2, 1962

SINGULARITY JOSTOVÝCH FUNKCIÍ A POTENCIÁLY PRÍPAD P-VĹN A D-VĹN

MILAN PETRÁŠ, Bratislava

Úvod

Pri vyšetrovaní analytických vlastností amplitúdy rozptylu v potenciálovom poli sa obvykle najprv zvolí istá trieda potenciálov a potom sa skúma príslušná analytická štruktúra amplitúdy rozptylu.* Je však možné postupovať aj obrátene, t. j. vopred postulovať isté analytické vlastnosti a dodatočne skúmať potenciály, ktoré im prislúchajú. Tento postup sa zvolil v práci [1], v ktorej sú vyšetrované potenciály, prislúchajúce daným singularitám Jostových funkcií, pre prípad S-vlny. Tam bolo ukázané, že problém sa redukuje na riešenie systému N nehomogénnych lineárnych rovníc v tom prípade, keď Jostova funkcia má N pólov na kladnej časti imaginárnej osi a na riešenie lineárnej nehomogénnej integrálnej rovnice vtedy, keď táto funkcia sa vyznačuje nespojitosťou pozdĺž rezu, idúceho po kladnej časti imaginárnej osi v komplexnej rovine impulzu k. Riešenie týchto rovníc vedie nielen na hľadaný potenciál, ale aj na príslušné vlnové funkcie.

V tomto článku sa metóda práce [1] zobecňuje aj na P-vlny a D-vlny. Zobecnenie spočíva v rozšírení Jostovej funkcie o členy, ktoré odpovedajú pólom prvého a druhého rádu v bode $k = 0$. Určenie potenciálu sa potom prevádza na riešenie istých lineárnych nehomogénnych problémov, podobne ako v [1]. Ku každému potenciálu sa automaticky dostáva aj riešenie príslušnej Schrödingerovej rovnice. V závere sa odvodzujú rovnice, ktoré predstavujú P-vlnové a D-vlnové analogóny Martinovho tvaru [3] Noyesovej–Wongovej rovnice [4]. Pozoruhodnou vlastnosťou je ich homogénnosť, ktorú nenachádzame u rovnice Martinovej a Noyesovej–Wongovej.

N-pólová Jostova funkcia

Odvodenie rovníc pre N-pólovú Jostovu funkciu v prípade vyšších momentov hybnosti je podobné postupu, ktorý bol v [1] užitý pre $l = 0$. Ako východisko slúži rovnica pre funkciu $g(k, r)$

$$g''(k, r) - 2ikg'(k, r) = u(r)\, g(k, r) \tag{1}$$

s okrajovou podmienkou

$$\lim_{r \to \infty} g(k, r) = 1. \tag{2}$$

* Napr. [2], kde sa uvažujú superpozície Yukawových potenciálov.

Funkcia $g(k, r)$ súvisí s Jostovou funkciou $f(k, r)$ jednoduchým vzťahom

$$g(k, r) = f(k, r)\, e^{ikr}.$$

So zreteľom na požadované analytické vlastnosti Jostovej funkcie v komplexnej rovine impulzu k a vzhľadom na tvar tejto funkcie pre voľnú časticu* možno predpokladať, že $g(k, r)$ je nasledujúceho tvaru

$$g(k, r) = 1 + 2 \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j(r)}{2ik + \kappa_j} + \frac{\alpha_0(r)}{ik} + \frac{\beta(r)}{(ik)^2}. \tag{3}$$

Funkcie α_j, α_0, β musia pre $r \to \infty$ vymiznúť, aby bola splnená okrajová podmienka (2). Z vyjadrenia (3) vidno, že príslušná Jostova funkcia bude mať N pólov v bodoch $k_j = i/2\, \kappa_j$, $(\kappa_j > 0)$ a tiež pól v bode $k = 0$, na prítomnosť ktorého usudzujeme, vychádzajúc z vyjadrenia Jostovej funkcie pre voľnú časticu. Ako uvidíme ďalej, $\beta \neq 0$ odpovedá momentu hybnosti $l = 2$ a $\beta = 0$ odpovedá $l = 1$.

Po dosadení (3) do (1) dostaneme systém rovníc pre funkcie α_j, α_0, β a pre potenciál u

$$\alpha_j'' + \kappa_j \alpha_j' + 2\left(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i'\right)\alpha_j = 0, \tag{4}$$

$$\alpha_0'' - 2\beta' + 2\left(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i'\right)\alpha_0 = 0, \tag{5}$$

$$\beta'' + 2\left(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i'\right)\beta = 0, \tag{6}$$

$$u = -2\left(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i'\right). \tag{7}$$

V dodatku je ukázané, že riešenie týchto rovníc sa dá previesť na riešenie systému N lineárnych nehomogénnych rovníc. Pritom treba rozlišovať prípad, keď $\beta = 0$, a prípad, keď $\beta \neq 0$. V prvom prípade príslušný lineárny nehomogénny systém znie

$$\alpha_j^{(1)}(r) = \kappa_j c_j^{(1)} e^{-\kappa_j r}\left[1 + \frac{2}{\kappa_j(r + r_1)} + 2 \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{\kappa_j + \kappa_i} + \frac{2}{\kappa_j \kappa_i (r + r_1)}\right)\alpha_i^{(1)}(r)\right], \tag{8}$$

pričom $c_j^{(1)}$ a r_1 sú integračné konštanty. Pre funkciu $\alpha_0^{(1)}(r)$ pritom platí

$$\alpha_0^{(1)}(r) = \frac{1}{r + r_1}\left(1 + 2 \sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i^{(1)}(r)}{\kappa_i}\right). \tag{9}$$

* Jostova funkcia, prislúchajúca voľnej častici, má pre $l = 1$ a $l = 2$ tento tvar:

$$f_1^{(0)}(k, r) = e^{-ikr}\left(1 + \frac{1}{ikr}\right),$$

$$f_2^{(0)}(k, r) = e^{-ikr}\left(1 + \frac{3}{ikr} + \frac{3}{(ikr)^2}\right).$$

V druhom prípade tento systém má tvar

$$\alpha_j^{(2)}(r) = \kappa_j c_j^{(2)} e^{-\kappa_j r}\left[1 + 2\sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i^{(2)}(r)}{\kappa_j + \kappa_i} + \frac{3(r+r_2)^2}{(r+r_2)^3 + 3s} \times \right.$$
$$\left. \times\left(\frac{2}{\kappa_j} + \frac{4}{\kappa_j^2(r+r_2)}\right)\left(1 + 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i^{(2)}(r)}{\kappa_i} + \frac{4}{r+r_2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i^{(2)}(r)}{\kappa_i^2}\right)\right] \tag{10}$$

s integračnými konštantami $c_j^{(2)}$, s, r_2. Funkcie $\alpha_0^{(2)}$ a β sú určené vzťahmi

$$\alpha_0^{(2)}(r) = \frac{3(r+r_2)^2}{(r+r_2)^3 + 3s}\left(1 + 2\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i^{(2)}(r)}{\kappa_i} + \frac{4}{r+r_2}\sum_{i=1}^{N}\frac{\alpha_i^{(2)}(r)}{\kappa_i^2}\right), \tag{11}$$

$$\beta(r) = \frac{\alpha_0(r)}{r+r_2}. \tag{12}$$

Potenciál $u(r)$ sa pri známych funkciách α_i a α_0 určí v obidvoch prípadoch z rovnice (7).

Asymptotický tvar funkcií $\alpha_j^{(1)}$ a $\alpha_0^{(1)}$, ako vyplýva z rovníc (8) a (9), je

$$\left.\begin{aligned} \alpha_j^{(1)}(r) &= \kappa_j c_j^{(1)} e^{-\kappa_j r}, \\ \alpha_0^{(1)}(r) &= \frac{1}{r+r_1}, \end{aligned} \qquad r \to \infty \right\} \tag{13}$$

Tomu prislúcha potenciál tvaru

$$u^{(1)}(r) = \frac{1\,.\,2}{(r+r_1)^2} + 2\sum_{j=1}^{N}\kappa_j^2 c_j^{(1)} e^{-\kappa_j r}. \tag{14}$$

Podobne z rovníc (10) a (11) plynie

$$\left.\begin{aligned} \alpha_j^{(2)}(r) &= \kappa_j c_j^{(2)} e^{-\kappa_j r}, \\ \alpha_0^{(2)}(r) &= \frac{3(r+r_2)^2}{(r+r_2)^3 + 3s}, \qquad r \to \infty, \\ u^{(2)}(r) &= 2\,.\,3\,\frac{(r+r_2)\left[(r+r_2)^3 - 6s\right]}{\left[(r+r_2)^3 + 3s\right]^2} + 2\sum_{j=1}^{N}\kappa_j^2 c^{(2)} e^{-\kappa_j r}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Vidíme, že pre veľké r potenciál v obidvoch prípadoch obsahuje vedľa superpozície exponenciálnych potenciálov i potenciály síl s ďalekým (nekonečným) dosahom. Pre $r \to \infty$ prechádzajú tieto potenciály na potenciály odstredivých síl, príslušných momentu hybnosti $l = 1$, resp. $l = 2$. Na krátkych vzdialenostiach sa však tento P-vlnový a D-vlnový charakter potenciálu stráca a v počiatku sú riešenia rovníc (8) a (10), a teda i príslušný potenciál regulárne. Aby sme i v počiatku dostali správnu asymptotiku potenciálu, musíme požadovať nasledovný asymptotický tvar funkcií pre $r \to 0$

$$\alpha_j^{(1)} = \frac{a_j^{(1)}}{r}, \qquad \alpha_0^{(1)} = \frac{a_0^{(1)}}{r}, \qquad r \to 0, \tag{16}$$

$$\alpha_j^{(2)} = \frac{a_j^{(2)}}{r^2} + \frac{b_j}{r}, \qquad \alpha_0^{(2)} = \frac{a_0^{(2)}}{r^2} + \frac{b_0}{r}, \qquad r \to 0 \tag{17}$$

(kde a_j, a_0, b_j, b_0 sú isté konštanty).

Toho je možno dosiahnuť vhodnou voľbou integračných konštánt r_1, r_2 a s. Ak píšeme riešenie rovníc (8) ako podiel dvoch determinantov

$$\alpha_j^{(1)}(r) = \frac{A_j^{(1)}(r)}{D^{(1)}(r)}, \tag{18}$$

potom, aby boli splnené asymptotické vzťahy (16), musí zrejme pre determinant sústavy (8) platiť podmienka

$$D^{(1)}(0) = 0. \tag{19}$$

Tento vzťah predstavuje podmienku pre konštantu r_1. Podobne pre determinant sústavy (10) musí platiť

$$D^{(2)}(0) = 0, \tag{20a}$$

$$D^{(2)\prime}(0) = 0, \tag{20b}$$

čo sú dve podmienky pre dve konštanty r_2 a s.

Zostáva ešte presvedčiť sa, či potenciál $u(r)$ má v počiatku správne chovanie. Za tým účelom dosadíme výrazy (16) do rovníc (4)–(6) (pri $\beta = 0$). Dostaneme podmienku

$$a_0^{(1)} + \sum_{i=1}^{N} a_i^{(1)} = 1, \tag{21}$$

z ktorej plynie

$$u^{(1)}(r) = \frac{1\,.\,2}{r^2}, \qquad r \to 0.$$

Podobne dosadením výrazov (17) do (4)–(6) dostaneme podmienky

$$\left.\begin{aligned} a_0^{(2)} + \sum_{i=1}^{N} a_i^{(2)} &= 0, \\ b_0 + \sum_{i=1}^{N} b_i &= 3, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

v dôsledku ktorých

$$u^{(2)}(r) = \frac{2\,.\,3}{r^2}, \qquad r \to 0.$$

Tým sme dokázali, že pri splnení podmienok (19) a (20) nájdené potenciály majú správne asymptotické vlastnosti pre malé i veľké r.

Na ilustráciu uvedieme potenciál, ktorý prislúcha jednopólovej Jostovej funkcii a $l = 1$

$$u(r) = -2[\alpha'(r) + \alpha'(r)],$$

kde

$$\alpha(r) + \alpha_0(r) = \frac{1}{r + r_1} + \frac{\kappa c\, e^{-\kappa r}\left(1 + \frac{2}{\kappa(r + r_1)}\right)^2}{1 - \left(1 + \frac{4}{\kappa(r + r_1)}\right) c\, e^{-\kappa r}}.$$

Matica S

Prvky matice S, prislúchajúce jednotlivým parciálnym vlnám, súvisia s Jostovými funkciami vzťahom [5]

$$S_l(k) = (-1)^l \frac{f_l(k)}{f_l(-k)}, \tag{23}$$

kde

$$f_l(k) = \lim_{r \to 0} r^l f_l(k, r), \qquad l = 1, 2.$$

Ak zavedieme konštanty

$$a_j^{(l)} = \lim_{r \to 0} r^l \alpha_j^{(l)}(r),$$

môžeme funkcie $f_l(k)$ písať v tvare

$$f_1(k) = 2\sum_{j=1}^{N} \frac{a_j^{(1)}}{2ik + \kappa_j} + \frac{2}{ikr_1} \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j^{(1)}}{\kappa_j}, \tag{24}$$

$$f_2(k) = 2\sum_{j=1}^{N} \frac{a_j^{(2)}}{2ik + \kappa_j} + \frac{1}{ik}\left(1 + \frac{1}{ikr_2}\right) \cdot \frac{3r_2^2}{r_2^3 + 3s} \times \left(2\sum_{j=1}^{N} \frac{a_j^{(2)}}{\kappa_j} + \frac{4}{r_2} \sum_{j=1}^{N} \frac{a_j^{(2)}}{\kappa_j^2}\right). \tag{25}$$

Ukážeme, že pre určenie konštánt $a_j^{(l)}$ nie je potrebné poznať vopred funkcie $\alpha_j^{(l)}(r)$. Skutočne, vychádzajúc z rovnice (18) možno písať

$$a_j^{(l)} = \frac{A_j^{(l)}(0)}{d^{(l)}},$$

kde $d^{(l)}$ je istá konštanta. Použitím známych viet z teórie determinantov ľahko odvodíme pre $a_j^{(l)}$ tento systém homogénnych lineárnych rovníc

$$a_j^{(1)} = \kappa_j c_j^{(1)} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{2}{\kappa_j + \kappa_i} + \frac{4}{\kappa_j \kappa_i r_1}\right) a_i^{(1)}, \tag{26}$$

$$a_j^{(2)} = \kappa_j c_j^{(2)} \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{2}{\kappa_j + \kappa_i} + \frac{3r_2^2}{r_2^3 + 3s}\left(\frac{2}{\kappa_j} + \frac{4}{\kappa_j^2 r_2}\right) \cdot \left(\frac{2}{\kappa_i} + \frac{4}{\kappa_i^2 r_2}\right)\right] a_i^{(2)}. \tag{27}$$

Rovnice (19) a (20a) predstavujú teraz podmienky riešiteľnosti rovníc (26) a (27). Rovnica (20b) musí byť pripojená k (27) ako dodatočná podmienka, určujúca prípustné hodnoty r_2 a s.

Rovnicami (26) a (27) sú konštanty $a_j^{(l)}$ určené až na multiplikatívny faktor. Pohľad na rovnice (23)–(25) však ukazuje, že tento faktor sa vo vyjadrení $S_l(k)$ vykráti.

Poznamenajme ešte, že integračné konštanty $c_j^{(l)}$ súvisia s rezíduami funkcie $S_l(k)$ v póloch $i/2\,\kappa_j$. Príslušný vzťah plynie z (23)–(27)

$$-i\kappa_j c_j^{(l)} = \operatorname{Rez} S_l(k)/k = \frac{i}{2}\kappa_j. \tag{28}$$

Ak teda poznáme rezíduá funkcie $S_l(k)$ (a samozrejme i κ_j), môžeme pomocou (26) a (27) určiť konštanty $a_j^{(l)}$, a teda i $S_l(k)$.

Výsledky, odvodené pre N pólovú Jostovu funkciu, možno zobecniť aj na singularity typu nespojitosti pozdĺž rezu, idúceho po imaginárnej osi od $\mu/2$ do ∞. Pre funkciu $g(k, r)$ v takomto prípade píšeme

$$g(k, r) = 1 + 2\int_{\mu}^{\infty} \frac{\alpha(\kappa, r)}{2ik + \kappa}\, d\kappa + \frac{\alpha_0(r)}{ik} + \frac{\beta(r)}{(ik)^2}. \tag{29}$$

Ďalšie rovnice dostaneme nahradením súm v uvedených vzťahoch príslušnými integrálmi (za predpokladu, že tieto konvergujú). Ako príklad uvedieme integrálny prepis rovníc (26) a (27)

$$a^{(1)}(\kappa) = c^{(1)}(\kappa) \int_{\mu}^{\infty} \left(\frac{2}{\kappa + \kappa'} + \frac{4}{\kappa\kappa' r_1}\right) a^{(1)}(\kappa')\, d\kappa', \tag{30}$$

$$a^{(2)}(\kappa) = c^{(2)}(\kappa) \int_{\mu}^{\infty} \left[\frac{2}{\kappa + \kappa'} + \frac{3r_2^2}{r_2^3 + 3s}\left(\frac{2}{\kappa} + \frac{4}{\kappa^2 r_2}\right) \times \left(\frac{2}{\kappa'} + \frac{4}{\kappa'^2 r_2}\right)\right] a^{(2)}(\kappa')\, d\kappa'. \tag{31}$$

Funkcie $c^{(l)}(\kappa)$ súvisia s nespojitosťou $S_l(k)$ pozdĺž rezu jednoduchým vzťahom

$$\frac{1}{4\pi i}\left[S_l\left(i\frac{\kappa}{2} - \varepsilon\right) - S_l\left(i\frac{\kappa}{2} + \varepsilon\right)\right] = c^{(l)}(\kappa). \tag{32}$$

Rovnice (30) a (31) sú zobecnením Noyesovej–Wongovej rovnice (2) a (3) na P-vlny a D-vlny. Pozoruhodnou vlastnosťou týchto rovníc je homogénnosť.

Záver

Vychádzali sme z daných analytických vlastností Jostových funkcií a hľadali sme im prislúchajúce potenciály. Táto „inverzná úloha" v teórii disperzných vzťahov vedie na rovnice, ktoré v prípade najjednoduchších singularít, pólov, môžeme exaktne riešiť. Výsledkom sú nielen hľadané lokálne potenciály, ale aj príslušné vlnové funkcie

$$\varphi_l(k, r) = \frac{f_l(k) f_l(-k, r) - f_l(-k) f_l(k, r)}{2ik}.$$

I keď sme odvodili definitívne výsledky len pre najnižšie momenty hybnosti ($l = 0, 1, 2$), dá sa očakávať, že podobným spôsobom bude možné postupovať aj pre ľubovoľné l. K tomu pravdepodobne stačí rozšíriť základný výraz pre Jostovu funkciu o členy, ktoré odpovedajú pólom vyšších rádov v bode $k = 0$.

Dodatok

1. Riešenie systému rovníc (4)–(6) pre $\beta = 0$.

V tomto prípade sa uvedený systém redukuje na

$$\alpha_0'' + 2\Big(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i'\Big) \alpha_0 = 0, \tag{D.1}$$

$$\alpha_j'' + \kappa_j \alpha_j' + 2\Big(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i'\Big) \alpha_j = 0. \tag{D.2}$$

Násobením prvej rovnice α_j a druhej α_0 a odčítaním dostaneme

$$\alpha_0 \alpha_j' = \frac{\alpha_j \alpha_0'' - \alpha_0 \alpha_j''}{\kappa_j}. \tag{D.3}$$

Po sumácii podľa j môžeme získanú rovnicu použiť na úpravu rovnice (D.1)

$$\alpha_0'' + 2\alpha_0'\alpha_0 + 2\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j \alpha_0'' - \alpha_0 \alpha_j''}{\kappa_j} = 0.$$

Jej integráciou dostaneme

$$\alpha_0' + \alpha_0^2 + 2\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j \alpha_0' - \alpha_0 \alpha_j'}{\kappa_j} = 0.$$

Integračnú konštantu sme pritom položili rovnú nule s ohľadom na vymiznutie α_0 pre $r \to \infty$. Poslednú rovnicu možno substitúciou

$$\alpha_0(r) = \frac{1}{a(r)}$$

previesť na lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu, ktorá sa dá riešiť kvadratúrou. Výsledok znie

$$\alpha_0(r) = \frac{1}{r + r_1}\Big(1 + 2\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j(r)}{\kappa_j}\Big) \tag{D.4}$$

s integračnou konštantou r_1.

Postup pri riešení rovníc (D.2) je analogický ako v práci [1]. Nebudeme ho preto uvádzať, ale udáme hneď výsledok

$$\alpha_j(r) = \kappa_j c_j e^{-\kappa_j r}\Big(1 + 2\sum_{i=1}^{N} \frac{\alpha_i(r)}{\kappa_j + \kappa_i} + 2\frac{\alpha_0(r)}{\kappa_j}\Big); \tag{D.5}$$

c_j tu predstavujú integračné konštanty. Ako vidno z (D.5), určenie α_j sa redukuje na riešenie systému N lineárnych nehomogénnych rovníc.

2. Riešenie systému rovníc (4)–(6) pre $\beta \neq 0$.

V tomto prípade máme riešiť kompletný systém rovníc

$$\beta'' + 2\Big(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i'\Big)\beta = 0, \tag{D.6}$$

$$\alpha_0'' - 2\beta' + 2\Big(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i'\Big)\alpha_0 = 0, \tag{D.7}$$

$$\alpha_j'' + \kappa_j \alpha_j' + 2\Big(\alpha_0' + \sum_{i=1}^{N} \alpha_i'\Big)\alpha_j = 0. \tag{D.8}$$

Pokiaľ ide o rovnicu (D.6), uspokojíme sa so špeciálnym riešením tvaru

$$\beta(r) = \frac{\alpha_0(r)}{r + r_2}, \tag{D.9}$$

ktoré v nekonečne vymizne a ktoré možno overiť priamym dosadením (r_2 je integračná konštanta). Pre riešenie rovnice (D.7) získame najprv istý pomocný vzťah. Násobíme túto rovnicu α_j, rovnicu (D.8) α_0 a odčítame. Tým dostaneme

$$\alpha_j'\alpha_0 = \frac{\alpha_j \alpha_0'' - \alpha_0 \alpha_j''}{\kappa_j} - 2\beta' \frac{\alpha_j}{\kappa_j}. \tag{D.10}$$

Podobným spôsobom z rovníc (D.6) a (D.8) odvodíme vzťah

$$\beta \alpha_j' = \frac{\alpha_j \beta'' - \beta \alpha_j''}{\kappa_j}. \tag{D.11}$$

Z rovníc (D.10) a (D.11) plynie

$$\alpha_j'\alpha_0 = \frac{\alpha_j \alpha_0'' - \alpha_0 \alpha_j''}{\kappa_j} - 2\beta' \frac{\alpha_j}{\kappa_j} - 2\beta \frac{\alpha_j'}{\kappa_j} + 2\frac{\alpha_j \beta'' - \beta \alpha_j''}{\kappa_j^2}. \tag{D.12}$$

Posledná rovnica predstavuje hľadaný pomocný vzťah. S jeho použitím možno rovnicu (D.7) prepísať na tvar

$$\alpha_0'' - 2\beta' + 2\alpha_0'\alpha_0 + 2\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j \alpha_0'' - \alpha_0 \alpha_j''}{\kappa_j} + 4\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j \beta'' - \beta \alpha_j''}{\kappa_j^2} - 4\beta' \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{\kappa_j} - 4\beta \sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j'}{\kappa_j} = 0.$$

Túto rovnicu integrujeme už bez ďalších úprav

$$\alpha_0' - 2\beta + \alpha_0^2 + 2\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j\alpha_0' - \alpha_0\alpha_j'}{\kappa_j} + 4\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j\beta' - \beta\alpha_j'}{\kappa_j^2} - 4\beta\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j}{\kappa_j} = 0.$$

Pritom sme integračnú konštantu položili opäť rovnú nule vzhľadom na vymiznutie funkcie α_0 v nekonečne. V poslednej rovnici vyjadríme β pomocou (D.9) a substitúciou

$$\alpha_0 = \frac{1}{a}$$

ju prevedieme na lineárnu diferenciálnu rovnicu prvého rádu. Riešenie takto vzniknutej rovnice vedie na nasledovné vyjadrenie α_0:

$$\alpha_0(r) = \frac{3(r + r_2)^2}{(r + r_2)^3 + 3s}\left(1 + 2\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j(r)}{\kappa_j} + \frac{4}{r + r_2}\sum_{j=1}^{N} \frac{\alpha_j(r)}{\kappa_j^2}\right) \tag{D.13}$$

s novou integračnou konštantou s.

Rovnica (D.8) sa rieši podobne ako v (1) s výsledkom

$$\alpha_j(r) = \kappa_j c_j e^{-\kappa_j r}\left(1 + 2\sum^{N} \frac{\alpha_i(r)}{\kappa_j + \kappa_i} + 2\frac{\alpha_0(r)}{\kappa_j} + 4\frac{\beta(r)}{\kappa_j^2}\right). \tag{D.14}$$

v ktorom c_j sú ďalšie integračné konštanty.

LITERATÚRA

[1] Petráš M., v tlači.
[2] Blankenbecler R., Goldberger M. L., Khuri N. N., Treiman S. B., Ann. Phys. N. Y. 10 (1960), 62.
[3] Martin A., Nuovo Cimento 19 (1961), 1257.
[4] Noyes H. P., Wong D. Y., Phys. Rev. Lett. 3 (1959), 191.
[5] Regge T., Nuovo Cimento 9 (1958), 295.

Došlo 18. 1. 1962.

Katedra teoretickej fyziky
Prírodovedeckej fakulty Univerzity Komenského
v Bratislave

ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИЙ ИОСТА И ПОТЕНЦИАЛЫ СЛУЧАЙ P-ВОЛН и D-ВОЛН

Милан Петраш

Резюме

Метод работы [1] для определения потенциала из данных особенностей функции Иоста обобщается на p-волны и d-волны. Подобно как в [1] проблема сводится в случае N полюсов к решению системы N линейных неоднородных уравнений и в случае разрыва вдоль разреза к решению линейного интергального уравнения. Дано p-волновое и d-волновое обобщение Мартеновой формы уравнения Нойеса и Вонга.